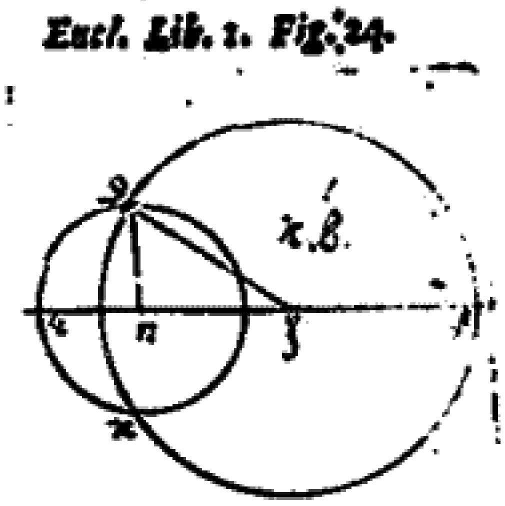
Πρότασις ΚΒ΄. Πρόβλημα.

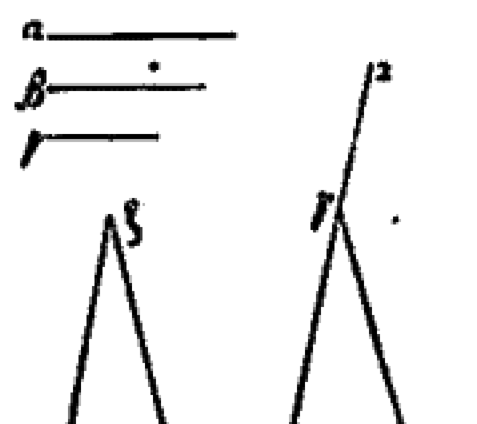
Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.

Ἐκ τριῶν ἤδη εὐθειῶν ἴσων ταῖς α, β, γ, ἔστω τρίγωνον συστήσασθαι. ἐκκείσθω τοίνυν ἡ δε, καὶ ἐξ αὐτῆς τμηθήτω τῇ μὲν α, ἴση ἡ δζ, τῇ δὲ β, ἡ ζη, καὶ τῇ γ, ἡ ηε. καὶ κέντροις μὲν τοῖς ζ, η, διαστήμασι δὲ τοῖς ζδ, ηε, κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ δθκ, εθκ, τεμνόμενοι κατὰ τὰ θ, καὶ κ, σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ θζ, θη. λέγω δὴ τοῦ ζθη, τριγώνου τὰς πλευρὰς εἶναι ἴσας ταῖς α, β, γ, δοθείσαις. ἡ γὰρ ζθ, ἴση ἐστὶ τῇ ζδ, κατὰ τὸν ιε. ὅρον. κατὰ δὲ τὸ α. ἀξίωμα καὶ τῇ α. ὡσαύτως ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ ηε, κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρον. ἡ δὲ ηε, εἴληπται ἴση τῇ γ, ἄρα κατὰ τὸ ῥηθὲν ἀξίωμα, ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ γ. γέγονε δὲ καὶ ἡ ζη, ἴση τῇ β, ἄρα τοῦ ζθη, τριγώνου αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς α, β, γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 24.



Πρότασις ΚΓ΄. Πρόβλημα.



Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἔστω δὲ πρὸς τῇ αβ, δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ γ, πρὸς αὐτῇ σημείῳ, γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι, ἴσην τῇ ὑπὸ εζδ, δοθείσῃ. ληφθήτωσαν τοίνυν τὰ ζε, ζδ, διαστήματα, ὡς ἔτυχε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εδ. εἶτα συνεστάθω διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας πρὸς τῷ γ, σημείῳ τρίγωνον, ἐκ τριῶν πλευρῶν ἴσων ταῖς δε, εζ, ζδ, τὸ γηθ. ὥστε τὴν μὲν γη, ἴσην εἶναι τῇ ζε, τὴν δὲ γθ, τῇ ζδ, καὶ τὴν ηθ, τῇ εδ. Ἐπεὶ οὖν τὰ εζδ, καὶ ηγθ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς εζ, ζδ, ἴσας, δυσὶ ταῖς ηγ, γθ, καὶ τὴν εδ, βάσιν, βάσει τῇ ηθ, ἴσην, ἕξουσι πάντως γε κατὰ τὴν η. καὶ τὴν ὑπὸ εζδ, γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ ηγθ. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

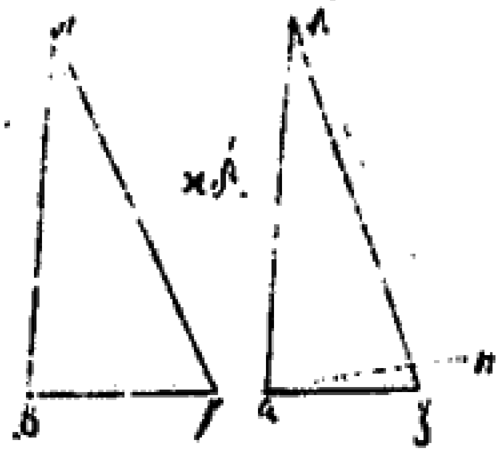
Πρό-

Πρότασις ΚΔʹ. Θεώρημα.

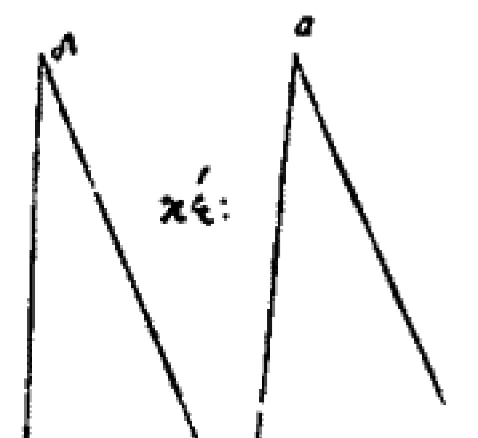
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Τριγώνων ἤδη τῶν α β γ, δ ε ζ, ἐχόντων τὰς δύο πλευρὰς α β, α γ, ἴσας ταῖς δυσὶ πλευραῖς δ ε, δ ζ, τὴν μὲν α β, τῇ δ ε, τὴν δὲ α γ, τῇ δ ζ, καὶ τῆς ὑπὸ β α γ, γωνίας μείζονος οὔσης, τῆς ὑπὸ ε δ ζ. λέγω καὶ τὴν β γ, βάσιν, μείζονα εἶναι τῆς ε ζ, βάσεως. κατασκευασθήτω τοίνυν τὸ ε δ η, τρίγωνον ἴσον τῷ β α γ, κατὰ τὴν κβʹ. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζ η. καὶ ἐπεὶ ἡ δ η, ἴση γέγονε τῇ α γ, ἣν δὲ καὶ ἡ δ ζ, ἴση τῇ αὐτῇ α γ. πάντως γε αἱ δ η, δ ζ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ αʹ. ἀξίωμα. καὶ ἡ ὑπὸ δ η ζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δ ζ η, κατὰ τὴν εʹ. ἡ δὲ ὑπὸ δ η ζ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζ η ε, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δ ζ η, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζ η ε. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ δ ζ η, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ε ζ η, ἄρα ἡ ὑπὸ ε ζ η, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζ η ε. ὥστε κατὰ τὴν ιθʹ. ἡ ε η, ὑποτείνουσα, μείζων ἐστὶ τῆς ε ζ, ἡ δὲ ε η, ἴση ἐστὶ τῇ β γ, ἄρα καὶ ἡ β γ, μείζων ἐστὶ τῆς ε ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 25.



Πρότασις ΚΕʹ. Θεώρημα.



Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἐχέτωσαν ἤδη τὰ α β γ, ε δ ζ, τρίγωνα πλευρὰς τὰς α β, α γ, ἴσας, πλευραῖς ταῖς δ ε, ε ζ, ἡ δὲ β γ, βάσις μείζων ἔστω τῆς ε ζ, βάσεως. λέγω καὶ τὴν ὑπὸ β α γ, γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ ε δ ζ. εἰ γὰρ μὴ, ἢ ἴση ἔσται, ἤγουν ἐλάττων. εἰ μὲν οὖν ἴση ὑποτεθῇ ἡ ὑπὸ β α γ, τῇ ὑπὸ ε δ ζ, ἴση ἔσται καὶ ἡ β γ, βάσις τῇ ε ζ, βάσει, κατὰ τὴν δʹ. ὅπερ ἄτοπον, ὑπετέθη γὰρ καὶ μείζων. εἰ δὲ ἡ ὑπὸ β α γ, ὑποτεθῇ ἐλάττων τῆς ὑπὸ ε δ ζ. ἐλάττων ἔσται καὶ ἡ β γ, βάσις τῆς ε ζ, βάσεως, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ὃ πολλῷ μᾶλλον ἄτοπον. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα. καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κϛʹ. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔστωσαν δὴ τῶν αβγ, δεζ, τριγώνων αἱ ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνίαι ἴσαι ταῖς ὑπὸ δεζ, δζε, καὶ ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις πλευρά, ἡ βγ, ἴση τῇ εζ. λέγω ἴσην εἶναι, καὶ τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ. εἰ γὰρ μή, ἔσται πάντως ἡ μία τῆς ἑτέρας μείζων. Ἔστω τοίνυν ἡ δε, μείζων τῆς αβ. καὶ κείσθω ἡ ηε, ἴση τῇ αβ, κατὰ τὴν γʹ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηζ. καὶ ἐπεὶ τῶν ηεζ, αβγ, τριγώνων ἡ ηε, ἴση γέγονε τῇ αβ, καὶ ἡ εζ, ἴση ὑπετέθη τῇ βγ, καὶ ἡ πρὸς τῷ ε, γωνία τῇ πρὸς τῷ β, ὁμοίως ἴση· ἄρα κατὰ τὴν δʹ. ἴση ἔσται καὶ ἡ ηζ, τῇ αγ· καὶ ὅλον τὸ ηεζ, τρίγωνον, ὅλῳ τῷ αβγ, τριγώνῳ· καὶ ἡ ὑπὸ ηζε, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ, γωνίᾳ· ὑπετέθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δζε, ἴση τῇ ὑπὸ αγβ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δζε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηζε, ἀλλὰ καὶ περιέχει αὐτήν, ἄτοπον ἄρα, ὥστε οὐδὲ μείζων ἡ δε, τῆς αβ, ἀλλ' ἴση. Ἔστω αὖθις ἡ αβ, ἴση τῇ δε, λέγω καὶ τὴν αγ, ἴσην εἶναι τῇ δζ, καὶ τὴν βγ, τῇ εζ. εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ εζ, μείζων τῆς βγ, τῆς δὲ εθ, ἴσης γενομένης τῇ βγ, ἐπεζεύχθω ἡ δθ. ἐπεὶ οὖν τῶν δεθ, αβγ, τριγώνων, ἡ μὲν δε, ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ἡ δὲ εθ, τῇ βγ, καὶ ἡ πρὸς τῷ ε, γωνία τῇ πρὸς τῷ β, πάντως γε, κατὰ τὴν δʹ καὶ ἡ δθ, ἴση ἐστὶ τῇ αγ, καὶ ἡ ὑπὸ δθε, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ, ἴση· ὑπετέθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δζε, ἴση τῇ ὑπὸ αγβ, ἄρα ἡ ὑπὸ δθε, ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ δζε, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν ιϛʹ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 26.

Πρότασις ΚΖʹ. Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς δύο ἤδη εὐθείας τὰς αβ, γδ, ἐμπίπτουσα ἡ εζ, ποιείτω τὰς ἐναλλὰξ γωνίας, ἤτοι τὰς ὑπὸ βηθ, ηθγ, ἴσας ἀλλήλαις· λέγω, τὰς αβ, γδ, εὐθείας παραλλήλους εἶναι, καὶ ἐκβαλλομένας ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη μὴ συμπίπτειν. εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ β, δ, μέρη συμ-

πίπ-

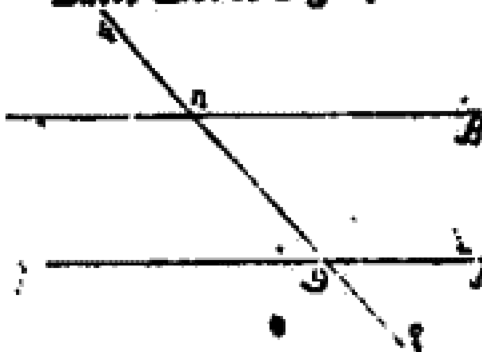
πιπτέτωσαν κατὰ τὸ κ. ϗ ἐπεὶ τοῦ η κ θ, τριγώνε ἡ κ θ, πλευρὰ ἐκβέβληται ἐπὶ
τὸ γ, πάντως γε ἡ ὑπὸ γ θ η, γωνία μείζων ἐςὶ τῆς ὑπὸ β η θ, κατὰ τὴν ις'.
ὑπετέθη δὲ ϗ ἴση, ἄτοπον ἄρα. ὥςε αἱ α β, γ δ, παράλληλοί εἰσι, καὶ
ἐκβαλλόμεναι ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὀ συμπίπτουσιν. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς ϗ
ἀπεναντίον, ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς ϗ
ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσον-
ται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς δύο ἤδη εὐθείας τὰς α β, γ δ, πίπτουσα ἡ ε ζ, ποιείτω τὴν ὑπὸ ε η β,
ἐκτὸς γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ η θ δ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.
λέγω τὰς α β, γ δ, εὐθείας παραλλήλυς εἶναι. ἐπεὶ
γὰρ ἡ ὑπὸ ε η β, γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ η θ δ, τῇ δὲ
ὑπὸ ε η β, ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ α η θ, κατὰ τὴν ιε'. πάντως
γε αἱ ὑπὸ α η θ, η θ δ, εἰσὶν ἴσαι, ἀλλὰ ϗ ἐναλλάξ.
ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω αἱ α β, γ δ, παράλληλοί εἰσι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 27.



Ποιείτω ἔτι ἡ ε ζ, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
γωνίας, τὰς ὑπὸ β η θ, η θ δ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.
λέγω τὰς α β, γ δ, εὐθείας παραλλήλυς εἶναι. ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ β η θ, η θ δ,
δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, εἰσὶ δὲ ὁμοίως ϗ αἱ β η θ, θ η α,
δυσὶν ὀρθαῖς εἴσαι κατὰ τὴν ιγ'. πάντως γε αἱ β η θ, η θ δ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς β η θ,
θ η α. κοινῆς δὲ ἀφαιρυμένης τῆς β η θ, ἐγκαταλείπονται ἴσαι αἱ η θ δ, θ η α,
ϗ εἰσιν ἐναλλάξ. αἱ α β, γ δ, ἄρα εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν κατὰ τὴν ἀνωτέρω.
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

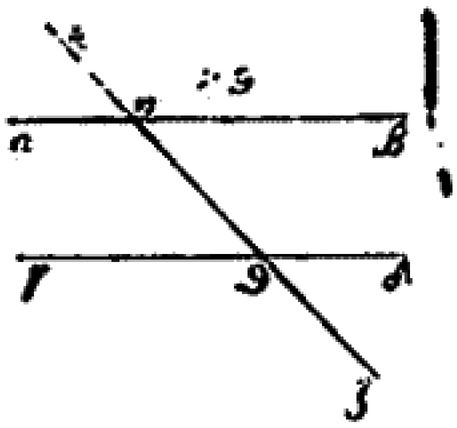
Πρότασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλυς εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γω-
νίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, ϗ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς ϗ ἀπεναντίον,
ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιεῖ, καὶ τὰς ἐντὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ
μέρη γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ.

Εἰς παραλλήλους ἤδη τὰς α β, γ δ, εὐθεῖα πιπτέτω ἡ ε ζ. λέγω, πρῶτον τὰς
ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ α η θ, η θ δ, ἴσας εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, ἔςω ἡ ὑπὸ η θ δ,
ἐλάττων τῆς ὑπὸ α η θ, ϗ κοινὴ λαφθήτω ἡ ὑπὸ β η θ. ϗ ἔσονται πάντως αἱ ὑ-
πὸ α η θ, β η θ, μείζονες τῶν ὑπὸ β η θ, η θ δ. ἀλλ' αἱ ὑπὸ β η θ, α η θ, ἴ-
σαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς κατὰ τὴν ιγ'. ἄρα αἱ ὑπὸ β η θ, η θ δ, ἐλάσσονές εἰσι δύο

ὀρθῶν, καὶ ἑπομένως ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὰ β, καὶ δ, μέρη, συμπεσοῦνται, κατὰ τὸ ια'. ἀξίωμα. ὅπερ ἄτοπον. ὑποτίθενται γὰρ καὶ παράλληλοι. ἄρα αἱ ὑπὸ α η θ, η θ δ, γωνίαι ἴσαι εἰσί. λέγω δεύτερον, καὶ τὴν ἐκτὸς, τὴν ὑπὸ ε η β, ἴσην εἶναι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ η θ δ. ἡ γὰρ ὑπὸ ε η β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α η θ, κατὰ τὸ ιε'. τῇ δὲ α η θ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ η θ δ, ὥστε κατὰ τὸ α', ἀξίωμα, ἡ ὑπὸ ε η β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ η θ δ. λέγω τρίτον, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ β η θ, η θ δ, ἴσας εἶναι δυσὶν ὀρθαῖς. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ ε η β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ η θ δ, κοινῆς προσκειμένης τῆς ὑπὸ β η θ, ἔσονται πάλιν κατὰ τὸ β'. ἀξίωμα, αἱ ὑπὸ ε η β, β η θ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ β η θ, η θ δ, ἀλλ' αἱ ὑπὸ ε η β, β η θ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ β η θ, η θ δ, δυσὶν ὀρθαῖς ὁμοίως ἴσαι εἰσίν. ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ἄρα εὐθείας καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 28.

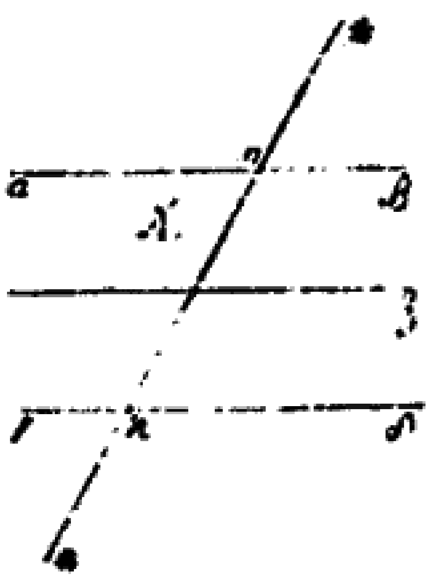


ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, παντὸς παραλληλογράμμου τὰς δύο γωνίας, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας, καὶ τὰς τέσσαρας τέσσαρσιν ἴσας.

Πρότασις Λ'. Θεώρημα.

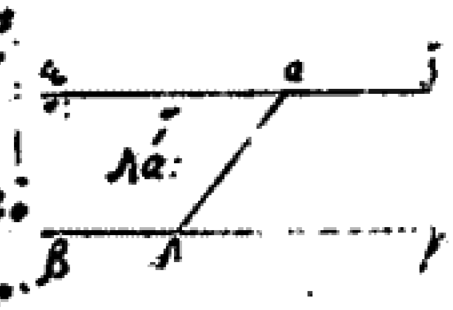
Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.



Εὐθείᾳ ἤδη τῇ ε ζ, ἔστωσαν παράλληλοι αἱ α β, γ δ, λέγω ταύτας καὶ ἀλλήλαις παραλλήλους εἶναι. πεπτωκυίας γὰρ ἐπ' αὐτὰς τῆς η θ κ, ἔσονται αἱ ὑπὸ α η θ, η θ ζ, γωνίαι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἴσαι. ὡσαύτως καὶ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ η θ ζ, ἴση τῇ ἐντὸς ὑπὸ θ κ δ. ὥστε κατὰ τὸ α'. ἀξίωμα καὶ αἱ ὑπὸ α η θ, η κ δ, ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ ἐναλλάξ, ἄρα κατὰ τὴν κζ'. αἱ α β, γ δ, παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐπὶ παντὸς παραλληλογράμμου ἡ τῇ μιᾷ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀχθεῖσα παράλληλος καὶ τῇ ἑτέρᾳ παράλληλος ἔσται.



Πρότασις ΛΑ'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἀπὸ σημείου ἤδη τοῦ α, εὐθείᾳ τῇ β γ, ἔσω εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Ἀχθήτω τοίνυν ὡς ἔτυχεν ἡ α δ, καὶ γενέσθω, κατὰ τὴν κγ'. τῇ ὑπὸ α δ γ, γωνίᾳ

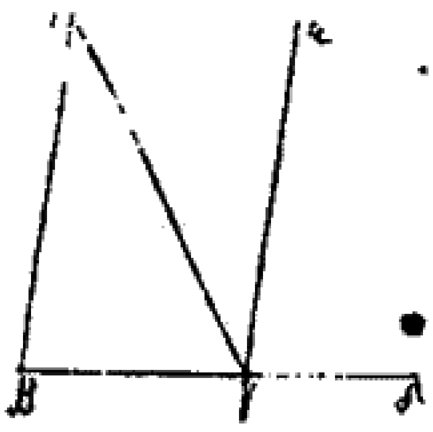
ἴση

ἴση ἡ ὑπὸ δαε· καὶ διὰ τῶν α, καὶ ε, σημείων ἤχθω ἡ εζ, λέγω ταύτην παράλληλον εἶναι τῇ βγ. ἐπεὶ γὰρ ἐπὶ τὰς εζ, βγ, εὐθειῶν πίπτουσα ἡ αδ, πεποίηκε τὰς ἐναλλὰξ ἴσας κατὰ τὴν κζ'. πάντως γε αἱ εζ, βγ, παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΒ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Eucl. Lib. 1. Fig. 29.



Τριγώνου ἤδη τοῦ αβγ, ἐκβληθήτω ἡ βγ, πλευρὰ ἐπὶ τὸ δ. λέγω τὴν ὑπὸ αγδ, ἐκτὸς γωνίαν ἴσην εἶναι δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τουτέστι ταῖς ὑπὸ βαγ, αβγ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ γ, παράλληλος τῇ αβ, ἡ γε. καὶ ἐπεὶ εἰς τὰς αβ, γε, πέπτωκεν ἡ αγ. πάντως γε αἱ ὑπὸ αγε, γαβ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κθ'. Ἐπεὶ δ' αὖθις εἰς τὰς αὐτὰς πέπτωκε καὶ ἡ βγ. δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ εγδ, αβγ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν αὐτήν. αἱ δύο ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ αγε, εγδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ γαβ, αβγ. ἀλλ' αἱ αγε, εγδ, ἴσαι εἰσὶ τῇ ὑπὸ αγδ, ἐκτός. ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ γαβ, αβγ. ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον. Λέγω δ' ὅτι, τὰς τρεῖς τοῦ τριγώνου πλευρὰς δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αγδ, ἴση δέδεικται ταῖς ὑπὸ γαβ, αβγ, κοινῆς προσκειμένης τῆς ὑπὸ αγβ, ἔσονται αἱ ὑπὸ αγδ, αγβ, ἴσαι ταῖς τρισὶ τοῦ τριγώνου τούτου γωνίαις, ταῖς ὑπὸ γαβ, αβγ, βγα. ἀλλ' αἱ αγδ, αγβ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, κατὰ τὴν ιγ'. ἄρα κατὰ τὸ α. ἀξίωμα, καὶ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ.

Α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, τῶν μὲν ὀρθογωνίων ἑκατέρα τῶν λοιπῶν ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων, ἐλάττων ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ τῶν ὀξυγωνίων μείζων.

Β'. Ἔτι τῶν ἰσοπλεύρων ἑκάστη τῶν γωνιῶν δύο τρίτα μέρη περιέχει τῆς ὀρθῆς.

Γ'. Ἔτι παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ὁμοῦ ἴσαι εἰσὶ ταῖς οἱουδήποτε τριγώνου τρισὶ γωνίαις ὁμοῦ λαμβανομέναις.

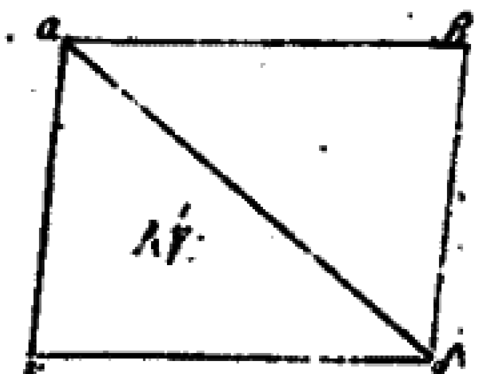
Δ'. Ἔτι παντὸς τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Αἱ αγ, βδ, ἤδη εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς αβ, γδ, ἴσας τε καὶ παραλλήλους εὐθείας. λέγω καὶ τὰς αγ, βδ, ἴσας τε καὶ παραλλήλους εἶναι. ἤχθω γὰρ ἡ αδ, διαγώνιος. καὶ ἐπεὶ τῶν αβδ, δγα, τριγώνων αἱ βα, αδ, πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς γδ, δα, καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γδα, πάντως γε κατὰ τὴν κθ'. καὶ βάσις ἡ αγ, ἴση ἐστὶ βάσει τῇ βδ. ὅπερ ἦν τὸ α'. Αὖθις ἐπεὶ τῶν αβδ, αγδ, αἱ δύο πλευραὶ αβ, βδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς δγ, γα, καὶ βάσις ἡ αδ, κοινή. πάντως γε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβδ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αγδ. καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον αβδ, ὅλῳ τῷ τριγώνῳ αγδ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς. τουτέστιν ἡ ὑπὸ βδα, τῇ ὑπὸ γαδ, καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. ἄρα αἱ αγ, βδ, εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὴν κζ'. ὅπερ ἐστὶ τὸ δεύτερον.

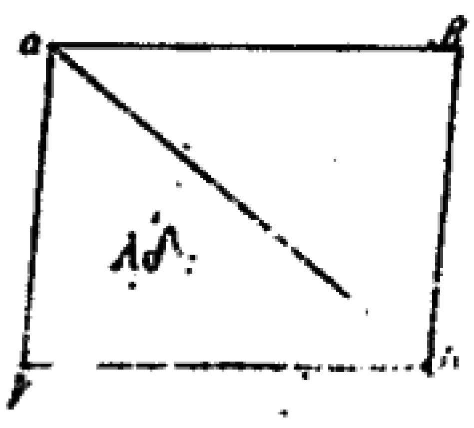
Eucl. Lib. 1. Fig. 30.



Πρότασις ΛΔ'. Θεώρημα.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω δὲ παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ, λέγω τὰς τε ἀπεναντίον πλευρὰς, τὰς αβ, γδ, αγ, βδ, ἴσας εἶναι, καὶ τὰς γωνίας ἔτι τὰς ὑπὸ αβδ, αγδ, καὶ τὰς ὑπὸ γαβ, βδγ, ἴσας ὁμοίως ἀλλήλαις εἶναι. τὴν δὲ αδ, διάμετρον δίχα αὐτὸ τέμνειν, τουτέστι τὰ αβδ, αγδ, τρίγωνα ἴσα εἶναι. ἐπεὶ γὰρ αἱ αβ, γδ, παράλληλοί εἰσι, καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ αδ, πάντως γε κατὰ τὴν κθ'. αἱ ὑπὸ βαδ, καὶ γδα, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὡσαύτως κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ αἱ ὑπὸ βδα, γαδ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰ κοινὴ, ἄρα κατὰ τὴν κϛ'. καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι εἰσὶ, τουτέστιν ἡ αβ, τῇ γδ, καὶ ἡ αγ, τῇ βδ, καὶ τοῦτ' ἔστι τὸ α'. Ἔστι δ' ἔτι καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ αβδ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγδ, ἴση, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γδα, ἡ δὲ ὑπὸ βδα, τῇ ὑπὸ γαδ, ἄρα καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ βδγ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ βαγ, καὶ τοῦτ' ἔστι τὸ β'. Ἐπεὶ δὲ τῶν αβδ, αγδ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ αβ, βδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς αγ, γδ, καὶ βάσις ἡ αδ, κοινὴ, πάντως γε καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον αβδ, ἰσόν ἐστιν ὅλῳ τῷ τριγώνῳ αγδ. κατὰ τὴν η'. καὶ τοῦτ' ἔστι τὸ γ'.

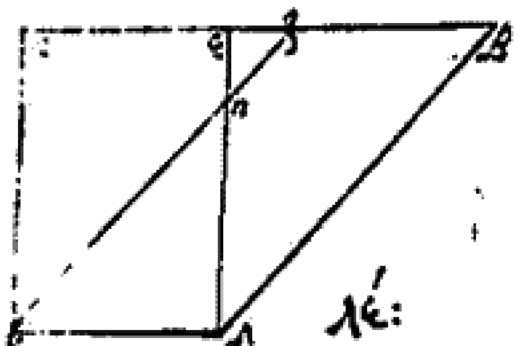


Πρότασις ΛΕ΄. Θεώρημα.

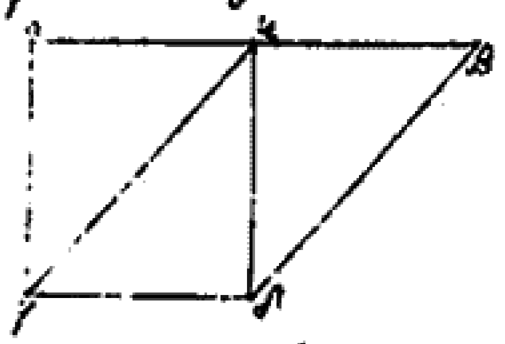
Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

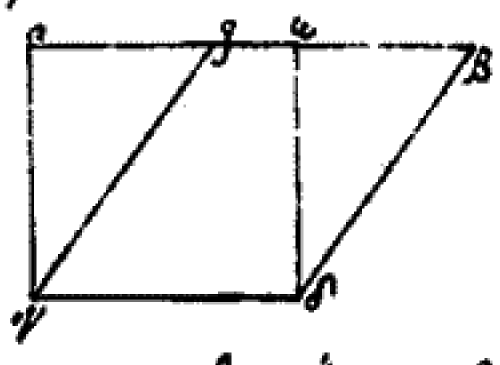
Ἔστωσαν ἤδη ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς γδ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αβ, γδ, τὰ αδ, ζδ, παραλληλόγραμμα. λέγω ταῦτα ἴσα εἶναι. ἐπεὶ δὲ τοτὲ τριχῶς συμβαίνειν δύναται. Πιπτέτω πρῶτον ἡ γζ, ἐκτὸς τοῦ ε. ἐπεὶ οὖν αἱ αε, ζβ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, διὰ τὸ ἴσην εἶναι ἑκατέραν τῇ γδ, κατὰ τὴν αὐτὴν πρώτην. κοινῆς προσκειμένης τῆς εζ, ἔσται πάντως ἡ αζ, ἴση τῇ εβ, κατὰ τὸ β΄. ἀξίωμα. ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν αγ, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ εδ, κατὰ τὴν αὐτὴν, ἡ δὲ ὑπὸ εαγ, γωνία τῇ ὑπὸ βεδ, κατὰ τὴν κθ΄. ἄρα καὶ βάσις ἡ γζ, βάσει τῇ δβ, ἴση ἐστί, καὶ τὸ αγζ, τρίγωνον τῷ εδβ. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ εηζ, τριγώνου, ἐγκαταλείπεται τὸ αγηε, τραπέζιον, ἴσον τῷ ζηδβ, τραπεζίῳ κατὰ τὸ γ΄. ἀξίωμα. προστιθεμένου δὲ κοινοῦ τοῦ γδη, τριγώνου, ἔσται τὸ αδ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ζδ.

Eucl. Lib. [illegible] Fig. 35.



λέ:

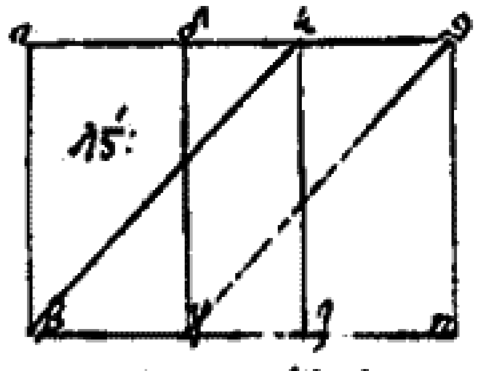




Ὑποκείσθω β΄. τὴν γε, εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ ε. πίπτειν τῶν γοῦν εαγ, βεδ, τριγώνων ἴσων δειχθέντων, ὡς καὶ πρότερον, καὶ τοῦ γεδ, κοινοῦ προσκειμένου. ἔσται τὸ αδ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ γβ. Ὑποκείσθω τρίτον τὴν γζ, μεταξὺ τῶν α, καὶ ε, πίπτειν σημείων. τῶν οὖν ζαγ, βεδ, τριγώνων ἴσων ὁμοίως δειχθέντων, καὶ τοῦ εζγδ, τραπεζίου κοινοῦ προσκειμένου, ἔσται τὸ αδ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ζδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Λς΄. Θεώρημα.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

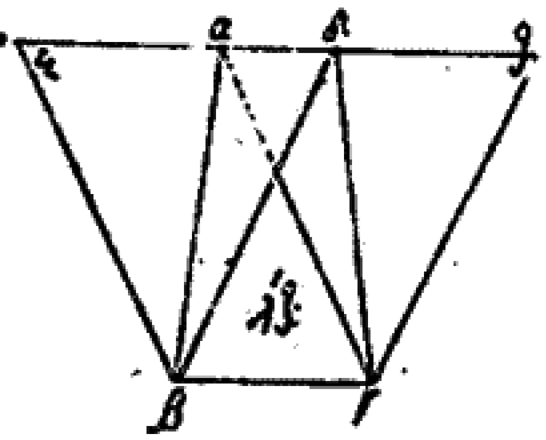


Ἔστωσαν δὴ παραλληλόγραμμα τὰ αγ, εη, ἐπὶ ἴσων μὲν βάσεων τῶν βγ, ζη, ἐν ταῖς αὐταῖς δὲ παραλλήλοις ταῖς αθ, βη. λέγω, ὅτι ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. Ἀχθήτωσαν γὰρ αἱ βε, γθ, καὶ ἐπεὶ ἡ βγ, ἴση ὑπετέθη τῇ δὲ ζη, τῇ δὲ ζη, ἴση ἐστὶν ἡ εθ, κατὰ τὴν λδ΄. πάντως γε καὶ τὸ α, ἀξίωμα ἡ βγ, ἴση ἐστὶ τῇ εθ, ἔστι δὲ καὶ παράλληλος, ἄρα καὶ αἱ βε, γθ, εὐθεῖαι ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι, κατὰ τὴν λγ΄. ὥστε τὸ βθ, παραλληλόγραμμόν ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ διὰ τῆς ἀνωτέρω ἑκάτερον τῶν αγ, εη, ἴσον δείκνυται τῷ εβγθ, παραλληλογράμμῳ, πάντως γε κατὰ τὸ α΄. ἀξίωμα τὰ αγ, εη, παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΖ΄ Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

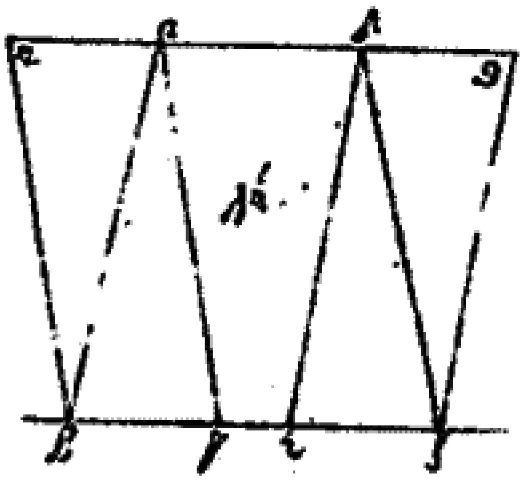
Ἔστωσαν ἤδη τρίγωνα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς εζ, βγ· λέγω ταῦτα, ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. Ἀχθείσης γὰρ τῆς βε, παραλλήλως τῇ αγ, καὶ τῆς γζ, τῇ βδ, ἔσονται τὰ εγ, βζ, παραλληλόγραμμα, καὶ ἴσα ἀλλήλοις κατὰ τὴν λε΄. τὰ ἡμίση δὲ τούτων ἐστὶ τὰ αβγ, δβγ, τρίγωνα, κατὰ τὴν λδ΄. ἄρα κατὰ τὸ ζ΄. ἀξίωμα τὰ αβγ, δβγ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Eucl. Lib. 1. Fig. 32.*



Πρότασις ΛΗ΄. Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

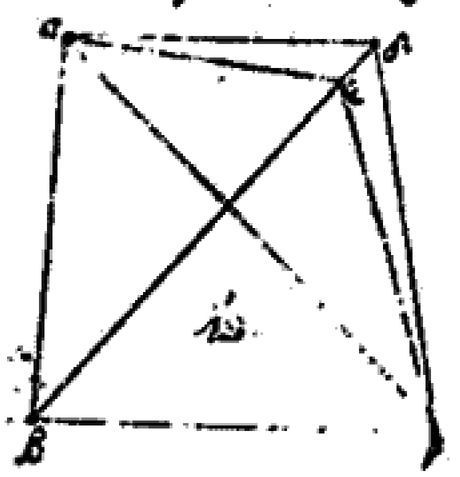
Ἔστωσαν ἤδη ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν βγ, εζ, καὶ ἐν παραλλήλοις ταῖς ηθ, βζ, τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ. λέγω ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. Ἀχθείσης γὰρ παραλλήλως τῇ μὲν αγ, τῆς βη, τῇ δὲ εδ, τῆς ζθ. ἔσονται πάντως τὰ ηγ, εθ, χωρία παραλληλόγραμμα, καὶ ἀλλήλοις ἴσα κατὰ τὴν λε΄. τούτων δὲ τὰ ἡμίση ἐστὶ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα κατὰ τὴν λδ΄. ἄρα καὶ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΛΘ΄. Θεώρημα.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν δὲ ἴσα τρίγωνα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βγ, βάσεως, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὡς εἰπεῖν, τὰ ἄνω· λέγω ταῦτα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις. εἰ γὰρ μὴ, ἐπιζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἐπεὶ αἱ αδ, βγ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν οὐκ εἰσὶ παράλληλοι, ἔσω παράλληλος τῇ βγ, ἡ αε. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εγ. Ἐπεὶ οὖν τὰ αβγ, εβγ, τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσι βάσεως τῆς βγ, καὶ παραλλήλοις ταῖς αε, βγ. πάντως γε κατὰ τὴν λζ΄. ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ὑποτεθὲν δὲ καὶ τὸ δβγ, τρίγωνον ἴσον τῷ αβγ. ἄρα κατὰ τὸ α΄. ἀξίωμα, τὸ δβγ, ἴσον



ἐστὶ

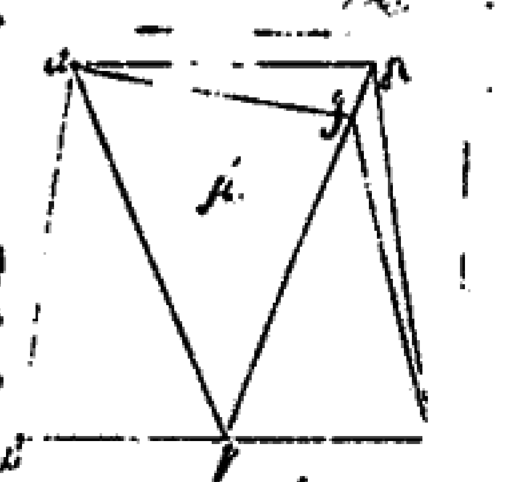
ἐστι τῆς ε β γ, ἀλλὰ καὶ περιέχει αὐτὸ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ α ε, παράλληλός ἐστι τῇ β γ, ἀλλ' ἡ α δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Μ'. Θεώρημα.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν δὴ τρίγωνα τὰ α β γ, δ γ ε, ἴσα, ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν β γ, γ ε. Λέγω ταῦτα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις ταῖς β ε, α δ. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω παράλληλος τῇ β ε, ἡ α ζ, καὶ ἐπεὶ τὰ α β γ, ζ γ ε, τρίγωνα ἐπὶ ἴσων βάσεών εἰσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς β ε, α ζ, πάντως γε κατὰ τὴν λη'. ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὑπετέθη δὲ καὶ τὸ δ γ ε, ἴσον τῷ α β γ, ἄρα κατὰ τὸ α'. ἀξίωμα, τὸ δ γ ε, ἴσον ἐστὶ τῷ ζ γ ε, ἀλλὰ καὶ ὑπερέχει, ἄτοπον ἄρα τὴν α ζ, παράλληλον εἶναι τῇ β ε. ὥστε ἡ α δ, παράλληλός ἐστι τῇ β ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

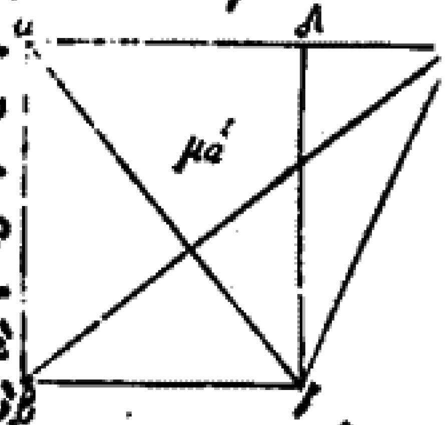
Eucl. Lib. 1. Fig.33.



Πρότασις ΜΑ'. Θεώρημα.

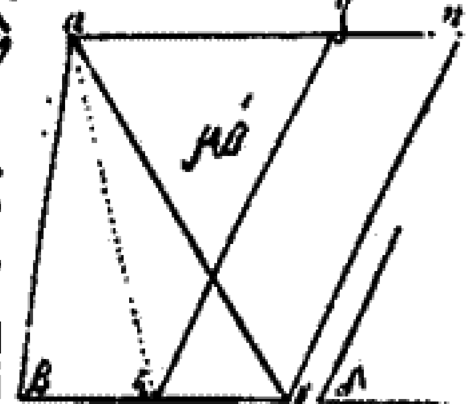
Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Ἐχέτω δὴ παραλληλόγραμμον τὸ α γ, τὴν αὐτὴν βάσιν τῷ β γ ε, τριγώνῳ τὴν β γ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς β γ, α ε. Λέγω τὸ α γ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον εἶναι τοῦ β γ ε, τριγώνου. τῆς γὰρ α γ, ἀχθείσης, ἔσται πάντως τὸ α γ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ α β γ, τριγώνου κατὰ τὴν λδ'. ἀλλὰ τῷ α β γ, τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ τὸ β γ ε, τρίγωνον κατὰ τὴν λζ'. ἄρα τὸ α γ, παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι καὶ τοῦ β γ ε, τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



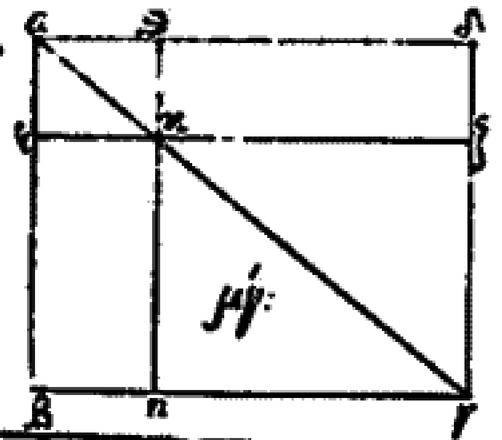
Πρότασις ΜΒ'. Θεώρημα.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ α β γ· ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ πρὸς τῷ δ· καὶ ζητηθήτω συστάθῆναι παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι α β γ, τριγώνῳ, ἔχον τὴν πρὸς τῷ δ, γωνίαν. Τμηθήτω τοίνυν ἡ β γ, βάσις τοῦ α β γ, τριγώνου δίχα κατὰ τὸ ε, διὰ τῆς ι΄. καὶ πρὸς τῷ ε, σημείῳ συνεστάθω ἡ ὑπὸ γεζ, γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ δ, κατὰ τὴν κγ΄. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ α, σημείου ἤχθω παράλληλος τῇ βγ, ἡ αη. ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἤχθω ὁμοίως παράλληλος τῇ εζ, ἡ γη. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε. Λέγω δὴ τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον ἴσον εἶναι τῷ αβγ, τριγώνῳ ἐν τῇ δ, δοθείσῃ γωνίᾳ. τὰ γὰρ αβε, αεγ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν λη΄. ὥστε τὰ δύο ὁμοῦ, ἤτοι τὸ ὅλον αβγ, τοῦ ἑνὸς αεγ, διπλάσιόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ αεγ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρα τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ κατὰ τὸ ϛ΄. ἀξίωμα. ἔχει δὲ τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον καὶ τὴν ὑπὸ ζεγ, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ δ, δοθείσῃ. τῷ δοθέντι ἄρα αβγ, τριγώνῳ συνέστη ἴσον τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον ἐν τῇ πρὸς τῷ δ, δοθείσῃ γωνίᾳ. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

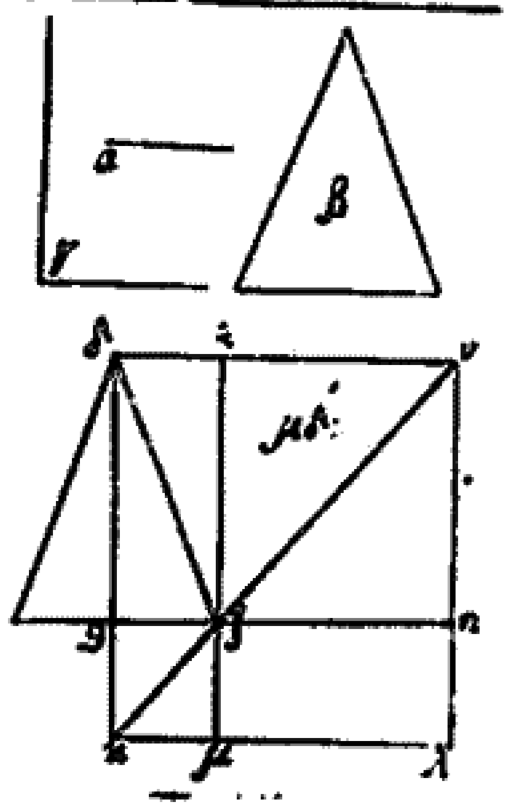
Eucl. Lib. 1. Fig. 44.



Πρότασις ΜΓ΄. Θεώρημα·

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν δὴ τοῦ βδ, παραλληλογράμμου περὶ τὴν αγ, διάμετρον παραλληλόγραμμα τὰ ζη, θε, λέγω τὰ τούτων παραπληρώματα βκ, κδ, ἴσα εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ τὸ βδ, παραλληλόγραμμόν ἐστι, πάντως γε κατὰ τὴν λδ΄. τὰ αβγ, αδγ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ κηγ, κζγ, καὶ ἔτι τὰ αεκ, αθκ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἐὰν οὖν πρῶτον ἀπὸ τῶν αβγ, αδγ, ἴσων ἀφαιρεθῇ τὰ κηγ, κζγ, ἴσα, ἐγκαταλειφθήσονται κατὰ τὸ ε΄. ἀξίωμα τὰ αβηκ, αδζκ, τραπέζια ἴσα. ἐὰν δ' αὖθις ἀπὸ τῶν αβηκ, αδζκ, ἴσων, ἀφαιρεθῇ τὰ αεκ, αθκ, τρίγωνα ἴσα, ἐγκαταλειφθήσονται τὰ βκ, κδ, ἴσα ἀλλήλοις. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.



Πρότασις ΜΔ΄. Πρόβλημα:

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω ἤδη παραβαλεῖν ἐπὶ τῆς α, δοθείσης εὐθείας παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι β, τριγώνῳ, ἔχον τὴν πρὸς τῷ γ, γωνίαν. συνεστάθω διὰ τῆς μβ΄, τὸ δεζθ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ β΄, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ εζθ, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ γ΄. τῇ δὲ εζ, κείσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ζμ, ἴση τῇ α. καὶ ἐξαχθήτω ἡ δθ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ θ, ἀορίστως. εἶτα διὰ τοῦ μ, παράλληλος τῇ θζ.

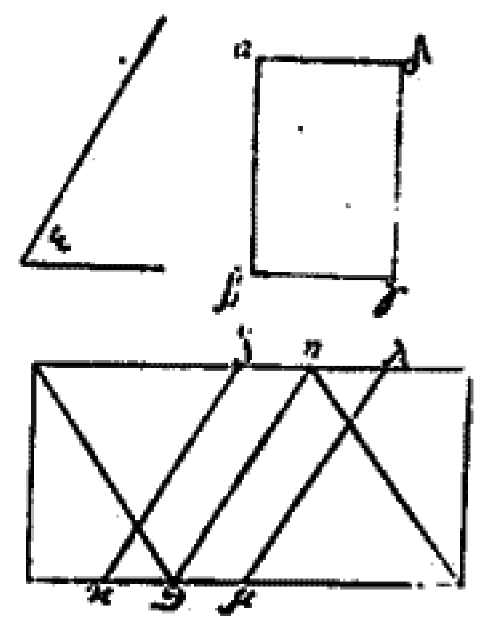
ἤχθω

ἤχθω ἡ κ λ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ κ ζ. ἐπεὶ δὲ αἱ κ μ, δ ε, παράλληλοί εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς λ΄. καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ δ κ, πάντως γε αἱ ὑπὸ μ κ δ, ε δ κ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, κατὰ τὴν κθ΄. αἱ δὲ ὑπὸ ζ κ δ, ε δ κ, ἐλάττονες δύο ὀρθῶν, ὥστε ἐκβαλλόμεναι αἱ δ ε, κ ζ, συμπεσοῦνται, συμπιπτέτωσαν δὴ κατὰ τὸ ν. καὶ διὰ τοῦ ν, παράλληλος τῇ ε μ, ἤχθω ἡ ν λ, καὶ περατούσθω ἡ θ ζ, κατὰ τὸ η. τοῦ δ λ, τοίνυν παραλληλογράμμου τὰ δ ζ, ζ λ, παραπληρώματα τῶν περὶ τὴν κ ν, διάμετρον παραλληλογράμμων ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ κατὰ τὴν μγ΄. ἀλλὰ τὸ δ ζ, γέγονεν ἴσον τῷ β, τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ ε ζ θ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ η ζ μ, κατὰ τὴν ιε΄. ἄρα καὶ τὸ ζ λ, ἴσον ἐστὶ τῷ β, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ η ζ μ, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ε ζ θ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ε ζ θ, γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ γ, δοθείσῃ, ἡ δὲ ζ μ, εὐθεῖα ἴση τῇ α. ἄρα ἐπὶ τῆς ζ μ, εὐθείας ἴσης τῇ α, παραβέβληται τὸ ζ λ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ β, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ η ζ μ, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ γ, δοθείσῃ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 35.

Πρότασις ΜΕ΄. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



Ἔστω δὴ συστήσασθαι παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι α β γ δ, εὐθυγράμμῳ, ἔχον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ε. Ἐπιζεύχθω ἡ α γ, καὶ συνεστάθω διὰ τῆς μβ΄. τὸ ζ θ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ α β γ, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ζ κ θ, γωνίαν ἴσην τῇ ε. καὶ διὰ τῆς αὐτῆς παρὰ τὴν η θ, εὐθεῖαν παραβεβλήσθω τὸ η μ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ α δ γ, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ η θ μ, γωνίαν ἴσην τῇ ε. Ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ ζ κ θ, η θ μ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ ε, γωνίᾳ, πάντως γε κατὰ τὸ α. ἀξίωμα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ὑπὸ κ θ η, ἔσονται αἱ ὑπὸ κ θ η, η θ μ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ ζ κ θ, κ θ η, ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ζ κ θ, κ θ η, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς κθ΄. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ κ θ η, η θ μ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, καὶ κατὰ τὴν ιδ΄. αἱ κ θ, θ μ, ἐπ᾽ εὐθείας εἰσίν. ὁμοίως δειχθήσεται, καὶ τὰς ζ η, η λ, ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι. ὥστε ἐπεὶ αἱ ζ λ, κ μ, ἐπιζευγνύουσι τὰς ζ κ, λ μ, παραλλήλους, παράλληλοι καὶ αὐταί εἰσι κατὰ τὴν λγ΄. τὸ ζ μ, ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν τὸ ζ θ, ἴσον γέγονε τῷ α β γ, τριγώνῳ, τὸ δὲ η μ, τῷ α δ γ. τὸ ὅλον δήπουθεν ζ μ, ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ δ, εὐθυγράμμῳ. ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑπὸ ζ κ θ, γωνίαν ἴσην τῇ ε, καὶ δέδειται εἶναι παραλληλόγραμμον. τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ καὶ τ᾽ ἑξ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

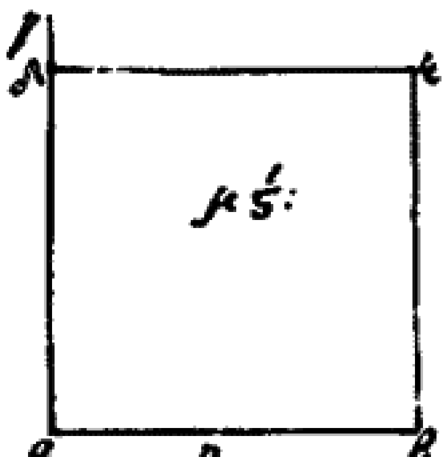
Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι κἂν δύο ὦσι τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα, καὶ ζητηθῇ συςαθῆναι παραλληλόγραμμον ἴσον συναμφοτέροις τοῖς δοθεῖσιν, ἔξεςι διὰ τῆς αὐτῆς ἐφόδου τὸ προςαττόμενον ποιεῖν, διαιροῦσι δ. τὰ δοθέντα εἰς τρίγωνα, εἰς ὅσα ἂν διαιρῆται. ὁμοίως κἂν πλείω ᾖ.

Πρότασις Μϛ΄. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

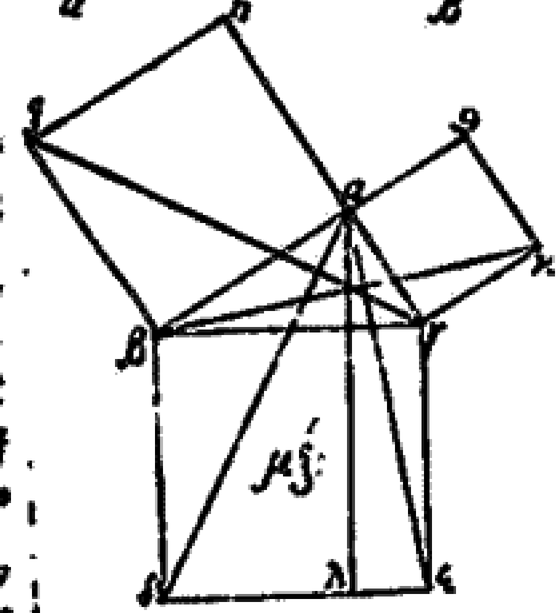
Ἔςω ἀναγράψαι τετράγωνον ἀπὸ τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας. Ἀνεςάθω δὲ ἀπὸ τοῦ α, σημείου κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ αγ, εὐθεῖα κατὰ τὴν ια΄. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αγ, ἡ αδ, ἴση τῇ αβ, κατὰ τὴν γ΄. εἶτα ἀπὸ τοῦ δ, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ δε. ἀπὸ δὲ τοῦ β, ὁμοίως παράλληλος τῇ αδ, ἤχθω ἡ βε, καὶ τὸ αε, ἔςαι τετράγωνον. κατὰ γὰρ τὴν κατασκευὴν παραλληλόγραμμόν ἐςιν. ὥςε αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν λδ΄. ἀλλὰ τῶν μὲν πρὸς τοῖς α, καὶ δ, γωνιῶν ἑκατέρα ὀρθή ἐςι κατὰ τὴν κθ΄. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ αβ, αδ, πλευραὶ ἴσαι, ἄρα καὶ αἱ πρὸς τοῖς ε, καὶ β, αὐτοῦ γωνίαι ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ δε, εβ, λοιπαὶ πλευραὶ ἴσαι ταῖς δα, αβ, καὶ ἀλλήλαις. τὸ αε, ἄρα ἰσόπλευρόν τέ ἐςι καὶ ὀρθογώνιον. τὸ δὲ τοιοῦτον τετράγωνον. τὸ αε, ἄρα τετράγωνόν ἐςιν. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 36.



Πρότασις ΜΖ΄. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.



Τοῦ αβγ, ἤδη τριγώνου τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας ὀρθῆς οὔσης, καὶ ἀπὸ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν τετραγώνων γραφομένων τῶν βη, βε, γθ. Λέγω τὸ βε, ἴσον εἶναι τοῖς δυσὶ βη, γθ. Ἀπὸ γὰρ τοῦ α, σημείου, τῆς αλ, παραλλήλου τῇ βδ, ἢ γε, ἀχθείσης, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν αδ, αε, γζ, βκ. ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βαγ, βαη, εἰσὶν ὀρθαί, πάντως γε ἡ αη, ἐπ' εὐθείας ἐςὶ τῇ αγ, κατὰ τὴν ιδ΄. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ θα, ἐπ' εὐθείας ἐςὶ τῇ αβ. ὥςε ἡ μὲν ηγ, παράλληλός ἐςι τῇ ζβ, ἡ δὲ βθ, τῇ γκ. ἀλλ' ἐπεὶ αἱ ζβα, δβγ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ ἑκατέραν ὀρθὴν εἶναι. κοινῆς προςκειμένης τῆς αβγ, ἔσονται αἱ ὑπὸ ζβγ, δβα, ἴσαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ γβ, βζ, ἴσαι δυσὶ ταῖς δβ, βα, ἄρα κατὰ τὴν δ΄. καὶ ἡ ζγ, βάσις τοῦ ζβγ, τριγώνου ἴση ἐςὶ τῇ αδ, βάσει τοῦ αβδ, τριγώ-

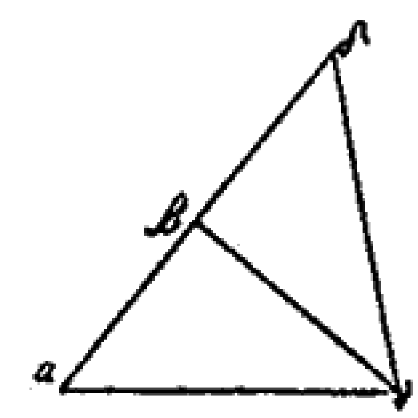
τριγώνου, καὶ ὅλον τὸ ζβγ, τρίγωνον, ὅλῳ τῷ αβδ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ ζα, παραλληλόγραμμον τὴν αὐτὴν ζβ, βάσιν ἔχει τῷ ζβγ, τριγώνῳ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶ παραλλήλοις ταῖς ζβ, ηγ, πάντως γε καὶ τὴν μα. διπλάσιόν ἐστι τὸ ζα, παραλληλόγρ. τοῦ ζβγ, τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ βλ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον εἶναι τοῦ αβδ, τριγώνου, ἐπεὶ τὴν αὐτὴν βδ, βάσιν ἄμφω ἔχουσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις ταῖς βδ, αλ. ἀλλὰ τὸ ζβγ, τρίγωνον ἴσον δέδεικται τῷ αβδ, ἄρα τὰ βη, βλ, παραλληλόγραμμα διπλάσιά ἐστιν ἑκάτερον τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως ἴσα κατὰ τὸ ϛ'. ἀξίωμα. τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὸ γθ, ἴσον εἶναι τῷ γλ, ὥστε ὅλον τὸ βε, ἰσόν ἐστι τοῖς βη, γθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΜΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστιν.

Ἔστω δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πλευρᾶς τετράγωνον τοῦ αβγ, τριγώνου, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετραγώνοις. Λέγω τὴν ὑπὸ αβγ, γωνίαν ὀρθὴν εἶναι. εἰ γὰρ ἡ βδ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βγ, σταθεῖσα, ἴση τῇ αβ, ληφθῇ, καὶ ἡ δγ, ἐπιζευχθῇ, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τετράγωνον ἰσόν ἐστι κατὰ τὴν αὐωτέρω τοῖς ἀπὸ τῶν δβ, βγ, τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς αὐτοῖς τετραγώνοις ἰσόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τετράγωνον ἰσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἑπομένως ἡ δγ, ἴση ἐστὶ τῇ αγ. ἐπεὶ οὖν τὰ αβγ, γβδ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς αβ, βγ, ἴσας δυσὶ ταῖς δβ, βγ, καὶ βάσιν τὴν αγ, βάσει τῇ γδ, ἴσην, ἕξουσι πάντως, καὶ τὴν ὑπὸ αβγ, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ γβδ, κατὰ τὴν η. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γβδ, ὀρθή ἐστιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 37.



Τέλος τοῦ Πρώτου Βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου.

Προοιμιακὴ περίληψις τοῦ Δευτέρου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Τὸ ἀνὰ χεῖρας τοῦτο Βιβλίον τῷ μὲν μεγέθει μικρὸν δοκεῖ, τῇ δ' ἐξοχότητι καὶ λυσιτελείᾳ τῶν αὐτοῦ θεωρημάτων, καὶ ἱκανῶς μέγα. καὶ τοῖς νέοις, οἶδα ὃ λέγω, δυσκατάληπτον μυστήρια διδάσκειν δοκοῦσιν. ἀλλ' οὖν ἐπὶ τὰ πρόσω προβεβηκότες, καὶ ἐπιμελῶς ἀναπολοῦντες, ῥᾶστα κατανοήσονται. Αἱ γὰρ παραλαμβανόμεναι ἐν αὐτῷ ἀποδείξεις, σχεδὸν πᾶσαι ἐπερείδονται τῷ σαφεστάτῳ ἀξιώματι, Τὸ ὅλον δηλ. ἴσον τοῖς ἰδίοις μέρεσιν. ὅθεν μὴ ἀπογνώσωνται, εἰ τῇ πρώτῃ βολῇ ἐντελῶς καταλαμβάνειν αὐτοῖς δυσχερές. ἡ γὰρ περὶ τὰ τοῦ ἐπανάληψις σφόδρα ἐκπλαγῆναι αὐτοὺς ποιήσει, πῶς τὰ οὕτω σαφῆ, πάλαι δυσκατάληπτα ἐδόκει;

Πραγματεύεται δὲ ἐπὶ τοῦ παρόντος Δευτέρου Βιβλίου ὁ Στοιχειωτὴς περὶ δυνάμεως τῶν εὐθειῶν γραμμῶν, τοῦτ' ἔστι τῶν τετραγώνων. παραβάλλει τὰ ἐκ τῶν μερῶν τῶν γραμμῶν, ἢ διχοτομουμένων, ἢ ἄλλως πως διαιρουμένων, ἀναφαινόμενα ὀρθογώνια, τοῖς ὀρθογωνίοις καὶ τετραγώνοις τῶν ὁλικῶν γραμμῶν. Τὸ μέρος τοῦτο τῶν Στοιχείων λυσιτελέστατον πάντως γε, μάλιστα δ' ὄντως θεμέλιον τῶν χρειωδεστέρων Ἀλγεβραϊκῶν πράξεων. Αἱ μὲν τρεῖς πρῶται προτάσεις ἀποδεικτικαὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἡ δὲ τετάρτη τῇ ἐξαγωγῇ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τὰς ἀρχὰς παρέχει. ὥσπερ καὶ αἱ ἑπόμεναι, πέμπτη, ἕκτη, ἑβδόμη, καὶ ὀγδόη, ταῖς τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου πράξεσι. Τὰ δὲ λοιπὰ θεωρήματα Τριγωνομετρικοῖς μᾶλλον λυσιτελῆ.