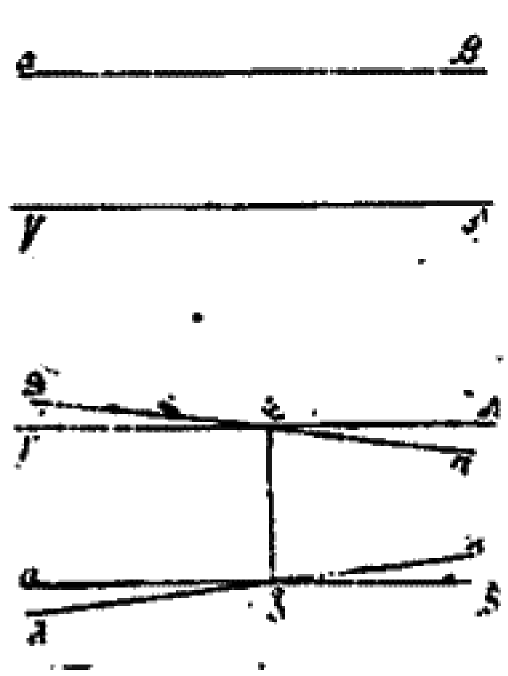
ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη μηδὲ συμπίπτειν, ὡς αἱ αβ, γδ. ἑνὸς γὰρ ἐλλείποντος, τὸ παραλλήλους εἶναι οὐχ ἕξουσι. καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν ὅρων ἑρμηνείας κατὰ Πρόκλον τὸν διάδοχον ἀρκείσθω ἡμῖν. Τὰ Αἰτήματα δὲ καὶ Ἀξιώματα ἐκκείσθωσαν ἐπὶ τοῦ παρόντος, ὡς καὶ παρὰ τοῦ Εὐκλείδου διάκεινται. τὰ μὲν γὰρ καθ' αὑτὰ τὸ γνωστὸν ἔχει, τὰ δὲ λαμβάνονται μόνον, ὡς εἰς κατασκευὴν τινων συμβάλλοντα, ὡς προείρηται. μετὰ δὲ τὰ Αἰτήματα, καὶ Ἀξιώματα, ἡ τῶν προτάσεων ἑρμηνεία ἀμέσως τεχθήσεται. συνεκτικωτέρα μέντοι τῆς παρὰ τοῦ Εὐκλείδου· σεσημειωμένων ἐν ἑκάστῃ προτάσει, τῶν τε ὅρων, ἀξιωμάτων, καὶ προτάσεων, δι' ὧν δείκνυται. καὶ τοῦτο εἰς ῥᾳοτέραν τῶν ἀρχομένων κατάληψιν.

Eucl. Lib. 1. Fig. 11.



ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Α'. Ἠτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

Γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Κοιναὶ ἔννοιαι, ἤτοι Ἀξιώματα.

Α'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

Δ'. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

Ε'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

ϛ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Ζ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Η'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Θ'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

Ι'. Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

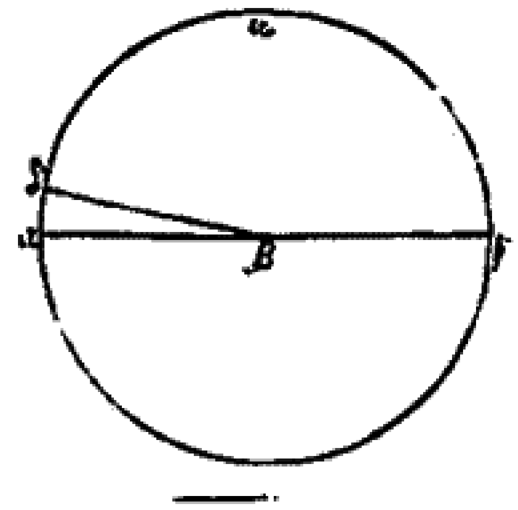
ΙΑ'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας (οἷον τὰς ηθ, κλ,) εὐθεῖα ἐμπίπτουσα (ἡ εζ.) τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ὡς τὰς ὑπὸ ηεζ, κζε. ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

ΙΒ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι.

ΙΓ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι κοινὸν τμῆμα οὐκ ἔχουσιν.

Παρὰ τὰ ιβʹ. ἐν τῷ Εὐκλ. εὑρισκόμενα Ἀξιώματα, τάτε Αἰτήματα καὶ τοὺς Ὅρους, τίθεται Ἀρχὴ μαθηματικὴ καὶ ἡ λέγουσα, Καὶ δύο εὐθεῖαι κοινὸν τμῆμα οὐκ ἔχουσιν, ἣν φησι Πρόκλος ἐν τοῖς αἰτήμασι τακτέον. ὁ δὲ τοῦ αὐτῆς τρόπος ἐστιν, ὅτι ἐὰν εὐθεῖά τις καθ᾽ ἓν μέρος μόνον ἐφαρμοσθῇ ἑτέρᾳ τινὶ εὐθείᾳ, ἅπασα ἐφαρμοσθήσεται· διὰ τὸ ἐξ ἴσου τὴν εὐθεῖαν τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖσθαι, οὐ μὴν δὲ μέρος μὲν ταύτης ἐφαρμοσθήσεται, ἡ δὲ λοιπὴ οὔ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐφαρμοσθήτω ἡ δβγ, εὐθεῖα ἐπὶ τῆς αβγ, καὶ τοῦ μὲν βγ, αὐτῆς μέρους ἐφαρμοττομένου, τὸ λοιπὸν βδ, ἀφάρμοστον μενέτω. ὥστε εἶναι τῶν αβγ, καὶ δβγ, εὐθειῶν κοινὸν τμῆμα τὸ βγ. κέντρῳ μὲν δὲ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα, κύκλος γεγράφθω ὁ αδεγ. καὶ ἐπεὶ ἡ δβγ, εὐθεῖα διὰ τοῦ

Eucl. Lib. 1. Fig. 12.



κέντρου διέρχεται, διάμετρός ἐστι κατὰ τὸν ιϛʹ. ὅρον, καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον· ὥστε τὸ δεγ, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἔσται καὶ τὸ αεγ, ἡμικύκλιον, ὅτι καὶ ἡ αβγ, διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται, ὥστε τὸ δεγ, ἴσον ἐστὶ τῷ αεγ, ὅπερ ἀδύνατον. ὑπερέχει γὰρ τὸ αεγ, τοῦ δεγ, τῷ αδ, τόξῳ.

ΙΔʹ. Καὶ τὸ ὅλον ἴσον τοῖς ἰδίοις μέρεσι.

Περίληψις τοῦ Πρώτου Βιβλίου Εὐκλείδ.

Ἐπὶ τοῦ παρόντος Πρώτου Βιβλίου ὁ Εὐκλείδης ἐν τῇ ἐκθέσει τῶν ὅρων, πραγματεύεται περὶ τῶν γραμμῶν, καὶ τῶν ἐκ τούτων ποικίλως πως ἀλλήλαις συντρεχουσῶν, ἀναφυομένων γωνιωδῶν, καὶ μὴν, σχημάτων. τούτοις ἐπιφέρει τὰ Αἰτήματα, καὶ Ἀξιώματα. οἷς εἶτεν κλεισὶ κεχρημένος ἐπὶ τὴν ἀπόδειξιν χωρεῖ τῶν προτάσεων. ὧν ἐπὶ μὲν τῶν ὀκτὼ πρώτων περὶ τῶν ἐπιπέδων πραγματεύεται τριγώνων, τὴν φύσιν αὐτῶν ἀναπτύσσων. μετὰ ταύτας δὲ περὶ τοῦ διχοτομεῖν γωνίας τε καὶ γραμμὰς, καὶ καθέτους ἀνορθοῦν, ἢ καθιέναι τὴν μέθοδον παραδίδωσιν. ἐπὶ τούτοις τὰ λοιπὰ τῶν τριγώνων πάθη καὶ παραλλήλων, μεθ᾽ ἃ καὶ τὰς τῶν τετραπλεύρων καὶ παραλληλογράμμων ἰδιότητας, θεωρεῖ, ἀποδεικνύων τίνι λόγῳ τὰ πολύγωνα, καὶ μὴ κανονικὰ σχήματα δύναται ἀνάγεσθαι εἰς ὀρθογώνια, ἤτοι παραλληλόγραμμα, ἢ τρίγωνα, σαφέστερα ἀμέλει καὶ κανονικά. καὶ τέλος ἐπιτίθησι τῷ λόγῳ, τῷ πολυθρυλλήτῳ Πυθαγορείῳ θεωρήματι τῆς ἑκατόμβης ἀκηκοίας προτάσεως, παρὰ τὸ ἑκατὸν θῦσαι βόας ἐπὶ τῇ ταύτης εὑρέσει.

Αἱ χρησιμώτεραι δὲ ταῖς ἐπιστήμαις προτάσεις, ὑπὲρ ὧν ὁ ἅπας γίνεται λόγος, εἰσὶν αὗται, ἡ λβʹ. λεʹ. λζʹ. μαʹ. μδʹ. μεʹ. καὶ μζʹ.

ΕΡΜΗ-

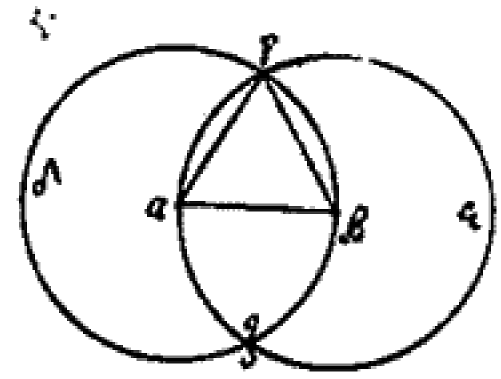
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΥΝΤΟΜΩΤΕΡΑ ΤΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ.

Πρότασις Πρώτη. Πρόβλημα.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

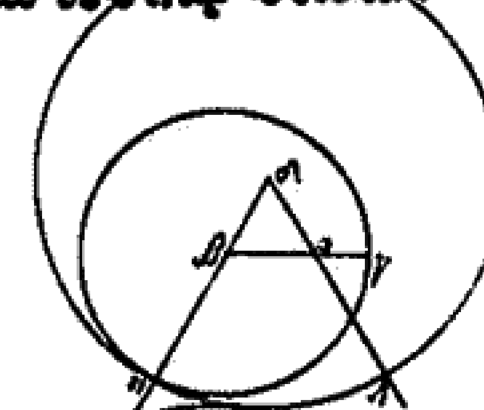
Ἐπὶ τῆς α β, ἤδη εὐθείας ἔστω τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. κέντροις μὲν οὖν τοῖς α β, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ α β, κύκλοι γραφήτωσαν οἱ γ δ ζ, γ ε ζ, τεμνόμενοι κατὰ τὰ γ, καὶ ζ, σημεῖα. καὶ παρὰ τοῦ γ, εὐθειῶν ἀγομένων τῶν γ α, γ β, ἔσται σοι τὸ ἐπιταχθέν. καὶ γὰρ αἱ γ α, γ β, ἴσαι οὖσαι ἑκατέρα τῇ α β, κατὰ τὸν ιε΄. ὅρον, ἴσαι καὶ ἀλλήλαις ἔσονται, κατὰ τὸ α΄. ἀξίωμα. τὸ α β γ, ἄρα τρίγωνον ἰσόπλευρόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

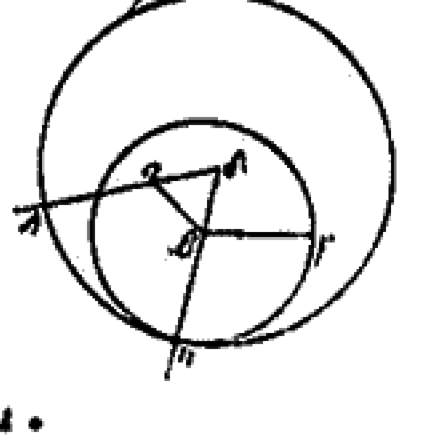
Eucl. Lib. 1. Fig. 13.



Πρότασις Δευτέρα. Πρόβλημα.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.





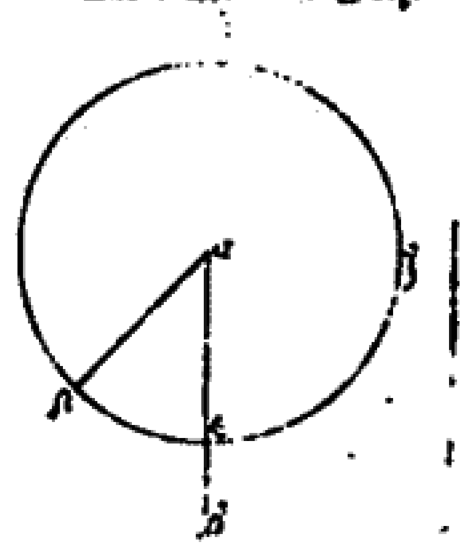
Δοθείσης ἤδη εὐθείας μὲν τῆς β γ, σημείου δὲ τοῦ α, εἴτ' ἐπ' αὐτῆς, εἴτ' ἐκτὸς ταύτης, ἔστω πρὸς τῷ α, σημείῳ τῇ β γ, εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. ἐπὶ τῆς α β, τοίνυν εὐθείας, κειμένης, ἢ νῦν ἀγομένης, συνιστάσθω διὰ τῆς ἀνωτέρω τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ α β δ. αἱ δὲ τούτου πλευραὶ δ β, δ α, ἐπ' ἄπειρον ἐξαχθήτωσαν. δύο δὲ κύκλων, κέντροις μὲν τοῖς β, καὶ δ, διαστήμασι δὲ τοῖς β γ, καὶ δ η, περιγραφομένων, ἔσται ἡ α λ, ἴση τῇ β γ. ἡ γὰρ δ λ, ἴση ἐστὶ τῇ δ η, κατὰ τὸν ιε΄, ὅρον. καὶ τῶν δ β, δ α, ἴσων εὐθειῶν ἀφαιρεθεισῶν, ἐγκαταλείπεται ἡ α λ, ἴση τῇ β η, κατὰ τὸ γ΄. ἀξίωμα. ἐπεὶ δὲ τῇ β η, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ β γ, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου. ἄρα καὶ ἡ α λ, ἴση ἐστὶ τῇ β γ, κατὰ τὸ α΄. ἀξίωμα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Τρίτη. Πρόβλημα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

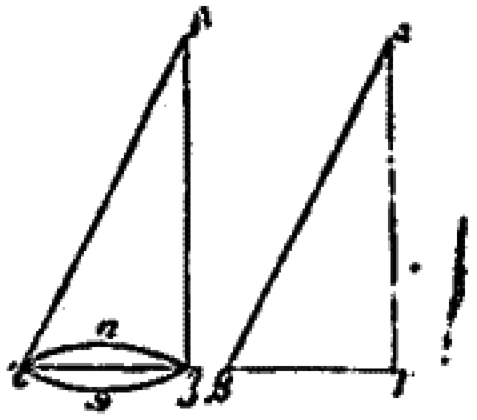
Eucl. Lib. 1. Fig. 14.

Έστω δὲ ἀπὸ μείζονος τῆς αβ, ἴσην εὐθεῖαν τῇ ἐλάττονι γ, ἀφελεῖν. κείσθω τοίνυν ἡ αδ, ἴση τῇ γ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ, κύκλος γεγράφθω, ὁ δεζ, τέμνων τὴν αβ, κατὰ τὸ ε. τούτου γὰρ γενομένου, ἔσται ἡ αε, ἴση τῇ δοθείσῃ γ. ἐπεὶ γὰρ αἱ αε, καὶ γ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ αδ, ἡ μὲν ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ἀλλήλαις ἄρα εἰσὶν ἴσαι κατὰ τὸ α. ἀξίωμα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρότασις Τετάρτη. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι.



Τριγώνων ἤδη τῶν αβγ, δεζ, ἐχόντων τὴν μὲν αβ, πλευρὰν τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, ἴσην, καὶ τὴν πρὸς τῷ α, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ δ, ὁμοίως ἴσην. ἔσται δήπουθεν καὶ ἡ βγ, βάσις ἴση, τῇ εζ, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον αβγ, ὅλῳ τῷ δεζ, τριγώνῳ. καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ β, γωνία τῇ πρὸς τῷ ε, ἡ δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση. τοῦ γὰρ αβγ, τριγώνου ἐφαρμοττομένου τῷ δεζ, ἐφαρμοσθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία τῇ πρὸς τῷ δ, ὥστε καὶ ἡ αβ, πλευρὰ ἐφαρμοσθήσεται τῇ δε, πλευρᾷ, καὶ ἡ αγ, τῇ δζ, κατὰ τὸ ιγ΄. ἀξίωμα. τούτων δ' οὕτω ἐκκειμένων, ἀνάγκη ἐφαρμοσθῆναι καὶ τὴν βγ, τῇ εζ. εἰ γὰρ μή, ἢ ἐντὸς ὡς ἡ εηζ, πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς ὡς ἡ εθζ. καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ ιβ΄. ἀξίωμα. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς καὶ τὰ ἑξῆς, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

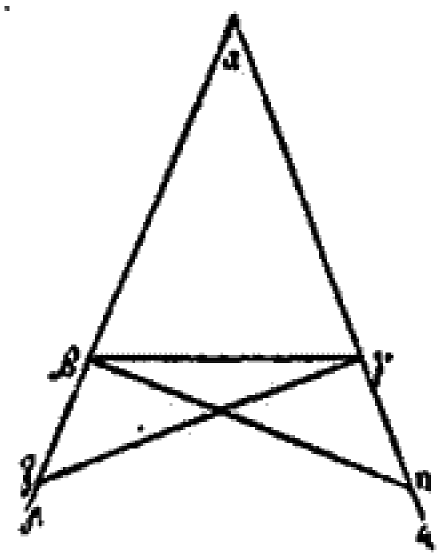
Πρό-

Πρότασις Πέμπτη. Θεώρημα.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Τριγώνου ἤδη τοῦ α β γ, ἰσοσκελοῦς, λέγω, ὅτι αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, αἱ ὑπὸ α β γ, α γ β. ἴσαι εἰσι. καὶ ἐξαγομένων τῶν α β, α γ, πλευρῶν πρὸς τὰ δ, καὶ ε, ἔσονται πάντως ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, αἱ ὑπὸ β γ ε, γ β δ. εἰλημμένων γὰρ τῶν β ζ, γ η, ἴσων, καὶ τῶν β η, γ ζ, ἠγμένων εὐθειῶν ἄμφω δειχθήσεται. Ἐπεὶ γὰρ τῶν α β η, α γ ζ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ α β, α η, ἴσαι εἰσι, δυσὶ ταῖς α γ, α ζ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία κοινή, ἄρα καὶ αἱ β η, γ ζ, βάσεις ἴσαι ἔσονται κατὰ τὴν αὐτέρω. καὶ ἡ μὲν ὑπὸ α β η, γωνία τῇ ὑπὸ α γ ζ, ὁμοίως ἴση. ἡ δὲ ὑπὸ β η α, τῇ ὑπὸ γ ζ α. αὖθις ἐπεὶ τῶν β γ η, γ β ζ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ β ζ, ζ γ, ἴσαι εἰσι δυσὶ ταῖς γ η, η β, καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ, γωνία τῇ πρὸς τῷ η, ὡσαύτως ἴση. ἔστι δ' ἔτι καὶ ἡ β γ, βάσις κοινή, ἄρα καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ἰσόν ἐστι κατὰ τὴν αὐτέρω. καὶ ἡ μὲν ὑπὸ γ β ζ, γωνία τῇ ὑπὸ β γ η, ἴση, αἵτινές εἰσιν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, ἡ δὲ ὑπὸ β γ ζ, τῇ ὑπὸ γ β η. προδέδεικται δὲ εἶναι καὶ ἡ ὑπὸ α β η, ἴση τῇ ὑπὸ α γ ζ. ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ μὲν τῆς α β η, τῆς γ β η, ἀπὸ δὲ τῆς α γ ζ, τῆς β γ ζ, ἐγκαταλειφθήσονται κατὰ τὸ γ. ἀξίωμα, καὶ αἱ ὑπὸ α β γ, καὶ α γ β, γωνίαι ἴσαι, καὶ αὗταί εἰσιν αἱ πρὸς τῇ βάσει. τῶν ἰσοσκελῶν ἄρα τριγώνων καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

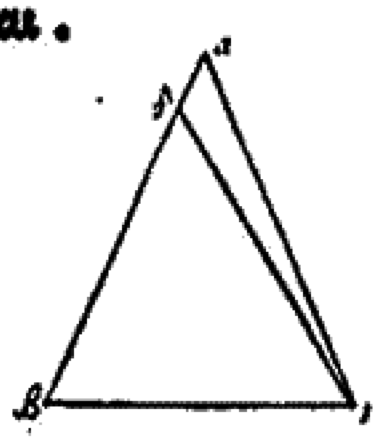
Eucl. Lib. 1. Fig. 15.



Πρότασις Ἕκτη. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστωσαν δὴ τριγώνου τοῦ α β γ, αἱ δύο γωνίαι, ἤτοι ὑπὸ α β γ, καὶ ἡ ὑπὸ α γ β, ἴσαι. λέγω, ὅτι καὶ αἱ ταύτων ὑποτείνουσαι αἱ α β, α γ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. εἰ γὰρ μή, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἔσται. ἔστω παραδειγματικῶς, ἡ α β, μείζων τῆς α γ. καὶ κατὰ τὴν γ'. τοῦ παρόντος ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς α β, ἡ δ β, ἴση τῇ α γ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δ γ. τὰ δύο ἄρα τρίγωνα δ β γ, α γ β, ἐπείπερ ἔχουσι τὰς δύο πλευ-



ρὰς δβ, βγ, ἴσας δυσὶ ταῖς αγ, γβ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ δβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αγβ, ἴσην, ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται κατὰ τὴν δ'. τοῦ αὐτοῦ. ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ θ'. ἀξιώμα. ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι καὶ τ'ἑξ.

ΠὈΡΙΣΜΑ.

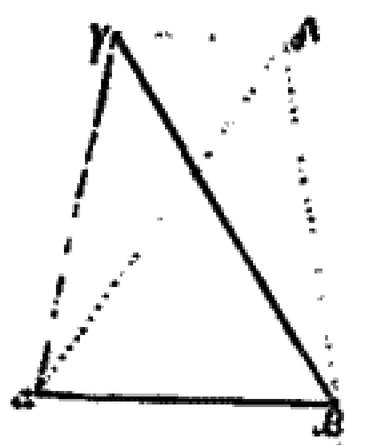
Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι πᾶν τρίγωνον ἰσόπλευρον, καὶ ἰσογώνιόν ἐστι, καὶ τὸ ἰσογώνιον, ἰσόπλευρον.

Πρότασις Ἑβδόμη. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, οὐ συςαθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Ἐπὶ τῆς αβ, τοίνυν εὐθείας, ἐφ' ἧς συνεςήκασιν αἱ γα, γβ. ἀδύνατον συςαθῆναι ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς γα, γβ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ἐκείναις. εἰ γὰρ δυνατὸν συνεςάθωσαν αἱ δα, δβ. πρὸς ἄλλῳ σημείῳ τῷ δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐφ' ἃ καὶ αἱ γα, γβ, εἰσὶ, τὰ αὐτὰ ἔχουσαι ἐκείναις πέρατα τὰ α, καὶ β. καὶ ἔςω ἡ μὲν δα, ἴση τῇ γα, ἡ δὲ δβ, τῇ βγ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ γδ. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἡ μὲν δα, ἴση ἐςὶ τῇ γα, ἡ δὲ δβ, τῇ γβ. πάντως γε τὰ γαδ, γβδ, τρίγωνα ἰσοσκελῆ εἰσι, καὶ κατὰ τὴν ε'. τοῦ παρόντος, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ αγδ, γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ αδγ, ἡ δὲ ὑπὸ βδγ, τῇ ὑπὸ βγδ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐςὶ τῆς ὑπὸ αδγ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βγδ, ἡ ἴση τῇ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐςὶ τῆς ὑπὸ αδγ. ἴση δὲ τῇ ὑπὸ αδγ, δέδεικται ἡ ὑπὸ αγδ. ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, μείζων ἐςὶ καὶ τῆς ὑπὸ αγδ, τὸ μέρος τοῦ ὅλου, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ θ'. ἀξιώμα. ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἄρα εὐθείας δυσὶ καὶ τ'ἑξ.

Eucl. Lib. 1. Fig. 16.



ΠὈΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι δύο τρίγωνα ἴσα, ἰσόπλευρα, ἢ ἰσοσκελῆ οὐ δυνατὸν συςαθῆναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, καὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

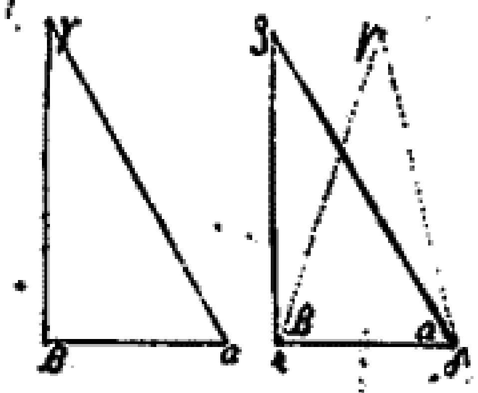
Πρό-

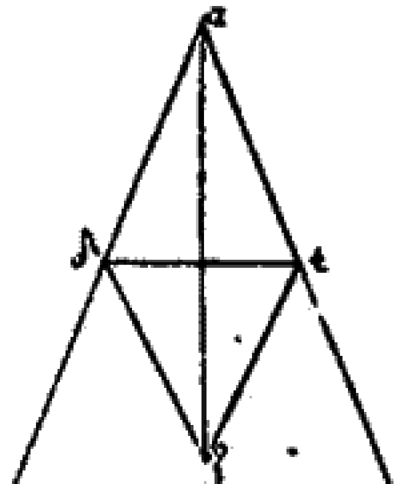
Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Τρίγωνα ἤδη τὰ αβγ, δεζ, ἐχέτωσαν τὴν μὲν γα, πλευρὰν ἴσην τῇ ζδ. τὴν δὲ γβ, τῇ ζε, καὶ τὴν αβ, βάσιν τῇ δε, βάσει. λέγω, ὅτι τὰ αὐτὰ τρίγωνα ἔχουσι καὶ τὴν πρὸς τῷ γ, γωνίαν, ἴσην τῇ πρὸς τῷ ζ. καὶ ὅλον τὸ αβγ, τρίγωνον, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ δεζ, τριγώνῳ. ἐφαρμοττομένης γὰρ τῆς αβ, βάσεως τοῦ αβγ, τριγώνου ἐπὶ τῆς δε, πεσεῖται τὸ μὲν α, πέρας ἐπὶ τῷ δ, τὸ δὲ β, ἐπὶ τῷ ε, καὶ ἑπομένως ἡ αγ, ἐφαρμοσθήσεται ἐπὶ τῆς δζ, ἴσης αὐτῇ, καὶ ἡ γβ, πλευρὰ ἐπὶ τῆς εζ. ὥστε καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία ἐφαρμοσθήσεται τῇ πρὸς τῷ ζ. εἰ γὰρ μή, ἀλλ' ἡ μὲν πρὸς τῷ γ, πρὸς ἄλλῳ ἔσται σημείῳ, ἡ δὲ πρὸς τῷ ζ, πρὸς ἄλλῳ, συσταθήσονται πάντως ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας αβ, ἢ δε, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ὡς εἰπεῖν, δζ, εζ, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι αἱ αγ, βγ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἄτοπον καὶ τὴν αἰτίαν. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 17.





Πρότασις Θ'. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

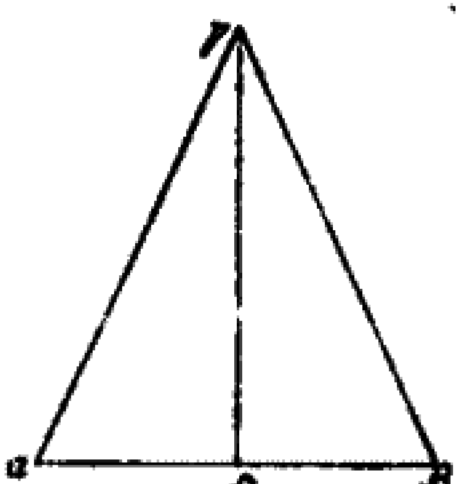
Ἔστω οὖν δίχα τεμεῖν τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίαν, καὶ ληφθήτωσαν ἴσα διαστήματα τὰ αδ, αε. ἐπιζευγνυμένης δὲ τῆς δε, εὐθείας, συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ δζε, κατὰ τὴν α. εἶτα ἐπεζεύχθω ἡ αζ, καὶ διαιρεθήσεται δίχα ἡ ὑπὸ βαγ, δοθεῖσα γωνία. τὰ γὰρ δαζ, καὶ εαζ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν αἰτίαν, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν ὑποτεινομένας γωνίας ἴσας ἔχουσιν. ὥστε ἡ ὑπὸ δαζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εαζ, διὰ τὸ καὶ τὴν δζ, ἴσην εἶναι τῇ εζ. ἡ δοθεῖσα ἄρα γωνία δίχα τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Ι′. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἔστω δὴ δίχα τεμεῖν τὴν αβ, πεπερασμένην εὐθεῖαν, καὶ συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον, διὰ τῆς ά. τὸ αγβ. εἶτα διαιρεθήτω ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία δίχα, διὰ τῆς ἀνωτέρω, τῇ γδ, εὐθείᾳ, καὶ τμηθήσεται πάντως δίχα καὶ ἡ αβ. ἐπεὶ γὰρ τὰ αγδ, βγδ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς αγ, γδ, ἴσας δυσὶ ταῖς βγ, γδ, καὶ τὴν ὑπὸ αγδ, γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ βγδ, ἔσται δήπουθεν ἴση καὶ βάσις ἡ αδ, βάσει τῇ βδ, κατὰ τὴν δ′. ἡ δοθεῖσα ἄρα αβ, εὐθεῖα δίχα τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

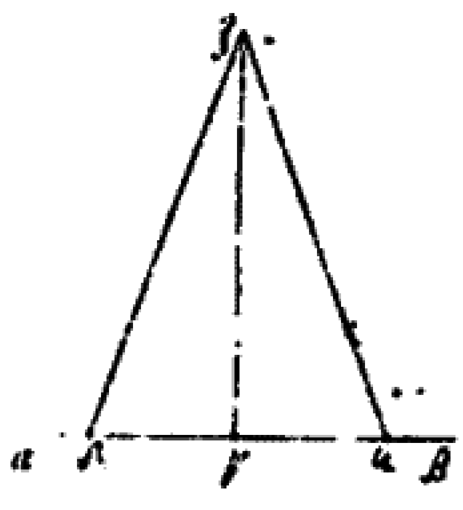
Eucl. Lib. 1. Fig. 18.



Πρότασις ΙΑ′. Πρόβλημα.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω δὴ ἡ αβ, εὐθεῖα, καὶ σημεῖον πρὸς αὐτῇ τὸ γ, ἀφ' οὗ τὴν κάθετον δέον ἀνεστάθαι. ληφθήτωσαν ἐπὶ τῆς αβ, τὰ γδ, γε, διαστήματα ἴσα, καὶ συνεστάθω διὰ τῆς ά. τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐπὶ τῆς δε, τὸ δζε. εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ ζγ, ἣν δὴ λέγω κάθετον εἶναι. τῶν γὰρ δζγ, εζγ, τριγώνων τὰς δγ, γζ, πλευρὰς ἴσας ἐχόντων ταῖς εγ, γζ, καὶ τὴν ζδ, βάσιν τῇ ζε, ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ δγζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εγζ, κατὰ τὴν η′. ἄρα κατὰ τὸν ί. ὅρον, ἡ ζγ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς αβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρότασις ΙΒ′. Πρόβλημα.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἢ ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω δὴ ἐπὶ τὴν αβ, δοθεῖσαν εὐθεῖαν κάθετον ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ γ, σημείου, τοῦ μὴ ἐπ' αὐτῆς. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ ε. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γε, γεγράφθω κύκλος ὁ εζδη, δίχα δὲ τῆς δε, τμηθείσης κατὰ τὸ θ, διὰ τῆς ί. ἐπιζεύχθω ἡ γθ, καὶ αὕτη κάθετος ἔσται ἐπὶ τῆς αβ. τῶν γὰρ

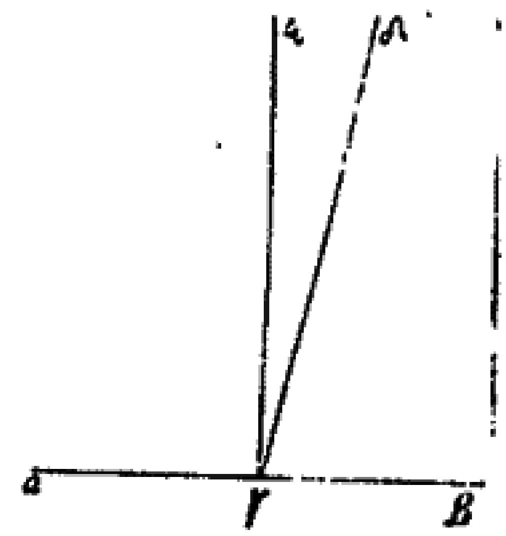
γδ,

γδ, γε, εὐθειῶν ἐπιζευγνυμένων, ἐπεὶ ἡ δθ, ἴση ἐστὶ τῇ θε, ἡ δὲ θγ, κοινὴ, καὶ ἡ γδ, ἴση τῇ γε, κατὰ τὸν ιε. ὅρον, πάντως γε τὰ δθγ, εθγ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν η. καὶ ἡ ὑπὸ δθγ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εθγ. ὥστε ἡ γθ, κάθετος ἐστὶ κατὰ τὸν ι. ὅρον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΙΓ΄. Θεώρημα.

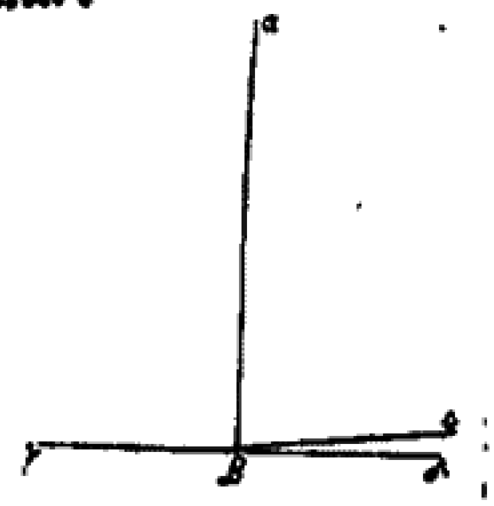
Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. *Eucl. Lib. 1. Fig. 19.*

Ἐπὶ τῆς αβ, ἤδη εὐθείας σταθεῖσα ἡ γδ, εἰ μὲν τὰς ὑπὸ δγα, δγβ, γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσῃ, κάθετος δήπουθεν ἔσται ἐπὶ τῆς αβ, κατὰ τὸν ι. ὅρον, καὶ αἱ ὑπὸ δγα, δγβ, γωνίαι ὀρθαί. εἰ δ' ἀνίσους, ἀχθήτω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ γε, ἀπὸ τοῦ γ, σημείου κατὰ τὴν ια. καὶ δειχθήσονται αἱ ὑπὸ δγα, δγβ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ βγδ, καὶ δγα, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ ταῖς τρισὶ γωνίαις τῇ ὑπὸ βγδ, δγε, εγα, ὡς περιεκτικαὶ αὐτῶν, ταῖς δὲ τρισὶ ταύταις γωνίαις ἴσαι εἰσὶν διὰ τὰ αὐτὰ, καὶ αἱ ὑπὸ βγε, εγα, δύο ὀρθαί. πάντως γε κατὰ τὸ α. ἀξίωμα αἱ ὑπὸ βγδ, δγα, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ βγε, εγα, δυσὶν ὀρθαῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΙΔ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ περὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

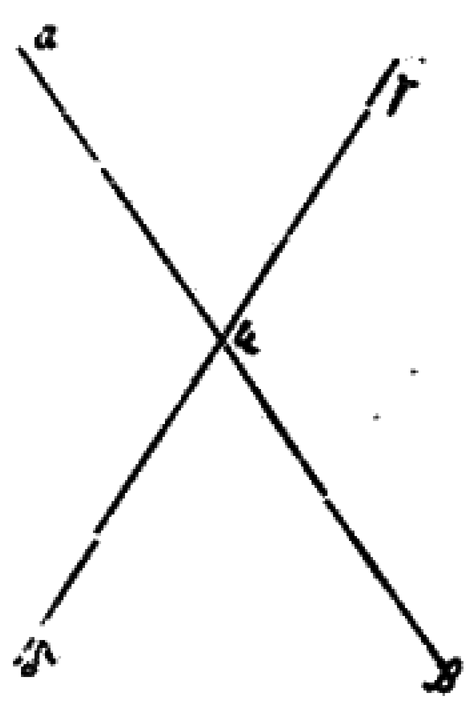


Πρὸς τῇ αβ, ἤδη εὐθείᾳ μὴ περὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι αἱ γβ, δβ, συντρεχέτωσαν πρὸς τῷ β, σημείῳ, ὥστε ποιεῖν τὰς ὑπὸ αβγ, αβδ, γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, ἢ ἔσονται αὗται ἐπ' εὐθείας. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ἡ εβ, ἐπ' εὐθείας τῇ γβ. καὶ ἐπεὶ ἐπὶ τῆς γβε, εὐθείας πέπτωκεν ἡ αβ, πάντως γε αἱ ὑπὸ γβα, αβε, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἦσαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ δβα, αβγ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα κατὰ τὸ α. ἀξίωμα αἱ ὑπὸ γβα, αβε, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ γ β α, α β δ· κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ γ β α, ἐγκαταλείπεται καὶ ἡ ὑπὸ α β ε, ἴση τῇ ὑπὸ α β δ· ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ θʹ. ἀξίωμα. ἄρα αἱ γ β, β δ, εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΕʹ. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 20.



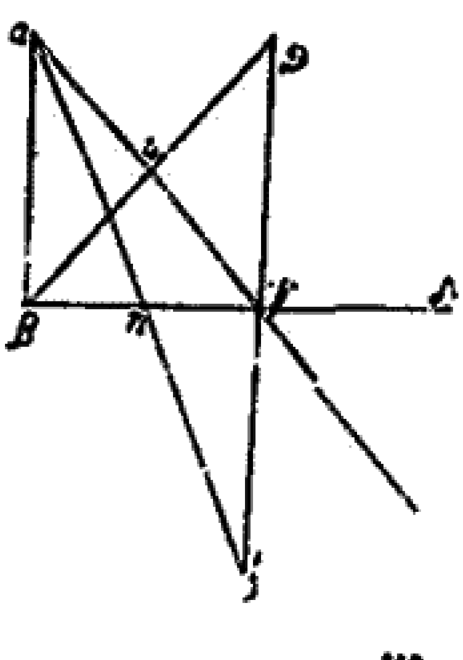
Τεμνέτωσαν ἤδη ἀλλήλας αἱ α β, γ δ, εὐθεῖαι κατὰ τὸ ε. λέγω, ὅτι αἱ κατὰ κορυφὴν αὐτῶν γωνίαι, αἵτε ὑπὸ α ε δ, γ ε β, καὶ αἱ ὑπὸ δ ε β, α ε γ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ αἱ α ε δ, δ ε β, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ιγʹ. εἰσὶ δὲ διὰ τῆς αὐτῆς καὶ αἱ δ ε β, β ε γ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, πάντως γε αἱ ὑπὸ α ε δ, δ ε β, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δ ε β, β ε γ, κατὰ τὸ αʹ. ἀξίωμα. κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ δ ε β, ἐγκαταλείπονται ἴσαι ἀλλήλαις αἱ ὑπὸ α ε δ, β ε γ, κατὰ τὸ γʹ. ἀξίωμα. τὸν αὐτὸν ἔτι τρόπον δειχθήσονται καὶ αἱ ὑπὸ δ ε β, α ε γ, ἴσαι. ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσι καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι.

Πρότασις Ιςʹ. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί.



Τῆς β γ, ἤδη πλευρᾶς τοῦ α β γ, τριγώνου ἐκβληθείσης ἐπὶ τὸ δ, ἡ ὑπὸ α γ δ, ἐκτὸς αὐτοῦ γωνία μείζων ἔσται ἑκατέρας τῶν ὑπὸ γ α β, α β γ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. τῆς γὰρ α γ, δίχα διαιρεθείσης κατὰ τὸ ε, διὰ τῆς ι. ἐξαχθήτω ἡ β ε, ἐπὶ τὸ θ. ὥστε τὴν β ε, ἴσην εἶναι τῇ ε θ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θ γ· καὶ ἐπεὶ τῶν ε α β, ε γ θ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ α ε, ε β, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς γ ε, ε θ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α ε β, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γ ε θ, κατὰ τὴν αὐτήν, πάντως γε καὶ ἡ α β, βάσις ἴση ἐστὶ τῇ θ γ, βάσει κατὰ τὴν δʹ. καὶ αἱ λοιπαὶ αὐ-

τῶν

τῶν γωνίαι ταῖς λοιπαῖς ἴσαι εἰσίν. ἔστιν ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ε β α, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ε θ γ, ἡ δὲ ὑπὸ ε α β, τῇ ὑπὸ ε γ θ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ α γ δ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ε γ θ, ἄρα ἡ ὑπὸ α γ δ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ ε α β. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ἡ ὑπὸ α γ δ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ α β γ, δίχα τῆς β γ, διαιρεθείσης κατὰ τὸ η, καὶ τῆς α η, ἐπὶ τὸ ζ, ἐξαχθείσης, τῆς δὲ κατασκευῆς ὡς καὶ ἀνωτέρω γενομένης. παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

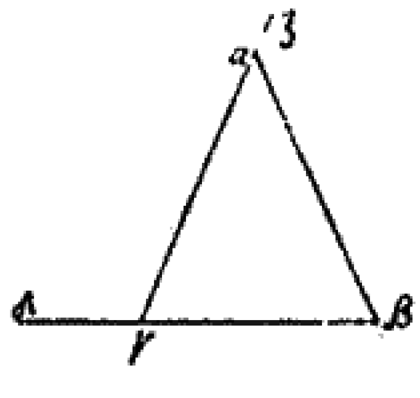
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς εὐθείας μὴ δύνασθαι πλείονας εὐθείας ἴσας ἄγεσθαι, ἢ δύο μόνας.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Τριγώνου ἤδη τοῦ α β γ, λέγω τὰς δύο γωνίας πάντῃ μεταλαμβανομένας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. εἰ γὰρ ἡ β γ, πρὸς τὸ δ, ἀχθῇ, ἔσονται αἱ ὑπὸ α γ β, α β γ, ἐλάσσονες τῶν ὑπὸ α γ δ, α γ β, διὰ τὸ τὴν μὲν ὑπὸ α γ δ, μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ α β γ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὴν δὲ ὑπὸ α γ β, κοινήν. αἱ δὲ ὑπὸ α γ δ, α γ β, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ιγ'. ἄρα αἱ ὑπὸ α γ β, α β γ, ἐλάσσονές εἰσι δύο ὀρθῶν. εἰ δὲ ἡ β α, ἀχθῇ κατὰ τὸ ε, δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον, τὰς ὑπὸ γ α β, γ β α, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. ὡσαύτως δὲ καὶ τῆς γ α, κατὰ τὸ ζ, ἀχθείσης, δειχθήσεται καὶ τὰς β α γ, β γ α, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 21.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α'. Ἐκ τούτου δῆλον, μὴ δύνασθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο καθέτους πίπτειν.

Β'. Ἔτι παντὸς τριγώνου, εἴπερ ἂν ἡ μία τῶν γωνιῶν ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα τύχῃ, τὰς λοιπὰς ὀξείας εἶναι.

Γ'. Ἔτι ἐὰν ἐπί τινος εὐθείας εὐθεῖα σταθεῖσα γωνίας ἀνίσους ποιῇ, τὴν παρά τινος σημείου τῆς ἐφεστηκυίας εὐθείας πίπτουσαν κάθετον ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης, πρὸς τὰ τῆς ὀξείας γωνίας πίπτειν μέρη.

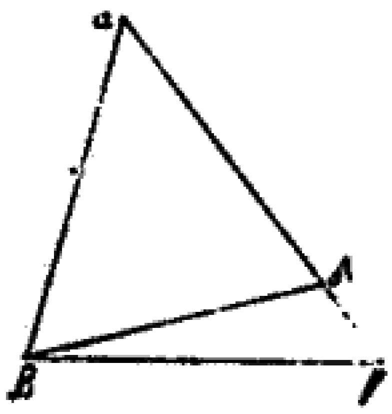
Δ'. Ἔτι τοῦ μὲν ἰσοπλεύρου τριγώνου πάσας τὰς γωνίας ὀξείας εἶναι, τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς τὰς δύο πρὸς τὴν βάσιν.

Πρότασις ΙΗ΄. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω δὴ τοῦ αβγ, τριγώνου ἡ αγ, πλευρὰ μείζων τῆς αβ, λέγω τὴν ὑπὸ αβγ, γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ αγβ· ἀφῃρήσθω γὰρ ἀπὸ τῆς αγ, ἴση τῇ αβ, ἡ αδ, κατὰ τὴν γ΄. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ αβδ, αδβ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ε΄. ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αβδ, κατὰ τὸ θ΄. ἀξίωμα. πάντως γε ἡ αὐτὴ ὑπὸ αβγ, μείζων ἐστὶν ἔτι καὶ τῆς ὑπὸ αδβ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ αδβ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αγβ, κατὰ τὴν ις΄. ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αγβ. ὅπερ ἦν τὸ προτεθέν.

Eucl. Lib. 1. Fig. 22.



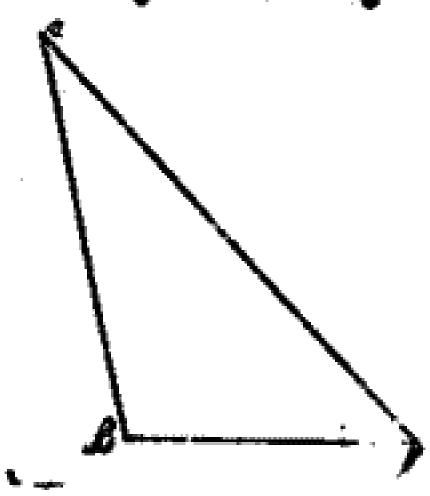
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, τοῦ μὲν σκαληνοῦ τριγώνου πάσας τὰς γωνίας ἀνίσους εἶναι, τοῦ δὲ ἰσοπλεύρου ἴσας.

Πρότασις ΙΘ΄. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω δὴ τοῦ αβγ, τριγώνου ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία μείζων τῆς ὑπὸ βγα. λέγω, ὅτι καὶ ἡ αγ, μείζων ἐστὶ τῆς αβ. εἰ γὰρ μή, ἡ ἴση ἔσται, ἢ ἐλάττων. εἰ μὲν οὖν ἴση, ἔσται ἴση καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ, κατὰ τὴν ε΄. ὑπετέθη δὲ μείζων, ἄτοπον ἄρα. εἰ δὲ ἡ αγ, ἐλάττων εἴη τῆς αβ, ἐλάττων ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, τῆς ὑπὸ αγβ, διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὅπερ πολλῷ μᾶλλον ἄτοπον, ὑπετέθη γὰρ ἴση. παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα καὶ τὰ ἑξῆς.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α΄. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῶν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐπί τινας εὐθείας, ἡ μὲν κάθετος ἐλαχίστη ἐστίν, ἀεὶ δὲ ἡ ἀπώτερον τῆς ἐγγύτερον μείζων.

Β΄. Ἔτι ἐν μὲν τοῖς ὀρθογωνίοις ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα γωνίαν μείζων ἐστὶ τῶν λοιπῶν, ἐν δὲ τοῖς ἀμβλυγωνίοις ἡ τὴν ἀμβλεῖαν.

Πρότασις Κ΄. Θεώρημα.

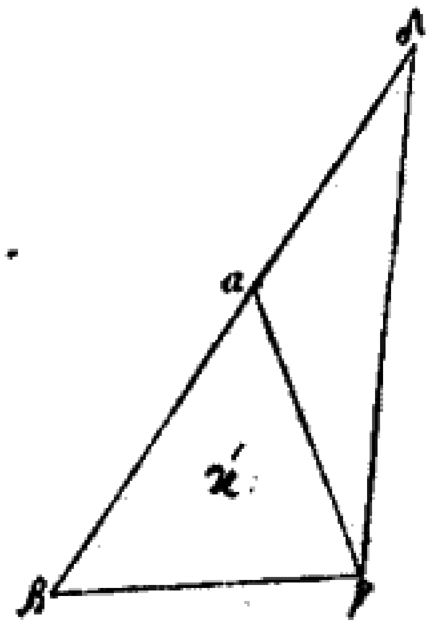
Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ αβγ, λέγω, τὰς αβ, αγ, πλευρὰς μείζονας εἶναι τῆς βγ. ἤχθω γὰρ ἡ βα, ἐπὶ τὸ δ, ὥστε εἶναι τὴν αδ, ἴσην, τῇ αγ, καὶ ἐπι-

ζεύχ-

Eucl. Lib. 1. Fig. 23.

ζεύχθω ἡ δγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ αδ, ἴση ἐστὶ τῇ αγ, πάντως γε αἱ ὑπὸ αγδ, αδγ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ε΄. τοῦ παρόντος. τῆς δὲ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βγδ, ἄρα ἡ αὐτὴ βγδ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς αδγ. ὥστε κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ βδ, πλευρὰ, μείζων ἐστὶ τῆς βγ. ἀλλὰ τῇ βδ, ἴσαι εἰσὶ συναμφότεραι αἱ βα, αγ, ἄρα καὶ αἱ βα, αγ, μείζονές εἰσι τῆς βγ. ὅπερ ἦν τὸ προτεθέν. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὰς βγ, γα, μείζους εἶναι τῆς αβ, τὰς δὲ αβ, βγ, τῆς αγ. τῆς κατασκευῆς ὡς ἀεὶ γενομένης, κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον.

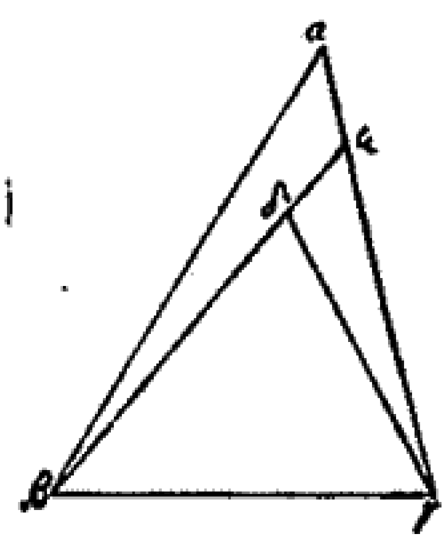


ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι παντὸς τετραπλεύρου ἡ διαγώνιος διάμετρος, ἐλάττων ἐστὶ τῶν ἑκατέρωθεν δύο πλευρῶν.

Πρότασις ΚΑ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.



Τοῦ αβγ, ἤδη τριγώνου, ἐπὶ τῆς βγ, πλευρᾶς, ἀπὸ τῶν περάτων βγ, συνεστάθωσαν δύο εὐθεῖαι ἐντὸς αἱ βδ, γδ. λέγω, ταύτας ἐλάττονας μὲν εἶναι τῶν βα, αγ, μείζονα δὲ γωνίαν τὴν ὑπὸ βδγ, περιέχειν, τῆς ὑπὸ βαγ. διήχθω γὰρ ἡ βδ, ἐπὶ τὸ ε, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω δήπουθεν αἱ βα, αε, πλευραὶ τοῦ αβε, τριγώνου μείζονές εἰσι τῆς βε, κοινῆς δὲ τῆς εγ, προσκειμένης, αἱ βα, αγ, μείζονές εἰσι τῶν βε, εγ. ἐπεὶ δὲ καὶ τοῦ δεγ, τριγώνου αἱ δε, εγ, πλευραὶ μείζονές εἰσι τῆς δγ. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς βδ, πάντως γε αἱ γε, εβ, μείζονές εἰσι τῶν γδ, δβ. ἀλλὰ τῶν γε, εβ, μείζονες ἐδείχθησαν αἱ βα, αγ, ἄρα αἱ βα, αγ, πολλῷ μείζονές εἰσι τῶν βδ, δγ. ὅπερ ἐστὶ τὸ α΄. Αὖθις τοῦ γεδ, τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δεγ, κατὰ τὴν ιϛ΄. τοῦ παρόντος, ἡ δὲ ὑπὸ δεγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, κατὰ τὴν αὐτὴν, ἡ βδγ, ἄρα γωνία πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. ὅπερ ἐστὶ τὸ β΄. Ἐὰν τριγώνου ἄρα ἐπὶ μιᾶς καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου συνάγεται μὴ δύνασθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων, πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη δύο τρίγωνα ὅμοια συνίστασθαι.

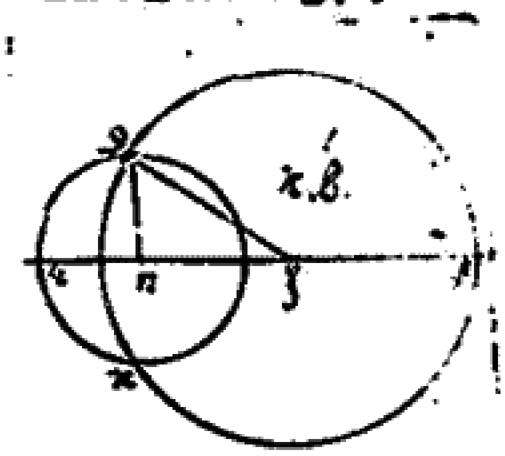
Πρό-

Πρότασις ΚΒ΄. Πρόβλημα.

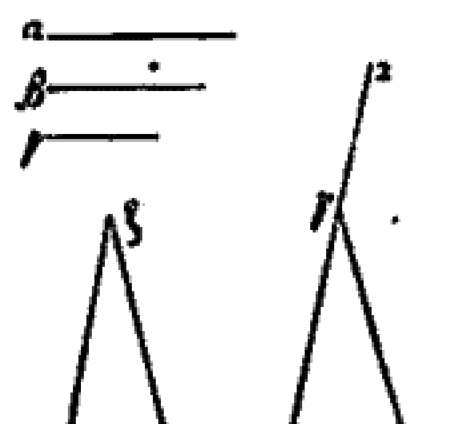
Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.

Ἐκ τριῶν ἤδη εὐθειῶν ἴσων ταῖς α, β, γ, ἔστω τρίγωνον συστήσασθαι. ἐκκείσθω τοίνυν ἡ δε, καὶ ἐξ αὐτῆς τμηθήτω τῇ μὲν α, ἴση ἡ δζ, τῇ δὲ β, ἡ ζη, καὶ τῇ γ, ἡ ηε. καὶ κέντροις μὲν τοῖς ζ, η, διαστήμασι δὲ τοῖς ζδ, ηε, κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ δθκ, εθκ, τεμνόμενοι κατὰ τὰ θ, καὶ κ, σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ θζ, θη. λέγω δὴ τοῦ ζθη, τριγώνου τὰς πλευρὰς εἶναι ἴσας ταῖς α, β, γ, δοθείσαις. ἡ γὰρ ζθ, ἴση ἐστὶ τῇ ζδ, κατὰ τὸν ιε. ὅρον. κατὰ δὲ τὸ α. ἀξίωμα καὶ τῇ α. ὡσαύτως ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ ηε, κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρον. ἡ δὲ ηε, εἴληπται ἴση τῇ γ, ἄρα κατὰ τὸ ῥηθὲν ἀξίωμα, ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ γ. γέγονε δὲ καὶ ἡ ζη, ἴση τῇ β, ἄρα τοῦ ζθη, τριγώνου αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς α, β, γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 24.



Πρότασις ΚΓ΄. Πρόβλημα.



Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἔστω δὲ πρὸς τῇ αβ, δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ γ, πρὸς αὐτῇ σημείῳ, γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι, ἴσην τῇ ὑπὸ εζδ, δοθείσῃ. ληφθήτωσαν τοίνυν τὰ ζε, ζδ, διαστήματα, ὡς ἔτυχε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εδ. εἶτα συνεστάθω διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας πρὸς τῷ γ, σημείῳ τρίγωνον, ἐκ τριῶν πλευρῶν ἴσων ταῖς δε, εζ, ζδ, τὸ γηθ. ὥστε τὴν μὲν γη, ἴσην εἶναι τῇ ζε, τὴν δὲ γθ, τῇ ζδ, καὶ τὴν ηθ, τῇ εδ. Ἐπεὶ οὖν τὰ εζδ, καὶ ηγθ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς εζ, ζδ, ἴσας, δυσὶ ταῖς ηγ, γθ, καὶ τὴν εδ, βάσιν, βάσει τῇ ηθ, ἴσην, ἕξουσι πάντως γε κατὰ τὴν η. καὶ τὴν ὑπὸ εζδ, γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ ηγθ. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.