

Π Ι Ν Α Ξ :

Τὰ Ἐγρήματα τῶν τῶ Εὐκλείδου Στοιχείων.

- Πρότασις. Α'. Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσωνται ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γεόμενος τετράγωνος ἴσται. 216
- β'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσωνται ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον. ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. 216
- γ'. Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῆ τινα, ὁ γεόμενος κύβος ἴσται. 217
- δ'. Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῆ τινα, ὁ γεόμενος κύβος ἴσται. 217
- ε'. Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς, ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῆ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἴσται. 218
- ς'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῆ, καὶ αὐτὸς κύβος ἴσται. 218
- ζ'. Ἐὰν σῶματις ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας ποιῆ τινα, ὁ γεόμενος σῶματις ἴσται. 219
- η'. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ εἴς τε διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ πέμπτος κύβος, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἑβδόμος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος, καὶ οἱ πρῶτοι διαλείποντες πάντες. 219
- θ'. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μῆ τιμὴ μονάδα τετράγωνος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πᾶσις τετράγωνοι ἴσονται, καὶ ἔστω ὁ μὲν τιμὴ μονάδα κύβος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πᾶσις κύβοι ἴσονται. 220
- ι. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μῆ τιμὴ μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος, εἴδ' ἄλλος εἶδής τετράγωνος ἴσται, χωρὶς τῆς τρίτης ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν εἴς τε διαλείποντων πάντων, καὶ ἔστω ὁ μῆ τιμὴ μονάδα κύβος μὴ ᾖ, εἴδ' ἄλλος εἶδής κύβος ἴσται, χωρὶς τῆς πέμπτης ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν δύο διαλείποντων πάντων. 220
- ια. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ ἐλάχιστων τῶν μείζονα μῆτις κατέτινα τῶν ὑπαρχόντων ἐς τοὺς ἀτάλαζον ἀριθμοῖς. 221
- ιβ. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσιν, ὑφ' ὧσων ἂν ὁ ἕχαστος ἐρώπων ἀριθμῶν μῆτις, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τιμὴ μονάδα μῆτις θῆσινται. 222
- ιγ. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μῆ τιμὴ μονάδα ἐρώπων ᾖ, ὁ μέγιστος ὑπ' ἑδουδὸς ἄλλου μῆτις θῆσινται, παρὶξ τῶν ὑπαρχόντων ἐς τοὺς ἀτάλαζον ἀριθμοῖς. 223

ι δ'.

E.γ.Δ της K.τ.Π
IOANNINA 2006

- ιδ'. Εάν ελάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετῆται, ὑπ' ἐδουὸς ἄλλου μετῆθήσεται, πᾶριξ ἢ ἤ ἀρχῆς μετῆντων. 225
- ιε'. Εάν ἄριστοι ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὡσιν ελάχιστοι ἢ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς, δύο ὁποσοῖν συυτιθέσταις πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν. 225
- ισ'. Εάν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὡσιν, ἕκ ἕσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, ἕτως ὁ δ᾿ ἄλλος πρὸς ἄλλον τινά. 226
- ιζ'. Εάν ὡσιν ὁσοιδηποῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὡσιν, ἕκ ἕσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, ἕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά. 226
- ιη'. Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατὸν ἔστιν, αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσεῖν. 227
- ιθ'. Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατὸν ἔστιν, αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσεῖν. 227
- ια'. Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ πάντες τῷ πρῶτῷ πλήθει πρῶτων ἀριθμῶν. 228
- ιβ'. Εάν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοῖν συυτιθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἔστι. 229
- ιγ'. Εάν περιπτοι ἀριθμοὶ ὁποσοῖν συυτιθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ἢ, ὅλος ἄρτιος ἔσται. 229
- ιδ'. Εάν περιπτοι ἀριθμοὶ ὁποσοῖν συυτιθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περιπτόν ἢ, καὶ ὅλος περιπτός ἔσται. 229
- ιε'. Εάν ἀπὸ ἄρτιου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρηθῆ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται. 229
- ισ'. Εάν ἀπὸ ἄρτιου περιπτός ἀφαιρηθῆ, καὶ ὁ λοιπὸς περιπτός ἔσται. 230
- ις'. Εάν ἀπὸ περιπτοῦ ἀριθμοῦ περιπτός ἀφαιρηθῆ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται. 230
- ιζ'. Εάν ἀπὸ περιπτοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρηθῆ, ὁ λοιπὸς περιπτός ἔσται. 230
- ιη'. Εάν περιπτός ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῆ τινά, ὁ γεόμενος ἄρτιος ἔσται. 230
- ιθ'. Εάν περιπτός ἀριθμὸς περιπτόν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῆ τινά, ὁ γεόμενος περιπτός ἔσται. 231
- ια'. Εάν περιπτός ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετῆ, καὶ τὸν ἡμισυ αὐτοῦ μετῆσει. 231
- ιβ'. Εάν περιπτός ἀριθμὸς πρὸς τινά ἀριθμὸν πρῶτος ἢ, καὶ πρὸς τὸν διπλασίου αὐτοῦ πρῶτος ἔσται. 231
- ιγ'. Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἀρτιάκις ἄρτιός ἔστι μόνον. 232
- ιδ'. Εάν ἀριθμὸς τὸν ἡμισυ ἔχη περιπτόν, ἀρτιάκις περιπτός ἔστι μόνος. 232
- ιε'. Εάν ἄρτιος ἀριθμὸς, μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἢ, μήτε τὸν ἡμισυ ἔχη περιπτόν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἔστι, καὶ ἀρτιάκις περιπτός. 233
- ισ'. Εάν ὡσιν ὁσοιδηποῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρηθῆ δὲ ἀπὸ τε τῶν ἄκρων ἡμισυ, ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, ἕτως ὁ ἔσχατος πρὸς τὸν ἔσχατον τινά. 233

- Δ. Δύο τρίγωνα ἢ τετράγωνα ἴσα ἔχοντες ἴσους τὴν ὑπεροχὴν ἀπὸ τῶν ὀρθῶν, ἔσονται ἴσα ἢ τὸ ἄλλο ὑπεροχὴν ἀπὸ τῶν ὀρθῶν ἀπαστασθῆναι. 233
- λς'. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐκπεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἔως δὲ ὁ σύμπαξ συμπεθεῖς ὀρθῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπαξ ἐπὶ τὸν ἔχοντα πολλαπλασιασθεῖς ποιῆται, ὁ γεόμενος, τέλειος ἔσται. 234

Π Ι Ν Α Ξ.

Τὰ Ἐνδεκάτη τῆς τῆς Εὐκλείδου Στοιχείων.

- Οἶος Α'. Σπριόν ἐστὶ τὸ μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος ἔχον. 236
- β'. Σπριὸν διὰ πέρατα, ἐπιφανεία. 237
- γ'. Ἐὐθεία ὀρθὴ ἐπίπεδον ὀρθὴ ἐστὶν, ὅταν ὀρθὴ πᾶσας τὰς ἀπομεινῶν αὐτῆς ἁθείας, καὶ ἔσται ἐν τῇ αὐτῇ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῆ γωνίας. 237
- δ'. Ἐπίπεδον ὀρθὴ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστὶν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ ὀρθὴ ἐπιπέδων ὀρθὴ ὀρθὰς ἀγόμεναι ἁθείαι ἐν αὐτῇ τῇ ἐπιπέδων, τῇ λοιπῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ὀρθὰς ὄσιν. 237
- ε'. Ἐὐθείας ὀρθὴ ἐπίπεδον κλίσεις ἐστὶν, ὅταν ἀπὸ τῶν μισῶν πέρατος τῆς ἁθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κλίσεις ἀχθῆ, καὶ ἀπὸ τῶν γεόμενων σημείων, καὶ ἀπὸ τῶν ἐν τῇ ἐπιπέδῳ πέρατος τῆς ἁθείας, ἁθείαι ἐπιζῶχθῆ, ἢ περιγεόμεναι ὀρθὴ γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείας καὶ τῆς ἐρατώσεως. 237
- ς'. Ἐπιπέδον ὀρθὴ ἐπίπεδον κλίσεις ἐστὶν, ἢ περιγεόμεναι ὀρθὴ γωνία ὑπὸ τῶν ὀρθὴ ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγόμεναι, ὀρθὴ τῇ αὐτῇ σημείῳ, ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων. 238
- ζ'. Ἐπίπεδον ὀρθὴ ἐπίπεδον ἑμοίως κελίθαι λέγεται, καὶ ἔπρον ὀρθὴ ἔπρον, ὅταν αἱ εἰραμείαι τῶν κλίσεων γωνίας, ἴσαι ἀλλήλαις ὄσιν. 238
- η'. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστὶν, τὰ ἀσύμπτωτα. 238
- θ'. Ὀμοία σιρια γῆματα ἐστὶν, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιγεόμενα, ἴσων τὸ πλῆθος. 239
- ι'. ἴσα δὲ καὶ Ὀμοία σιρια γῆματα ἐστὶν, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιγεόμενα, ἴσων τῇ πλῆθει, καὶ τῇ μεγέθει. 239
- ια'. Σπριὰ γωνία ἐστὶν ἢ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο γραμμῶν ἀπομεινῶν ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ ὄσων ὀρθὴ πᾶσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσεις. ἢ καὶ ἔπρον, σιρια γωνία ἐστὶν ἢ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιγεόμενα, μὴ ὄσων ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ αὐτῇ σημείῳ συμπεθεῖσιν. 239
- ιβ'. Πυραμίδες ἔσται γῆμα σιριὸν ἐπιπέδοις περιγεόμενον ἀπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου ὀρθὴ αὐτῇ σημείῳ συμπεθεῖσιν. 240
- ιγ'. Πρίσμα ἐστὶ γῆμα σιριὸν ἐπιπέδοις περιγεόμενον, ὃν δύο τὰ ἀπομεινῶν ἴσα ἢ καὶ Ὀμοία ἐστὶν, καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ, παράλληλόγραμμα. 240
- ιδ'.

Ε.Υ.Δ. της Κ.τ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

- δ'. Σφαῖρα ἔστιν, ὅταν ἡμικυκλίῳ μινύσης πῆς διαμήτρου, περιεσχεθῆν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέριθαι, τὸ περιεσχεθῆν σχῆμα. 240
- ε'. Ἀξῶν δὲ πῆς σφαίρας ἔστιν, ἡ μίνυσα δίδυα, περὶ ἧν τὸ ἡμικύκλιον σφίριται. 240
- ς'. Κέντρον δὲ πῆς σφαίρας ἔστι, τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τῷ ἡμικυκλίῳ. 240
- ζ'. Διαμήτρος δὲ πῆς σφαίρας ἔστιν, δίδυά τις διὰ τῷ κέντρῳ ἡγμένη, καὶ περατωμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ πῆς ἐπιφανείας πῆς σφαίρας. 241
- η'. Κωνίῳ ἔστιν, ὅταν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ μινύσης μιᾶς πλευρᾶς τῆς περὶ τὴν ὀρθῶν γωνίαν, περιεσχεθῆν τὸ τρίγωνον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέριθαι, τὸ περιεσχεθῆν σχῆμα. καὶ ἡ μίνυσα δίδυα ἴση ἢ τῇ λοιπῇ, τῇ περὶ τὴν ὀρθῶν περιφορῶν, ὀρθογωνίῳ ἴσαι ὁ κῶνος. εἰ δὲ ἐλάττω, ἀμβλυγωνίῳ, εἰ δὲ μείζων, ὀξυγωνίῳ. 241
- θ'. Ἀξῶν δὲ τῷ κέντρῳ ἔστιν, ἡ μίνυσα, περὶ ἧν τὸ τρίγωνον σφίριται. 241
- κ'. Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ πῆς περιφορῶν γραφόμενος. 241
- κα'. Κύλινδρος δὲ, ὅταν ὀρθογωνίῳ παραλληλογράμμῳ μινύσης μιᾶς πλευρᾶς τῆς περὶ τὴν ὀρθῶν γωνίαν, περιεσχεθῆν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέριθαι, τὸ περιεσχεθῆν σχῆμα. 241
- κβ'. Ἀξῶν δὲ τῷ κυλίνδρῳ ἔστιν ἡ μίνυσα δίδυα, περὶ ἧν τὸ παραλληλόγραμμον σφίριται. 241
- κγ'. Βάσις δὲ, οἱ κύκλοι, οἱ ἀπὸ τῆς ἀπεναντίων περιεσχεθῶν δύο πλευρῶν γραφόμενοι. 241
- κδ'. Ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι εἰσιν, ὧν οἱ πῆς ἄξονες, καὶ αἱ διαμήτροι τῆς βάσεων ἀλόγοι εἰσιν. 241
- κε'. Κύβος, ἔστι σχῆμα τετραῖον, ὑπὸ ἑξ ἑξαγώνων ἴσων περιεσχεθῶν. 241
- κς'. Ὀκταῖδρον, ἔστι σχῆμα τετραῖον, ὑπὸ ὀκτώ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν περιεσχεθῶν. 241
- κζ'. Δωδεκάεδρον, ἔστι σχῆμα τετραῖον, ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν, καὶ ἰσογωνίων περιεσχεθῶν. 241
- κη'. Εἰκοσαῖδρον, ἔστι σχῆμα τετραῖον ὑπὸ εἰκοσι τριγώνων, ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν περιεσχεθῶν. 241

Π Ρ Ο Τ Α Ξ Ε Ι Σ .

- Α'. Ἐπιπέδου γραμμῆς μέρος μὴν τι εἶναι ἔστιν τῆς ὑποκειμένης ἐπιπέδου, μέρος δὲ τι εἶναι τῆς μετῴρου. 242
- Β'. Ἐὰν δύο δίδυαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἐνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. 242

- γ'. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνηται ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ διθεϊάεσι. 243
- δ'. Ἐὰν διθεΐα δύο διθεΐαις τεμνύσασαι ἄλληλας ἀρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισαθῆ, καὶ τῆ δὲ αὐτῆς ἐπιπέδῳ ἀρὸς ὀρθὰς ἔσαι. 243
- ε'. Ἐὰν διθεΐα τρισὶν διθεΐαις ἀπτομέναις ἄλλήλων ἀρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισαθῆ, αἱ ἄλλαι διθεΐαι ἐν αὐτῇ εἰσὶν ἐπιπέδῳ. 244
- ς'. Ἐὰν δύο διθεΐαι ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιπέδῳ ἀρὸς ὀρθὰς ᾖσι, παράλληλοι ἴσονται αἱ διθεΐαι. 244
- ζ'. Ἐὰν ᾖσι δύο διθεΐαι παράλληλοι, ληφθῆ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεία, ἡ ἐπιζυγωμένη διθεΐα ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιπέδῳ εἴσεται ταῖς παραλλήλοις. 245
- η'. Ἐὰν ᾖσι δύο διθεΐαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ ἀρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῆς αὐτῆς ἐπιπέδῳ ἀρὸς ὀρθὰς ἔσει. 246
- θ'. Αἱ τῆς αὐτῆς διθεΐας παράλληλοι καὶ μὴ ᾖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἔσονται ἄλληλας εἰσὶ παράλληλοι. 247
- ι'. Ἐὰν δύο διθεΐαι ἀπτόμεναι ἄλλήλων περὶ δύο διθεΐας ἀπτομένας ἄλλήλων ᾖσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. 247
- ια'. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μητέρου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κἀθετὸν διθεΐαν γραμμῶν ἀγαγεῖν. 248
- ιβ'. Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ ἀρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, ἀρὸς ὀρθὰς διθεΐαν γραμμῶν ἀναστῆσαι. 248
- ιγ'. Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ ἀρὸς αὐτῆς σημείου, δύο διθεΐαι ἀρὸς ὀρθὰς ἔσονται ἀναστῆσαι ἐπὶ τῷ αὐτῷ δύο μέρη. 249
- ιδ'. Πρὸς ἅ ἐπίπεδα ἢ αὐτὴ διθεΐα ὀρθάεσι, παράλληλάεσι τὰ ἐπίπεδα. 249
- ιε'. Ἐὰν δύο διθεΐαι ἀπτόμεναι ἄλλήλων περὶ δύο διθεΐας ἀπτομένας ἄλλήλων παράλληλοι ᾖσι, μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιπέδῳ ᾖσαι, παράλληλάεσι τὰ δὲ αὐτῶν ἐπίπεδα. 250
- ισ'. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδῳ τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομῆς παράλληλοί εἰσι. 251
- ιζ'. Ἐὰν δύο διθεΐαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωσιν, εἰς τὰς αὐτὰς λόγους τεμνέσονται. 251
- ιη'. Ἐὰν διθεΐα ἐπιπέδῳ τινὶ ἀρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δὲ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἀρὸς ὀρθὰς ἔσαι. 252
- ιθ'. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνηται ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ ἀρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἀρὸς ὀρθὰς ἔσαι. 252
- κα'. Ἐὰν ἑστία γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαῦν τῆς λοιπῆς μείζοντες εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. 253
- καβ'. Ἐπὶ ἑστία γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ πωρόρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται. 254

α β'

- αβ. Ἐὰν δύο ἑῶς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πᾶντη μιπλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι ἀΐθειαι, δυνατὸν εἶναι ἐκ τῶν ἐπιζώγυστων τὰς ἴσας ἀΐθειας, ἕξωτον συστήσασθαι. 254
- αγ. Ἐὰν ἑῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πᾶντη μιπλαμβανόμεναι, ἑξωτὴν γωνίαν συστήσασθαι. δεῖ δὲ τὰς ἑῶς πωμάτων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. 256
- αδ. Ἐὰν ἑξωτὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχεται, τὰ ἀπεναντίον αὐτῷ ἐπίπεδα ἴσα τε, καὶ παραλληλόγραμμά εἰσι. 260
- αε. Ἐὰν ἑξωτὸν παραλληλιπέδων ἐπιπέδῳ τμηθῆ παραλλήλῳ ὅστις τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἴσαι ὡς ἡ βάσις ἀρὸς τὴν βάσιν, ἔτω τὸ ἑξωτὸν ἀρὸς τὸ ἑξωτὸν. 263
- αζ. Πρὸς τῇ δοθείσῃ ἀΐθειᾳ, καὶ τῇ ἀρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ ἑξωτὴν γωνίαν ἴσῳ ἑξωτὴν γωνίαν συστήσασθαι. 261
- αζ. Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἀΐθειας τῇ δοθείσῃ ἑξωτὴν παραλληλιπέδῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἑξωτὸν παραλληλιπέδων ἀναγράψαι. 263
- αζ. Ἐὰν ἑξωτὸν παραλληλιπέδων ἐπιπέδῳ τμηθῆ καὶ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθῆσιν αὐτὰ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων. 263
- αθ. Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὅστις ἑξωτὴν παραλληλιπέδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἑξωτῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσι ἀΐθειαι, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 264
- λ. Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὅστις ἑξωτὴν παραλληλιπέδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἑξωτῶσαι ἕκαστη εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀΐθειαι, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 264
- λα. Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὅστις ἑξωτὴν παραλληλιπέδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 265
- לב. Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὅστις ἑξωτὴν παραλληλιπέδα, πρὸς ἀλλήλα εἰσίν, ὡς αἱ βάσεις. 267
- λγ. Τὰ ὅμοια ἑξωτὴν παραλληλιπέδα ἀρὸς ἀλλήλα ἐν ἑξωτῶσιν λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλάτων. 267
- Πόρισμα. Ἐκ δὲ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐὰν πένταγων ἀΐθειαι ἀλόγον ὦσιν. ἴσαι ὡς ἡ ἀρὸς τὴν πλάτῃ, ἔτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ἑξωτὸν παραλληλιπέδων, ὁμοίον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἐπειδὴ πρὸς καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν πλάτῃ ἑξωτῶσα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς τὴν δευτέραν. 268
- λδ. Τῶν ἴσων ἑξωτῶν παραλληλιπέδων ἀντιπρόθετα αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν ἑξωτῶν παραλληλιπέδων ἀντιπρόθετα αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, ἴσα εἰσίν ἐκείνα. 269
- λε. Ἐὰν δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι ἀΐθειαι

Δείξει ἐπιθαλάσσειν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μὴ τῶν ἐξ ἀρχῆς δεικνύων, ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, ἐπὶ δὲ τῶν μετώπων λευκῆ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπιπέδα, ἐν οἷς εἰσὶν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κἀκεῖνοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γένομενῶν σημείων ὑπὸ τῶν καθέτων ἐν πῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζυγῶσιν Δείξει, ἴσας γωνίας περιέχουσαι μὴ τῶν μετώπων.

271

Πρόμα. Ἐκ τῶν δήλων, ὅτι ἐὰν ᾖσι δύο γωνίαι ἐπιπέδοι δεικνύγραμμοι ἴσαι, ἐπιθαλάσσει δὲ ἐπ' αὐτῶν μετώποι Δείξει ἴσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσαι μὴ τῶν ἐξ ἀρχῆς δεικνύων ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, αἱ ἀπ' αὐτῶν κἀκεῖνοι, ἀγόμενοι ἐπὶ τὰ ἐπιπέδα, ἐν οἷς εἰσὶν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσι.

273

λς. Ἐὰν τρεῖς Δείξει ἀλόγον ᾖσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν δεικνύων σιρίον παραλληλιπίπιδον, ἴσόντες τῆ ἀπὸ πῖς μίσης σιριῶ παραλληλιπιπέδῳ, ἰσοπλάττω μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῆ σφαιρικῶ.

273

λζ. Ἐὰν τῆς τριῶν Δείξει ἀλόγον ᾖσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλιπιπέδα, ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀλόγον ἴσαι, καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν σιρια παραλληλιπιπέδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀλόγον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ Δείξει ἀλόγον ἴσονται.

274

λη. Ἐὰν ἐπιπέδον ἑρὸς ἐπιπέδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν αὐτῶν ἐπιπέδῳ ἐπὶ τὸ ἑρὸν ἐπιπέδον κἀκεῖνος ἀχθῆ, ἐπὶ πῖς κοινῆς πησῆται τομῆς τῶν ἐπιπέδων ἢ ἀγόμενῶν κἀκεῖνος.

275

λι. Ἐὰν σιριῶ παραλληλιπιπέδῳ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλάται δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπιπέδα ἐκβληθῆ, ἢ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἢ τῶ σιριῶ παραλληλιπιπέδῳ διάμειρες δίχα τμηθῶσι ἀλλήλας.

275

μ. Ἐὰν ᾖ δύο ἑπίγραμμα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τριγωνοῦ, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τῶ τριγωνοῦ, ἴσά εἰσι τὰ ἑπίγραμμα.

276

Π Γ Ν Α Ξ.

Τοῦ Δωδεκάτου Εὐκλεδαίου Στοιχείου.

Π Ρ Ο Τ Α Ξ Ε Ι Σ.

Α'. Τὰ ἐν πῖς κύκλοις ὁμοία πολύγωνα ἑρὸς ἀλλήλας εἰσι, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τριγῶνα.

278

β'. Οἱ κύκλοι ἑρὸς ἀλλήλας εἰσι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τριγῶνα.

279

γ'. Πᾶσα πυραμὶς τριγωνοῦ ἔχουσα βάσιν διαίρεται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ἑμείας ἀλλήλαις τριγωνοῦς βάσεις ἔχουσας, καὶ ἑμείας τῆ ὅλη, καὶ εἰς δύο ἑπίγραμμα.

280

- .. ορίσματα ἴσα , καὶ τὰ δύο ορίσματα μείζονά ἐστιν , ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυ-
ραμίδος . 281
- δ'. Ἐὰν ᾖσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος , ἑξήκοντες ἔχουσαι βάσεις , δια-
ριθῆ δὲ ἐπὶ αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις , καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ ,
καὶ εἰς δύο ορίσματα ἴσα , καὶ τῶν γεωμετρῶν πυραμίδων ἑκατέρωθεν αὐτὸν ἑό-
πον νενοῆται διηρημένη , καὶ τῶτο φεῖ γένεται , ἔστιν ὡς ἢ τῆς μιᾶς πυραμίδος
βάσις ἀπὸς τὴν τῆς ἐπὶ αὐτῆς πυραμίδος βάσιν , ὅτω καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι
ορίσματα πάντα , ἀπὸς τὰ ἐν τῇ ἐπὶ αὐτῆς ορίσματα πάντα ἰσοπληθῆ . 283
- ε'. Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ᾖσαι πυραμίδες , καὶ ἑξήκοντες ἔχουσαι βάσεις , ἀπὸς ἀλ-
λήλας εἰσὶν , ὡς αἱ βάσεις . 285
- ς'. Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ᾖσαι πυραμίδες , καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις , ἀπὸς
ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις . 286
- ζ'. Πᾶν ορίσμα ἑξήκοντες ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς ἑξῆς πυραμίδας ἴσας ἀλλή-
λαις ἑξήκοντες βάσεις ἔχουσαι . 287
- Πόρισμα . Ἐκ δὲ τῆς φαιρῶν , ὅτι πᾶσα πυραμὶς ἔστιν μέρος ἐστὶ τῆ ορίσμα-
τος , τῆ τὴν αὐτῆν βάσιν ἔχοντος αὐτῆς , καὶ ὕψος ἴσον . ἐπειδὴ περὶ αὐτῆς ἑτιρόν
τι γῆμα ἔχη ἢ βάσις τῆ ορίσματος , καὶ τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον , διαιρεῖται εἰς
ορίσματα ἑξήκοντες ἔχοντες βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον . 288
- η'. Αἱ ὁμοίαι πυραμίδες , καὶ ἑξήκοντες ἔχουσαι βάσεις ἐν ἑπιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ
τῶν ὁμολόγων πλάρῶν . 288
- Πόρισμα . Ἐκ δὲ τῆς φαιρῶν , ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὁμοίαι πυ-
ραμίδες ἀπὸς ἀλλήλας ἐν ἑπιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλάρῶν . 289
- θ'. Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ ἑξήκοντες βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόμεναι αἱ βά-
σεις τοῖς ὕψεσι , καὶ ὧν πυραμίδων ἑξήκοντες βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόμεναι
αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι , ἴσαι εἰσὶν ἐκείναι . 289
- ι'. Πᾶς κῶνος κυλίνδρου ἔστιν μέρος ἐστὶ , τῆ τὴν αὐτῆν βάσιν ἔχοντος αὐτῆς ,
καὶ ὕψος ἴσον . 290
- ια'. Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι , καὶ κύλινδροι , ἀπὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς
βάσεις . 293
- ιβ'. Οἱ ὁμοιοὶ κῶνοι , καὶ κύλινδροι ἐν ἑπιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ ἢ ἐν ταῖς βά-
σεσι διαμέτρων . 295
- ιγ'. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῆ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις ,
ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος ἀπὸς τὸν κύλινδρον , ὁ ἄξων ἀπὸς τὸν ἄξονα . 298
- ιδ'. Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι ἀπὸς ἀλλήλους εἰσὶν , ὡς τὰ
ὕψη αὐτῶν . 299
- ιε'. Τῶν ἴσων κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόμεναι αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι , καὶ
ὧν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόμεναι αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι , ἴσοι εἰσὶν ἐ-
κείνοι . 299

ΛΧΙΝ

Π Υ Ν Α Ξ

ις'. Δύο κύκλων περί τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον, πολύγωνοι ἰσοπλάροισι καὶ ἀρτιόπλοισιν ἐγγράφαι, μὴ φαῦον τῷ ἐλάσσονος κύκλου.

301

ιζ'. Δύο σφαιρῶν περί τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν σφαιρῶν σφαιρῶν ἐγγράφαι, μὴ φαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας καὶ τῆς ἐπιφανείας.

301

Πόρισμα. Ἐὰν καὶ εἰς ἐπιπέδῳ σφαῖραν ἄλλο σφαιρῶν πολυέδρον ἐγγράφῃ, ὅμοιον τῆς ἐπιπέδου, τὸ παρὸν πολυέδρον ἀπὸ τῆς ἐπιπέδου σφαίρας πολυέδρον ἑξίπλασιον λόγῳ ἔχει, ἢ πρὸς τῆς σφαίρας διάμετρον ἀπὸς τὴν τῆς ἐπιπέδου σφαίρας διάμετρον.

305

ια'. Αἱ σφαῖραι ἀπὸς ἀλλήλας ἐν ἑξίπλασιον λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

305

Π Υ Ν Α Ξ

Τῆ Τρισηκοσθέντος τῆς τῆς Εὐκλείδου Στοιχείων.

Π Ρ Ο Τ Α Ξ Ε Ι Σ.

Α'. Ἐὰν ἀθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μίσον λόγον τμηθῇ, τὸ μείζον τμήμα ἀπὸ λαβὸν τὴν ἡμισίαν τῆς ὅλης, πενταπλάσιον δυνάται τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισίας τῆς ὅλης.

307

Σχόλιον, Ἀνάλυσις καὶ Σύνθεσις τῆς;

308

Α' ἀλύσις, ἐστὶ ληψίς τῆς ζητούμενης διὰ τῶν ἀποδείξεων, ὡς ὁμολογούμενον, ἐπί τῃ ἀλυθίᾳ ὁμολογούμενον.

308

Σύνθεσις, ἐστὶ ληψίς τῆς ὁμολογούμενης διὰ τῶν ἀποδείξεων, ἐπὶ τῆς τῆς ζητούμενης κατάληψιν.

308

β'. Ἐὰν ἀθεῖα γραμμὴ τμήματα ἑαυτῆς πενταπλάσιον δυνάται, τῆς διπλασίας τῆς ἡμισίαν τμήματος ἄκρον καὶ μίσον λόγον τμηομένης, τὸ μείζον τμήμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς ἀθείας.

309

Τῆ ἑρμηκεῖν διαστήματος ἀνάλυσις.

310

Σύνθεσις τῆς αὐτῆς.

310

γ'. Ἐὰν ἀθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μίσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἴλαστον τμήμα ἀπὸ λαβὸν τὴν ἡμισίαν τῆς μείζονος τμήματος, πενταπλάσιον δυνάται τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισίας τῆς μείζονος τμήματος τῆς ἀγόντου.

310

Τῆ ἑρμηκεῖν διαστήματος ἀνάλυσις.

311

Σύνθεσις τῆς αὐτῆς.

311

δ'. Ἐὰν ἀθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μίσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης πρὸς γα.

γα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟΝ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΝ ΕΡΕΥΝΩΝ ΜΕΣΟΓΕΩΓΙΚΗΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

Ε.Υ.Δ. της Κ.τ.Π.
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

- γωνον , καὶ τὸ ἐλάττωτος τμήματος τὰ συναμφοτέρα περὶ ἀγωνα , ἑπιπλασία ἐστὶ
τὸ ἀπὸ τὸ μείζονος τμήματος περὶ ἀγωνα . 312
- Τὸ εἰρημένον διωρήματος ἢ ἀνάλυσις . 312
- Συώθισις τὸ αὐτῷ . 313
- ε'. Ἐὰν ἀθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ , καὶ φρασεθῆ ἴση τῷ μείζο-
νι τμήματι , ὅλη ἢ ἀθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται , καὶ τὸ μείζον
τμήμα , ἐστὶν ἢ ἐξ ἀρχῆς ἀθεῖα . 313
- Α'νάλυσις τὸ εἰρημένον διωρήματος . 313
- Συώθισις τὸ αὐτῷ . 314
- ς'. Ἐὰν ἀθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ , ἐκάπερον τῶν τμημάτων , ἀ-
λογός ἐστιν ἢ καλυμένη ἀποτομή . 314
- ζ'. Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλάρου αἱ ἑῖς γωνίαι , ἢτοι αἱ καὶ τὸ ἐξῆς , ἢ αἱ μὴ
καὶ τὸ ἐξῆς ἴσαι ᾖσιν , ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον . 315
- η'. Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλάρου καὶ ἰσογωνίου τὰς καὶ τὸ ἐξῆς δύο γωνίας ὑποτίθενται
σιν ἀθεῖαι , ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας , καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν
τμήματα ἰσά ἐστι τῆ τὸ πενταγώνου πλάρᾳ . 216
- θ'. Ἐὰν ἢ τὸ ἐξαγώνου πλάρᾳ , καὶ ἢ τὸ δικαγώνου , εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγ-
γραφομένων σωπηθῶσιν , ἢ ὅλη ἀθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται , καὶ
τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα , ἐστὶν ἢ τὸ ἐξαγώνου πλάρᾳ . 317
- ι'. Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσοπλάρον ἐγγραφῆ , ἢ τὸ πενταγώνου πλάρᾳ
διώσται τὴν τὸ ἐξαγώνου , καὶ τὴν τὸ δικαγώνου , τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον
ἐγγεγραμμένων . 317
- ι α'. Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητῶν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσοπλάρον ἐγγρα-
φῆ , ἢ τὸ πενταγώνου πλάρᾳ , ἀλογός ἐστιν ἢ καλυμένη ἐλάσων . 319
- ι β'. Ἐὰν εἰς κύκλον ἑξάγωνον ἰσοπλάρον ἐγγραφῆ , ἢ τὸ ἑξαγώνου πλάρᾳ διωά-
μη ἑπιπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τῆς κέντρου τῷ κύκλῳ . 320
- ι γ'. Πυραμίδα συστήσασθαι , καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῆς δοθείσης , καὶ δεῖξαι , ὅτι ἢ
τῆς σφαίρας διάμετρος διωάμη ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλάρᾳς τῆς πυραμίδος . 321
- ι δ'. Ὀκταῖδρον συστήσασθαι , καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν , ἢ καὶ τὴν πυραμίδα , καὶ
δεῖξαι , ὅτι ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος διωάμη διπλασία ἐστὶ τῆς πλάρᾳς τῆς
ὀκταίδρου . 323
- ι ε'. Κύβον συστήσασθαι , καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν , ἢ καὶ τὰ ὀρθά , καὶ δεῖξαι , ὅ-
τι ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος , διωάμη ἑπιπλή ἐστὶ τῆς τῆς κύβου πλάρᾳς . 324
- ι ς'. Εἰκοσαῖδρον συστήσασθαι , καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν , ἢ καὶ τὰ εἰρημένον ἡμίμα-
τα , καὶ δεῖξαι , ὅτι ἢ τῆς εἰκοσαίδρου πλάρᾳ , ἀλογός ἐστιν , ἢ καλυμένη ἐ-
λάττων . 325
- Πόρισμα . Ἐκ δὲ τῆς φωνηρῶν , ὅτι ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος διωάμη πενταπλασίων
ἐστὶ τῆς ἐκ τῆς κέντρου τῷ κύκλῳ , ἀφ' ἧς τὸ εἰκοσαῖδρον ἀναγίγραπται , καὶ τὰ ἐξῆς . 328

εζ'. Δωδecaίδρον συστήσασθαι, κ' σφαίρα περιλαβεῖν, ἥ κ' τὰ προειρημενὰ σχήματα, κ' δεῖξαι, ὅτι ἢ τὸ δωδecaίδρον πλῆρ᾽, ἀλογόσ' ἐστιν ἢ καλυμμένη ἀπομύ.

328

Πόρισμα. Ἐκ δὲ τῆς φαιρόν, ὅτι πῶς τὸ κύβου πλῆρ᾽ ἀκρον κ' μίσον λόγον πμνομσῶς, τὸ μείζον τμήμα, ἐστὶν ἢ τὸ δωδecaίδρον πλῆρ᾽.

331

εθ'. Τὰς πλῆρ᾽ τῶν πρῶτων σχημάτων ἐκθίσει, κ' συγκεῖναι σφῶς ἀλλήλας.

331

Π Ι Ν Α Ξ:

Τοῦ Τεσσαραεκαδέκατου τῶν τῶ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Π Ρ Ο Τ Α Ξ Ε Ι Σ.

Α'. Π' ἀπὸ κέντρου κύκλου τινός, ἐπὶ τίνι τῷ πεντάγωνῳ πλῆρ᾽, τὸ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένῳ, κἀθίπτε ἀγομίνα, ἡμίσειά ἐστι σωμαμεσοτέρη, πῶς κ' ἐκ τῶ κέντρου, κ' πῶς τῷ διαγώνῳ, τῶ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

336

β'. Ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τὸ, τὸ τῷ δωδecaίδρῳ πεντάγωνῳ, κ' τὸ τῷ εἰκοσαίδρῳ ἑξήγωνῳ τῶ εἰς τίνι αὐτίνῳ σφαῖρα ἐγγραφομένων.

336

γ'. Ἐὰν ᾖ πεντάγωνῳ ἰσόπλῆρῶν τε κ' ἰσογώνῳ, κ' περι τῷ κύκλῳ, κ' ἀπὸ τῶ κέντρου κἀθίπτε ἐπὶ μίαν πλῆρ᾽ ἀχθῆ, τὸ ἑξαικοσάκις ὑπὸ μιᾶς τῶ πλῆρῶν κ' πῶς κἀθίπτε, ἴσον ἐστὶ τῷ δωδecaίδρῳ ἐπιφανείᾳ.

338

Πόρισμα. Ἐκ δὲ τῆς φαιρόν, ὅτι ὡς ἢ τὸ δωδecaίδρῳ ἐπιφανείᾳ σφῶς τίνι τῷ εἰκοσαίδρῳ ἐπιφανείᾳ, κ' τὸ ἐξῆς.

339

δ'. Τύτων δὴλον ὅπως, δεκτικόν, ὅτι ἔσται, ὡς ἢ τὸ δωδecaίδρῳ ἐπιφανείᾳ σφῶς τίνι τῷ εἰκοσαίδρῳ, ὅπως ἢ τὸ κύβου πλῆρ᾽ σφῶς τίνι τῷ εἰκοσαίδρῳ πλῆρ᾽.

339

Πόρισμα. Α'. Δῆλον, ὅτι ἐὰν εἰς τίνι αὐτίνῳ σφαῖρα ἐγγραφῆ δωδecaίδρῳ τε κ' εἰκοσαίδρῳ, λόγον ἔξῃσιν ἀξείας οἰασθησοῦν ἀκρον κ' μίσον λόγον τμηθείσης, ἢ δυναμείη τὸ ἀπὸ πῶς ὅλης κ' τὸ ἀπὸ τῶ μείζονος τμήματος σφῶς τίνι δυναμείῳ τὸ ἀπὸ πῶς ὅλης, κ' τὸ ἀπὸ τῶ ἐλάσσονος τμήματος.

343

Πόρισμα. β'. Τύτων δὲ πάντων γεωρίμων ἡμῶν γενομσῶν, δῆλον, ὅτι ἐὰν εἰς τὸν αὐτίνῳ σφαῖρα ἐγγραφῆ δωδecaίδρῳ κ' εἰκοσαίδρῳ, τὸ δωδecaίδρῳ σφῶς τὸ εἰκοσαίδρῳ λόγον ἔξει, ὃν ἀξείας οἰασθησοῦν ἀκρον κ' μίσον λόγον τμηθείσης.

344

Π Ι Ν Α Ξ .

Τὸ Πεντεκαίδεκάτη τῆς τῆς Εὐκλείδου Στοιχείων .

Π Ρ Ο Τ Α Ξ Ε Ι Σ .

| | |
|--|-----|
| Α'. Εἰς τὸν δοθέντα κύβον πυραμίδα ἐγγράψαι . | 345 |
| β'. Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα οκταέδρον ἐγγράψαι . | 345 |
| γ'. Εἰς τὸν δοθέντα κύβον οκταέδρον ἐγγράψαι . | 346 |
| δ'. Εἰς τὸ δοθεὶς οκταέδρον κύβον ἐγγράψαι . | 346 |
| ε'. Εἰς τὸ δοθεὶς εἰκοσαέδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι . | 347 |

Π Ι Ν Α Ξ :

Τὸ Πρῶτον τῆς Σφαιρικῶν .

| | |
|---|-----|
| Ὅρος . α. Σφαῖρα ἐστὶ χῆμα εἰρηδὸν ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιχόμενον , ἀπὸς ἧς ἅπασαι αἱ ἀροσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἀφ' ἐνὸς σημείου τῆς ἐντὸς τῆς σφαίρας κειμένων ἴσαι εἰσι . | 354 |
| β'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας , τὸ αὐτὸ σημεῖον καλεῖται . | 354 |
| γ'. Ἀξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ διὰ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἠγμένη , καὶ περιτωμένη , ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας , περιὲς ἧς ἠριμύσαν ἢ σφαῖρα περιφέρουσαι διώονται . | 354 |
| δ'. Πόλοι δὲ τῆς σφαίρας εἰσὶ τὰ τῷ ἄξονος πέρατα . | 354 |
| ε'. Πόλοι δὲ κύκλου ἐν σφαίρᾳ ἐγγραμμμένου ἐστὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κείμενον τῆς σφαίρας , ἀφ' οὗ πᾶσαι αἱ ἀροσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἀπὸς τῆς τῷ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσι . | 354 |
| ς'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἐγγραμμμένοι ἐξ ἴσου τῷ κέντρῳ ἀφίστανται , ὅταν αἱ ἀπὸ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα ἀπὸς ὁρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι . | 354 |
| ζ'. Κύκλοι μίγιστοί εἰσιν ἐν σφαίρᾳ , οἱ διὰ πῶν κέντρων τῆς σφαίρας διερχόμενοι καὶ δίχα τῶν σφαιρῶν τέμνοντες . | 354 |
| η'. Κύκλοι ἐλάττωτοί εἰσιν , οἱ μὴ διὰ τῷ κέντρῳ διερχόμενοι τῆς σφαίρας , καὶ εἰς δύο αἵτια τῶν σφαιρῶν τέμνοντες . | 354 |
| θ'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἴσοί εἰσιν οἱ ἐξ ἴσου πῶν οἰκείων ἀφίσταται πόλων , καὶ ὡν ἐπὶ τῆς περιφέρειας αἱ ἀπὸ τῷ πόλου ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσι , μείζων δὲ ὁ μᾶλλον τῷ οἰκείῳ ἀφίσταται πόλου . | 354 |

Π Ρ Ο Τ Α Ξ Ε Ι Σ .

- Α'. Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῆ , μὴ διὰ τῷ κέντρῳ διηρχομένη , ἀπὸ δὲ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀχθῆ , ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας . 355
- β'. Ἐὰν σφαῖρα οἰωδῆσται τμηθῆ ἐπιπέδῳ , ἢ κοινῇ τομῇ τῆς σφαίρας καὶ τῷ ἐπιπέδῳ κύκλος ἐστὶ . 355
- Πόρισμα , α'. Ἐκ τῆς δυνάμεθα συναγαγεῖν , ὅτι τὸ αὐτὸ ἐστὶ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ τῷ κύκλῳ , τῷ διὰ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας διηρχομένη , ὡς ἐπὶ τῷ α'· δείκνυται ῥήματος . 356
- Πόρισμα , β'. Ἐστὶ ἰσὸν ἀχθῆ κάθετος ἀπὸ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῷ κύκλῳ , τῷ μὴ διὰ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας διηρχομένη , ἐπὶ τὸ κέντρον τῷ αὐτῷ κύκλῳ πίπτει , ὡς ἐπὶ τῷ β'· ῥήματος . 356
- γ'. Τῆς δοθείσης σφαίρας τὸ κέντρον εὐρεῖν . 356
- Πόρισμα , α'. Ἐκ τῆς δῆλον , ὅτι τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς διὰ τῷ κέντρῳ τῷ ἐλάσσονος ἐν αὐτῷ κύκλῳ ἀγομένης καθέτως ἐστὶ . 357
- Πόρισμα , β'. Ἐὰν ἢ τομῇ τῆς διὰ τῷ κέντρῳ τῷ κύκλῳ . καὶ τῷ ἴξῃς . 357
- δ'. Ἡ σφαῖρα ἔχεται ἀπὸ τῷ ἐπιπέδῳ καὶ πλείονα σημεῖα , ἢ εἷς . 357
- Πόρισμα . Δῆλον ἐκ τῆς , ὅτι ἢ δύο τιτὰ σημεῖα τῆς σφαίρας ἐπιζεύγνυσα ἄθνηα , εἶδος ὅλη τῆς σφαίρας πίπτει . 358
- ε'. Ἐὰν σφαῖρα ἀπὸ τῷ ἐπιπέδῳ , ἀπὸ δὲ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας ἐπὶ τῷ ἀφῶ ἀθῆα ἀχθῆ , κάθετος ἔσται ἢ ἀχθῆσα πρὸς τὸ ἀπτόμενον ἐπίπεδον . 358
- Πόρισμα . Ἐκ τῆς δυνάμεθα συναγαγεῖν , ὅτι καὶ ἀνάπαλιον , ἰσὸν δὲ δεικνύται ἀπὸ τῆς ἀφῆς τῷ ἀπτόμενον ἐπιπέδῳ τῆς σφαίρας κάθετος πρὸς τὸ αὐτὸ ἀφῆσα ἐπίπεδον τῆς σφαίρας , ἐπ' αὐτῆς ἐστὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας . 358
- ς'. Ἐὰν ἀπὸ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας ἐπὶ τῷ κέντρῳ τῷ ἐλάσσονος ἴσῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλῳ γραμμὴ ἀχθῆ , ὀρθὴ ἔσται ἢ ἀχθῆσα πρὸς τὸ τῷ κύκλῳ ἐπίπεδον . 359
- Πόρισμα . Ἐκ τῆς δῆλον , ὅτι ἰσὸν ἀπὸ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῷ ἐλάσσονος κύκλῳ ἀχθῆ , διὰ τῷ κέντρῳ αὐτῷ διέρχεται . 359
- ζ'. Τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν διὰ τῷ κέντρῳ , διηρχόμενοι τῆς σφαίρας μίγισοί εἰσι , καὶ ἀνάπαλιον , οἱ μίγιστοι διὰ τῷ κέντρῳ διέρχονται τῆς σφαίρας , οἱ δὲ ἐξ ἴσου ἀφῆσάμενοι τῷ κέντρῳ ἴσοί εἰσι , καὶ ἀνάπαλιον , οἱ ἴσοι ἐξ ἴσου τῷ κέντρῳ ἀφῆσονται , καὶ ἔτι οἱ ἀπώπερον τῷ κέντρῳ ἴσῳ ἐγγύπερον ἐλάσσονες εἰσι . 359
- Πόρισμα . α'. Ἐκ τῆς ῥῆσῃ συναγίνεται , ὅτι πάντες οἱ ἐν τῇ σφαίρᾳ μίγιστοι κύκλοι , ἴσοί εἰσι , ἢ γὰρ τῷ μίγιστον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλῳ ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμετρῷ τῆς σφαίρας . 361

- Πόρισμα. β'. Ἐπι ἐκατέρωθεν τῆ οἰκλήποτε ἐν σφαίρα μίγισυ κύκλυ ἢ πλείους,
ἢ δύο μόνον ἴσους εἶναι τῶν ἐλασσόνων ἐν αὐτῇ κύκλων. 361
- η'. Ἐὰν παρά τῆ κέντρῳ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆ ἐν αὐτῇ κύκλυ κάθιστος
ἀχθῆ, διὰ τῶν πόλων τῆ κύκλυ διελύσεται, ἢ ἀνάπαλιν, εἰὰν ἀπὸ τῆ πό-
λυ ἐν σφαίρα κύκλυ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆ κάθιστος ἀχθῆ, διὰ τῆ τῆ κέντρῳ
τῆς σφαίρας διελύσεται, ἢ τῆ ἀπεναντίον πόλυ τῆ κύκλυ. 362
- θ'. Ἐὰν διὰ τῶν πόλων τινὸς τῶν ἐν σφαίρα κύκλων ἀθεῖα ἀχθῆ, κάθιστός ἐ-
στιν ἐπὶ τῆ τῆ κύκλυ ἐπίπεδον, ἢ διὰ τῆ κέντρῳ τῆς σφαίρας διέρχεται. 363
- Πόρισμα. Ἐκ τῆ δῆλον, ὅτι εἰὰν ἀπὸ τῆ πόλυ τινὸς κύκλυ κάθιστος ἀπὸς τὸ ἐ-
πίπεδον αὐτῆ ἀχθῆ, ἐπὶ τῆ κέντρῳ πισεῖται τῆ κύκλυ, ἢ ἀνάπαλιν. 363
- ι'. Οἱ μίγιστοι ἐν σφαίρα κύκλοι δίχα ἀλλήλοις τέμνονται, ἢ ἀνάπαλιν, οἱ δί-
χα ἐν σφαίρα ἀλλήλοις τεμνόμενοι κύκλοι, μίγιστοί εἰσιν. 364
- ια'. Ἐὰν κύκλος μίγιστος ἐν σφαίρα κύκλον ἐλάσσονα ἀπὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνη,
δίχα αὐτὸν τέμνη, ἢ διὰ τῶν πόλων αὐτῆ διέρχεται, ἢ ἀνάπαλιν, εἰὰν δί-
χα αὐτὸν τέμνη, ἢ ἀπὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνη. 365
- ιβ'. Ἐὰν κύκλος μίγιστος ἐν σφαίρα διὰ τῶν πόλων ἐτέρῳ κύκλυ διέρχεται, δίχα
καὶ ἀπὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνη. 366
- Πόρισμα, α'. Ἐκ τῆ δῆλον, ὅτι εἰὰν μίγιστος ἐν σφαίρα κύκλος διὰ τῆ πόλων
μίγισυ κύκλυ τῆ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρα διέρχεται, κακείνος διὰ τῆ πόλων αὐ-
τῆ διέρχεται, ἢ ἐκάπρος ὀρθός ἐστι ἀπὸς τὸν ἕτερον. 366
- Πόρισμα, β'. Ἐπι κύκλος ἐν σφαίρα δι' ἐκατέρῳ τῆ πόλων ἐτέρῳ κύκλυ διερχό-
μενος μίγιστός ἐστι, ὅτι δίχα καὶ ἀπὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνων, διὰ τῆ κέντρῳ
τῆς σφαίρας διέρχεται. 366
- ιγ'. Ἐὰν ἀπὸ τῆ πόλυ μίγισυ τινὸς ἐν σφαίρα κύκλυ ἐπὶ τῆ περιφέρειῳ αὐτῆ
ἀθεῖα ἀχθῆ, ἴση ἐστὶ τῇ τῆ ἐν μίγισυ κύκλω τῆ ἀγαίνῳ πλάρῃ τῆ ἐν τῇ
αὐτῇ σφαίρα, καὶ ἢ ἀπὸ τῆ πόλυ τινὸς ἐν σφαίρα κύκλυ ἐπὶ τῆ περιφέ-
ρειῳ αὐτῆ ἀγομένη ἀθεῖα ἴση ἢ τῇ τῆ ἐν μίγισυ κύκλω τῆ ἀγαίνῳ πλάρῃ,
μίγιστός ἐστι ἐκεῖνος. 367
- Πόρισμα. Ἐκ τῆ δῆλον, ὅτι οἱ μίγιστοι κύκλοι πταρτημοζῶ ἀφίστανται τῶν ἰδίων
πόλων, ἢ οἱ πταρτημοζῶ ἀφιστάμενοι τῶν ἰδίων πόλων, μίγιστοί εἰσι. 368
- ιδ'. Τῆ διαμήτρῳ παντὸς ἐν σφαίρα κύκλυ ἴσω ἀθεῖαν ἀρεῖν. 368
- ιε'. Τῆ διαμήτρῳ τῆς δοθείσης σφαίρας ἴσω ἀθεῖαν ἀρεῖν. 369
- ισ'. Δύο, ὡς ἴτυχε, σημείων δοθέντων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸν δι'
αὐτῶν διερχόμενον μίγιστον κύκλον ἀρεῖν. 370
- ιζ'. Παντὸς ἐν σφαίρα κύκλυ τῆς πόλυς ἀρεῖν. 370
- ιη'. Ἐὰν ἐν σφαίρα ἀθεῖα τις διὰ τῆ κέντρῳ ἀθεῖαί τινα μὴ διὰ τῆ κέντρῳ διχα
πέμνη, ἢ ἀπὸς ὀρθὰς αὐτῆ τέμνη, ἢ εἰὰν ἀπὸς ὀρθὰς αὐτῆ τέμνη, ἢ δί-
χα αὐτῆ τέμνη. 371