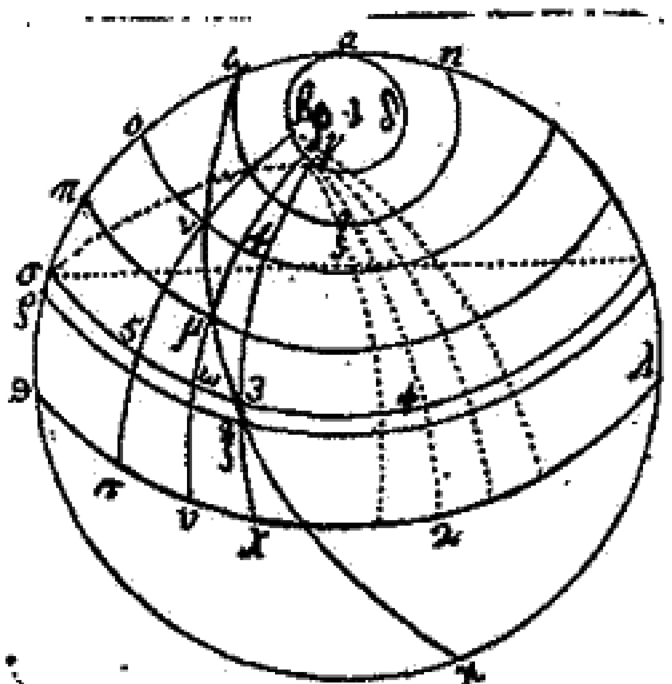
Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι δύο, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, τὸν δὲ μείζονα τέμνῃ, καὶ τοῦ τεμνομένου αὖθις ἕτερος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, καθ' ὃ τέμνεται σημεῖον. ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων τόξα ἴσα, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν σημείων τῶν ληφθέντων τόξων κύκλοι μέγιστοι ἀχθῶσιν ἁπτόμενοι τοῦ ἐλάττονος τῶν παραλλήλων, οἱ κύκλοι οὗτοι ἄνισα τόξα ἐναπολήψονται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, καὶ τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν διερχομένων κύκλων διὰ τῶν περάτων τοῦ ἐγγυτέρου τοῦ πόλου ὄντος τόξου μεῖζον ἔσται.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι οἱ α β γ δ, ε ζ η. καὶ τοῦ μὲν α β γ, ἐλάττονος ἁπτέσθω ὁ α θ κ λ, μέγιστος κύκλος, τὸν δὲ μείζονα ε ζ η, τεμνέτω ὁ αὐτὸς κατὰ τὸ ε, καθ' ὃ ἁπτέσθω τοῦ αὐτοῦ ε ζ η, ὁ ε μ κ, μέγιστος, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθήτωσαν ἴσα τόξα τὰ μ ν, μ ξ, ὥστε εἶναι ἄμφω τὰ ληφθέντα ταῦτα τόξα ἐν τῷ αὐτῷ θ α λ, ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν ν, μ, ξ, σημείων ἀχθήτωσαν κύκλοι μέγιστοι οἱ τ ν β, υ μ φ, χ ξ γ, ἁπτόμενοι τοῦ α β γ δ, ἐλάττονος τῶν παραλλήλων, κατὰ τὰ β, φ, γ, σημεῖα. ἔστω δὲ καὶ μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ θ χ λ.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 9.



Λέγω τοὺς τ ν β, υ μ φ, χ ξ γ, μεγίστους κύκλους ἄνισα ἐναπολαμβάνειν τόξα ἐπὶ τῆς τοῦ θ χ λ, παραλλήλου τὰ τ υ, υ χ, καὶ τὸ τ υ, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν τ ν β, υ μ φ, μεγίστων κύκλων τῶν διὰ τῶν μ, ν, σημείων διερχομένων τοῦ μ ν, τόξου, τοῦ ἐγγυτέρου ὄντος τοῦ ι, πόλου μεῖζον εἶναι. Γραφήτωσαν γὰρ διὰ τῶν ν μ ξ, ληφθέντων σημείων κύκλοι παράλληλοι τοῖς ἐξ ἀρχῆς, οἱ ν ο, μ π, ξ ρ. καὶ ἐπεί, κατὰ τὴν αὐωτέρω, τὸ ρ π, μεῖζόν ἐστι τοῦ π ο, ἀφαιρεθήτω τὸ σ π, ἴσον τῷ π ο, καὶ γραφήτω ὁ 3 σ. Δείκνυται. Ἐπεὶ τὸ μὲν μ ψ, ἴσον ἐστὶ τῷ π ο, τὸ δὲ μ ω, τῷ π σ, κατὰ τὴν ι β': τοῦ β': τοῦ παρόντος, τὰ δὲ π ο, π σ, ἴσα ἐστί, κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα καὶ τὰ μ ψ, μ ω, ἴσα ἐστίν, εἴληπται δὲ καὶ τὰ μ ν, μ ξ, ἴσα, ἄρα κατὰ τὴν β': τοῦ παρ: αἱ ν ψ, ω ξ, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ ὁ χ γ 2, μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ α β γ δ, παραλλήλου κατὰ τὸ γ, οὐ διέρχεται διὰ τοῦ ι, πόλου

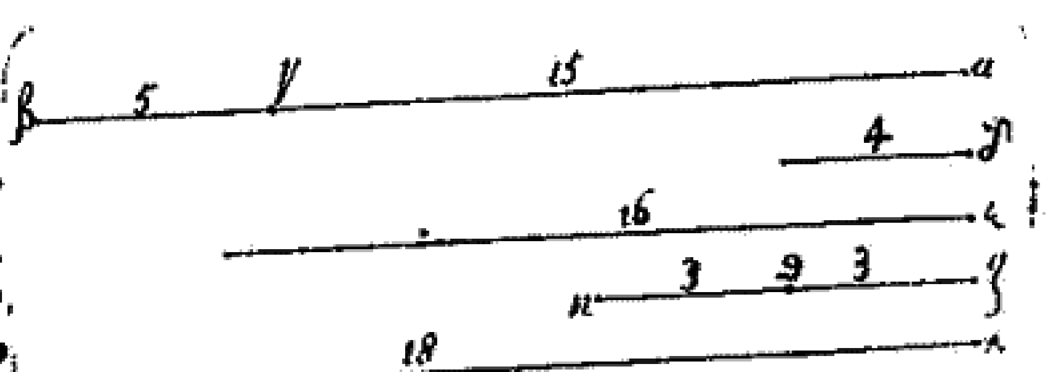
πόλου τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου, δῆλον, ὅτι τὸν ζσγ, παράλληλον πλαγίως τέμνει, ὥστε ὁ ζσγ, παράλληλος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χγδ, μεγίστου κύκλου ἐγκλινόμενός ἐστι πρὸς τὸ γ, σημεῖον. μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἐστὶν ὁ θχλ, ἄρα ὁ χγδ, μέγιστος κύκλος δίχα ὑπ' αὐτοῦ τέμνεται καὶ τὰ χδ, σημεῖα, ὡς δέδεικται προτ: ί: τοῦ α: τοῦ παρόντος, καὶ τὸ χγδ, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστιν, ὥστε ζγδ ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, καὶ ἑπομένως ὁ ζσγ, παράλληλος εἰς δύο ἄνισα τὸν χγδ, τέμνει κύκλον. εἰλήπται δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ζσγ, τόξου τὸ ω, σημεῖον, καθ' ὃ τὸ αὐτὸ ζσγ, τόξον εἰς ἄνισα τέμνεται, ἄρα κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος, ἡ ωζ, ὑποτείνουσα ἐλάττων ἐστὶ τῆς ωξ. ἀλλὰ τῇ ωξ, ἴση ἐστὶν ἡ ψν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ ψν, μείζων ἐστὶ τῆς ωζ. ἐπεὶ δὲ ὁ ψνο, παράλληλος ἐλάττων ἐστὶ τοῦ ζσγ, πάντως γε ἡ νψ, ὑποτείνουσα, μεῖζον τῷ λόγῳ τόξον ὑποτείνει τοῦ ψνο, παραλλήλου, ἤπερ ἡ ωζ, τοῦ ζσγ, παραλλήλου. οὐκοῦν ἄρα ὅμοιά εἰσι τὰ νψ, ωζ, τόξα, ἀλλὰ μᾶλλον τὸ νψ, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν ψνο, κύκλον, ἢ τὸ ωζ, πρὸς τὸν ζσγ. ἀλλὰ τὸ μὲν νψ, ὅμοιόν ἐστι τῷ τυ, τὸ δὲ ωζ, τῷ υχ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ β': τοῦ παρ: ἄρα καὶ τὸ τυ, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν θχ, κύκλον, ἢ τὸ υχ, τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν, ἄρα τὸ τυ, μεῖζόν ἐστι τοῦ υχ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποκειμένον.

ΛΗΜΜΑ.

Δύο ἀνίσων μεγεθῶν δοθέντων, μέσον τούτων εὑρεῖν, σύμμετρον ἑτέρῳ τινί, μὴ ἴσῳ ὄντι τῇ τοῦ μείζονος τῶν δοθέντων πρὸς τὸ ἔλαττον διαφορᾷ.

Ἔστωσαν ἄνισα μεγέθη τὰ αβ, αγ. καὶ ζητηθήτω μεγέθος, ὥστε εἶναι μέσον μὲν τῶν αβ, αγ, σύμμετρον δὲ τῷ δοθέντι δ. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο διχῶς ἐνδέχεται ὑποκεῖσθαι. ἢ γὰρ τὸ δοθὲν μέγεθος, ᾧ δεῖ σύμμετρον εἶναι τὸ ζητούμενον, ἔλαττόν ἐστι τῆς βγ, διαφορᾶς, ἢ γοῦν μεῖζον. Κείσθω πρῶτον ἔλαττον, οἷον τὸ δ. Διπλασιασθήτω δὲ τὸ δ, τριπλασιασθήτω, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ πολλαπλασιασθήτω ἀριθμόν, ὥστε γενέσθαι τὸ ε, μέγεθος πρώτως μεῖζον τοῦ αγ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ὅτι μὲν γὰρ μέσον ἐστὶ τῶν αβ, αγ, δῆλον. εἰ γὰρ μή, ἔσται πάντως μεῖζον καὶ τοῦ αβ. ἀφαιρεθέντος δὲ ἀπ' αὐτοῦ τοῦ δ, ἅπαξ, τὸ ἐναπολειπόμενον μεῖζον ἔσται τοῦ αγ, διὰ τὸ ἔλαττον εἶναι τὸ δ, τῆς βγ, διαφορᾶς, καὶ ἑπομένως οὐκ ἔσται πρώτως μεῖζον τοῦ αγ, τὸ εὑρεθὲν ε, ἀλλὰ μᾶλλον τὸ ἐναπολειπόμενον,

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 10.



μενον, ὑπετέθη δὲ τὸ ε, καὶ πρώτως μεῖζον, κατὰ τὴν κατασκευήν, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ αβ, ἀλλ' ἔλαττον τὸ αὐτὸ ε, γέγονε δὲ καὶ μεῖζον τοῦ αγ, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ε, τῶν αβ, αγ, δοθέντων, ὅπερ ἦν τὸ α. Ὅτι δὲ καὶ σύμμετρόν ἐστι τῷ δ, οὐδεμία ἐστὶν ἀμφιβολία, τὸ γὰρ ε, πολλαπλασιαζομένου τοῦ δ, γέγονεν, ὥστε τὸ αὐτὸ ἄμφω μετρεῖται μέτρῳ, καὶ τοῦτό ἐστι τὸ συστατικὸν τῶν συμμέτρων μεγεθῶν, κατὰ τὸν β': ὅρον τοῦ ι: τοῦ στοιχειωτοῦ. ἀλλὰ δὴ κείσθω τὸ δοθὲν μέγεθος, ᾧ τινι δέον τὸ ζητούμενον σύμμετρον εἶναι, μεῖζον τῆς βγ, διαφορᾶς, οἷον τὸ ζη. καὶ διαιρεθήτω εἰς δύο, ἢ εἰς τέσσαρα, ἢ εἰς ὀκτώ, ἢ εἰς ἄλλον τινὰ ἀριθμόν, τῆς τομῆς ἀεὶ ἐν μέσῳ γινομένης, ἕως ἂν τὸ ἐναπολειφθὲν ἔλαττον ἀφαιρῇ τῆς βγ, διαφορᾶς. εἶτα διπλασιασθήτω, τριπλασιασθήτω τὸ αὐτό, ἢ ἄλλως πως αὐξηθήτω, ὥστε τὸ γενόμενον πρώτως μεῖζον εἶναι τοῦ αγ, ὡς τὸ κ. καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον κατὰ τὰ εἴδη εἰρημένα. ἔσται γὰρ πάντως καὶ μέσον, τῶν αβ, αγ, εἰ γὰρ μή, τὸ αὐτὸ ἕψεται ἄτοπον, ὃ καὶ πρότερον, καὶ πρὸς τούτῳ σύμμετρον τῷ ζη. καὶ γὰρ τὰ ἤδη εἰρημένα, σύμμετρόν ἐστι πηλίκῳ τινὶ μέρει τοῦ ζη, ᾧ τινι σύμμετρόν ἐστι, καὶ τὸ ζη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Η': Θεώρημα.

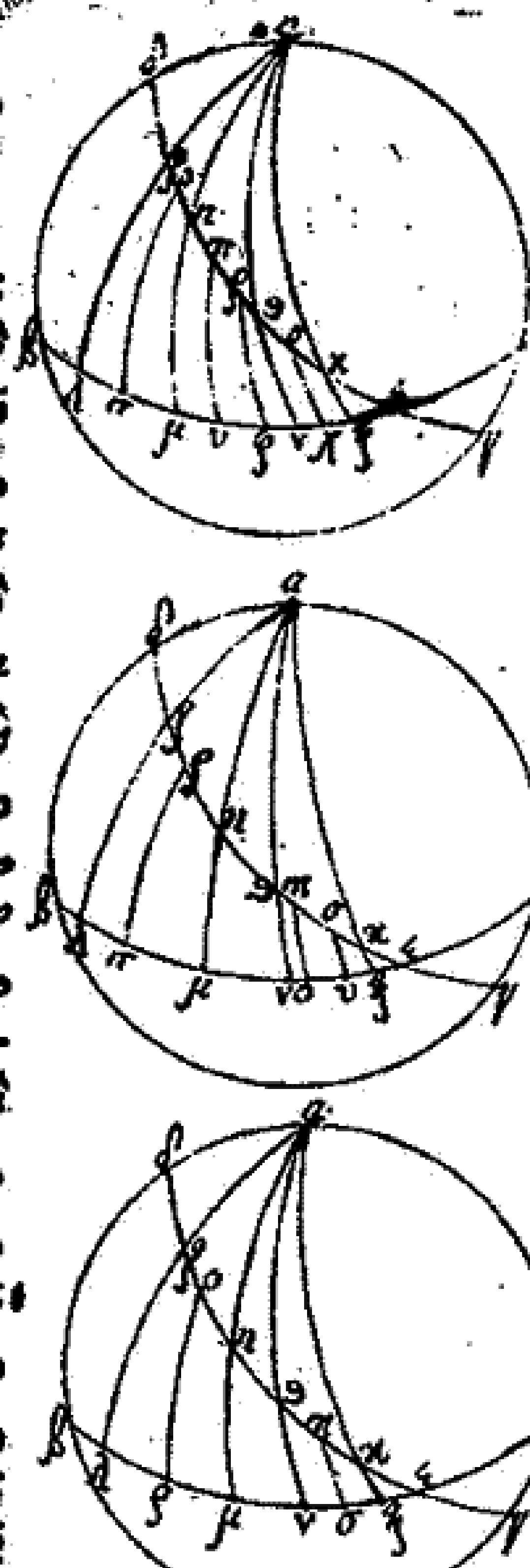
Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσι, μὴ οὖσαι ἑξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων κύκλου. διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων, καὶ τοῦ πόλου μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἔγγιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς πορρώτερον.

Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ αβγ, ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων, τὸ α, σημεῖον, καὶ τὸν αβγ, κύκλον δύο μέγιστοι κύκλοι τεμνέτωσαν οἱ δεγ, βε, πρὸς ὀρθάς. ὧν ὁ μὲν βε, εἷς ἔστω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δεγ, λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους. ἀπὸ δὲ τοῦ δεγ, λοξοῦ, ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν, μὴ οὖσαι ἑξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων βε, αἱ ζη, θκ, καὶ διὰ τῶν ζ, η, θ, κ, σημείων, καὶ τοῦ α, πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ αζλ, αημ, αθν, ακξ. Λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ λμ, περιφέρεια τῆς νξ, περιφερείας. Ἡ γὰρ ηθ, ἤτοι σύμμετρός ἐστι ταῖς ζη, θκ, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον σύμμετρος, καὶ διῃρήσθωσαν αἱ ζη, ηθ, θκ, εἰς μέρη ἴσα τῷ κοινῷ αὐτῶν μέτρῳ, κατὰ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ δι' ἑκάστου τούτων, καὶ τοῦ α, πόλου γεγράφθωσαν κύκλοι μέγιστοι, οἱ οτ, πυ, ρφ, σχ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ζο, οη, ηπ,

πρ,

π ρ, ρ θ, θ σ, σ κ, περιφέρειαι ἑξῆς ἀλλήλαις ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν ε: τοῦ παρ: παντὸς γε αἱ λ τ, τ μ, μ υ, υ φ, φ ν, ν χ, χ ξ, ἑξῆς μείζονες ἀλλήλων εἰσίν, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς λ τ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ μὲν λ τ, τῆς ν χ, ἡ δὲ τ μ, τῆς χ ξ, ἡ ὅλη ἄρα μ λ, ὅλης τῆς ν ξ, μείζων ἐστίν. Μὴ ἔστω δὴ ἡ η θ, ταῖς ζ η, θ κ, σύμμετρος. Λέγω ὁμοίως μείζονα εἶναι τὴν λ μ, τῆς ν ξ. Εἰ γὰρ μὴ, ἔσται ἤτοι ἐλάσσων, ἢ ἴση. Ἔστω, εἰ δυνατὸν, πρότερον ἐλάσσων ἡ λ μ, ν ξ. Καὶ κείσθω τῇ λ μ, ἴση τῇ ἡ ν ο. καὶ διὰ τοῦ α, πόλου καὶ τοῦ ο, γεγράφθω μέγιστος ὁ π ο. Τῶν οὖν δὴ οὐσῶν περιφερειῶν ὁμοιογενῶν ἀνίσων, τῶν κ θ, θ π, η θ, εἰλήφθω τις περιφέρεια ἡ θ ρ, διὰ τοῦ ἀνωτέρω λήμματος, μείζων μὲν οὖσα τῆς θ π, ἐλάσσων δὲ τῆς θ κ, σύμμετρος δὲ τῇ η θ. καὶ κείσθω τῇ θ ρ, ἴση ἡ σ η, καὶ διὰ τῶν ρ, σ, σημείων, καὶ α, πόλου γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ σ υ, ρ τ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ σ η, τῇ θ ρ, κατὰ τὴν δεῖξιν τοῦ ά: μέρους, καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ η θ, ἑκατέρᾳ τῶν σ η, θ ρ, ἡ τ μ, ἄρα τῆς ν υ, μείζων ἐστὶν, ὥσπερ καὶ τῆς ν ο, ἡ ν υ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ λ μ, τῆς ν ο, ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἡ λ μ, τῆς ν ξ. Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἴση. Εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἴση, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ζ η, θ κ, δίχα κατὰ τὰ ο, π, σημεῖα. καὶ διὰ τῶν ο, π, σημείων, καὶ τοῦ α, πόλου, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ο ρ, π σ. ἐπεὶ οὖν αἱ ζ ο, ο η, ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ ἄρα λ ρ, ρ μ, ἑξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ τὴν ε: τοῦ παρόντος, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς λ ρ, μείζων ἄρα ἡ λ ρ, τῆς ρ μ. ἡ ἄρα λ μ, τῆς μ ρ, μείζων ἐστὶν, ἢ διπλῆ. Πάλιν ἐπεὶ αἱ θ π, π κ, ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ ν σ, σ ξ, ἄρα ἑξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσιν, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ν σ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ν σ, τῆς σ ξ. ὥστε ἡ ν ξ, τῆς ν σ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ λ μ, τῇ ν ξ, ὧν ἡ λ μ, τῆς μ ρ, μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ, ἡ δὲ ν ξ, τῆς ν σ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ρ μ, τῆς ν σ, ἴσων ὑποκειμένων τῶν ο η, θ π, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἴση ἡ λ μ, τῇ ν ξ. ἐδείχθη δὲ οὐδ' ἐλάσσων, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ λ μ, περιφέρεια τῆς ν ξ, περιφερείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 13.



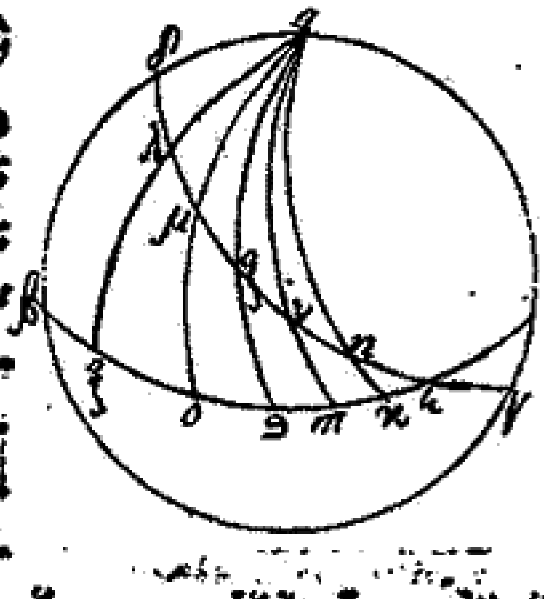
Πρό-

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο κύκλοι πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν σημείων καὶ τοῦ πόλου τῶν παραλλήλων μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἔσται ὡς ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, καὶ τοῦ ἑξῆς διὰ τοῦ πόλου, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων, οὕτως ἡ ἑξῆς τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, ἡ μεταξὺ τῶν διὰ τοῦ πόλου καὶ τῶν ληφθέντων σημείων, μεγίστων κύκλων, πρὸς ἐλάττονά τινα περιφέρειαν τῆς τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφερείας, τῆς μεταξὺ τῶν ληφθέντων σημείων.

Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ αβγ, ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ α, σημεῖον, καὶ τὸν αβγ, δύο κύκλοι τεμνέτωσαν πρὸς ὀρθὰς μέγιστοι οἱ δεγ, βε. ὧν ὁ μὲν βε, εἷς ἔστω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δεγ, λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους. ἐπὶ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου δεγ, εἰλήφθωσαν δύο τυχόντα σημεῖα τὰ ζ, η, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων βε, καὶ διὰ τῶν ζ, η, καὶ α, πόλου γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ αζθ, αηκ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δζ, περιφέρειαν, οὕτως ἡ θκ, περιφέρεια πρὸς ἐλάσσονά τινα περιφέρειαν τῆς ζη, περιφερείας. ἤτοι γὰρ ἡ ζη, τῇ δζ, σύμμετρός ἐστιν, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον σύμμετρος, καὶ διῃρήσθωσαν εἰς τὰ μέρη τὰ μετροῦντα αἱ δζ, ζη, κατὰ τὰ λ, μ, ν, σημεῖα, καὶ δι' ἑκάστου τούτων καὶ τοῦ α, πόλου γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ λξ, μο, νπ.

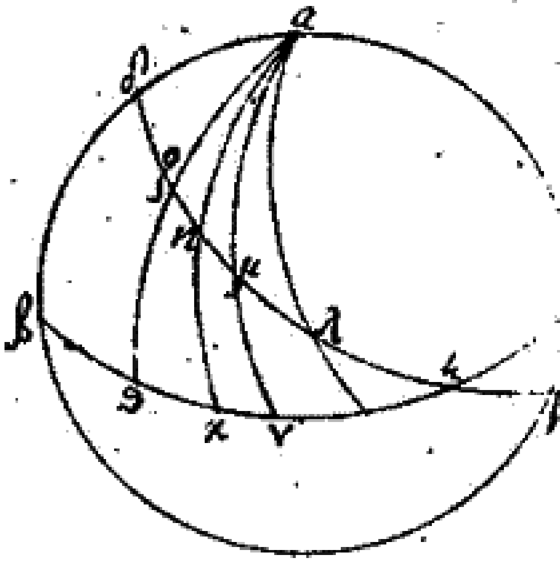
Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 12.

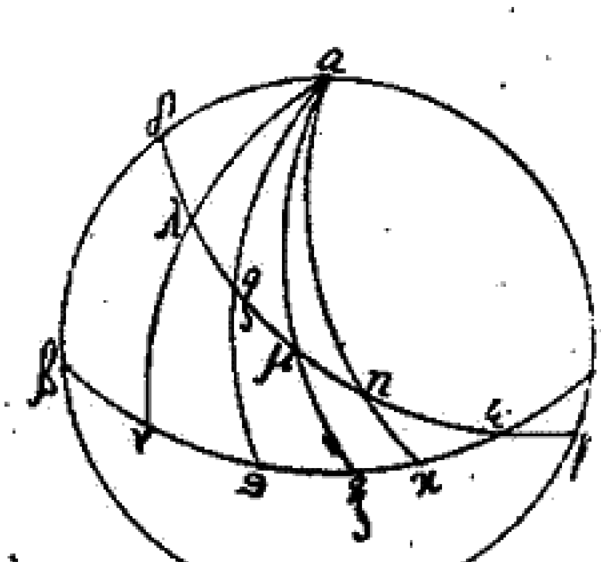


Ἐπεὶ οὖν αἱ δλ, λμ, μζ, ζν, νη, ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ ἄρα βξ, ξο, οθ, θπ, πκ, ἑξῆς μείζους ἀλλήλων εἰσὶ, κατὰ τὴν ε': τοῦ παρόντος, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς βξ. καὶ ἔστι τὸ μὲν πλῆθος τῶν βξ, ξο, οθ, ἴσον τῷ πλήθει τῶν δλ, λμ, μζ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν θπ, πκ, ἴσον τῷ πλήθει τῶν ζν, νη. ἡ βθ, ἄρα πρὸς τὴν δζ, μείζονα λόγον ἔχει, κατὰ τὸν ζ': ὅρον τοῦ ε': τοῦ στοιχ: ἤπερ ἡ θκ, πρὸς τὴν ζη. ἐὰν ἄρα ποιῶμεν ὡς τὴν βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτω τὴν θκ, πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς ζη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δζ, περιφέρειαν, οὕτως ἡ θκ, πρὸς ἐλάσσονά τινα περιφέρειαν τῆς ζη.

Μὴ ἔςω δὴ ἡ ζη, τῇ δζ, σύμμετρος. Λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἐςὶν ὡς ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δζ, περιφέρειαν, οὕτως ἡ θκ, περιφέρεια πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζη, περιφερείας. εἰ γὰρ μή, ἔςαι ἤτοι πρὸς μείζονα τῆς ζη, ἢ πρὸς αὐτήν. Ἔςω πρότερον, εἰ δυνατόν, πρὸς μείζονα τῆς ζη, τὴν λζ. καὶ ἐξ ἀνίσων ἀνίσων περιφερειῶν τῶν λζ, ζη, ζδ, εἰλήφθω τις περιφέρεια ἡ ζμ, τῆς μὲν ζλ, οὖσα ἐλάσσων, τῆς δὲ ζη, μείζων, καὶ τῇ ζδ, σύμμετρος κατὰ τὸ λῆμμα τῆς ἀνωτέρω. καὶ διὰ τοῦ μ, καὶ τοῦ α, πόλου γεγράφθω μέγιςος κύκλος ὁ μν. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐςιν ἡ ζμ, τῇ ζδ, ἔςιν ἄρα ὡς ἡ βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως ἡ θν, πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζμ, κατὰ τὸν ῥηθέντα ὅρον. ὡς δὲ ἡ βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως ἐςὶν ἡ θκ, πρὸς τὴν ζλ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ ὡς ἄρα ἡ θκ, πρὸς τὴν ζλ, οὕτως ἐςὶν ἡ θν, πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζμ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 11.





ὡς ἡ θκ, πρὸς τὴν θν, οὕτως ἡ ζλ, πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζμ, ἐλάσσων δὲ ἡ θκ, τῆς θν, ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ λζ, τῆς ἐλάσσονος τῆς ζμ, ἀλλὰ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. οὐ γάρ ἐςιν ὡς ἡ βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως ἡ θκ, πρὸς μείζονά τινα περιφέρειαν τῆς ζη, περιφερείας. Λέγω δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς αὐτήν. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔςω ὡς ἡ βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως ἡ θκ, πρὸς τὴν ζη.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν δζ, ζη, δίχα κατὰ τὰ λ, μ, σημεῖα, καὶ δι' ἑκατέρου τούτων καὶ τοῦ α, πόλου γεγράφθωσαν μέγιςοι κύκλοι, οἱ αλν, αμξ. Ἐπεὶ οὖν αἱ δλ, λζ, ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ βν, ἄρα νθ, κατὰ τὴν ε: τοῦ παρόντος, ἑξῆς μείζους εἰσὶν ἀλλήλων, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίςης τῆς βν. ἡ βθ, ἄρα τῆς θν, μείζων ἐςὶν ἢ διπλῆ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ κθ, τῆς θξ, ἐλάσσων ἐςίν, ἢ διπλῆ. Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν βθ, τῆς θν, μείζων ἐςὶν ἢ διπλῆ, ἡ δὲ θκ, τῆς θξ, ἐλάσσων ἢ διπλῆ, ἡ βθ, ἄρα πρὸς τὴν θν, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κθ, πρὸς τὴν θξ, κατὰ τὸν ζ: ὅρον τοῦ ε: ςοιχειωτοῦ, καὶ ἐναλλὰξ ἡ βθ, ἄρα πρὸς τὴν θκ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ νθ, πρὸς τὴν θξ. ὡς δὲ ἡ βθ, πρὸς τὴν θν, οὕτως ἐςὶν ἡ δζ, πρὸς τὴν ζη, ἡ νθ, ἄρα πρὸς τὴν θξ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δζ, πρὸς τὴν ζη. ὡς δὲ ἡ δζ, πρὸς τὴν ζη, οὕτως ἐςὶν ἡ λζ, πρὸς τὴν ζμ, ἡ νθ, ἄρα πρὸς τὴν θξ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ λζ, πρὸς τὴν ζμ. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἡ θν, πρὸς τὴν λζ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ θξ,

πρὸς

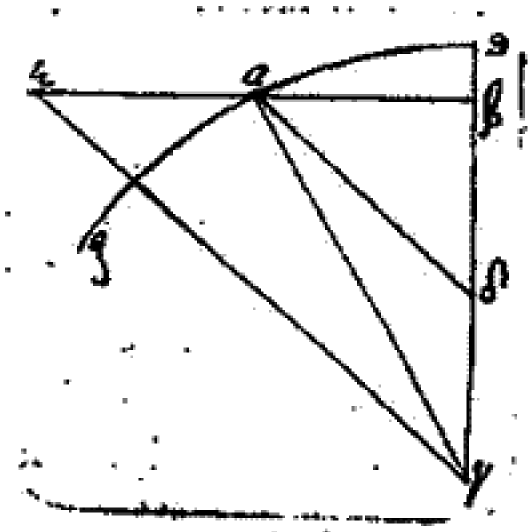
πρὸς τὴν ζμ. ἐὰν ἄρα ποιῶμεν, ὡς τὴν νθ, πρὸς τὴν λζ, οὕτω τὴν θξ, πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσαι πρὸς μείζονα τῆς ζμ, περιφερείας, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως ἡ θκ, πρὸς ἐλάσσονα τῆς ζη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα τῆς ἑπομένης Γ: Προτάσεως.

Ἐὰν ἀπὸ ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρὰν, ὅλη αὕτη πλευρὰ, ἐφ' ἣν πίπτει ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ κατὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν μέρος, ἤπερ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Ἔστω δὴ τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ αβγ, καὶ ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ α, τούτῃ γωνίας ἀχθήτω εὐθεῖα ἡ αδ, ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον πλευρὰν βγ. Λέγω τὴν βγ, ὅλην πλευρὰν τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν βδ, μέρος ἔσαν αὐτῆς, μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν ὑπὸ αδβ, γωνίαν πρὸς τὴν ὑπὸ αγβ. Ἀχθήτω ἡ γε, παραλλήλως τῇ αδ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, ὡς ἀπὸ κέντρου, διαστήματι τῷ αγ, ἀναγεγράφθω κύκλος ὁ ζαθ, ὃς τεμεῖ τὴν μὲν βγ, πλευρὰν, ἐκβληθεῖσαν ἐκτὸς τοῦ β, δηλονότι κατὰ τὸ θ, διὰ τὸ μείζονα εἶναι τὴν αγ, ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τῆς βγ, ὑποτεινούσης τὴν ὀξεῖαν· τὴν δὲ γε, ὡς ὑποτείνουσαν τὴν ἀμβλεῖαν ὑπὸ εαγ, καὶ μείζονα τῆς γα, τεμεῖ ὁ αὐτὸς μεταξὺ τοῦ ε, καὶ γ, τουτέστι κατὰ τὸ ζ.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 14.

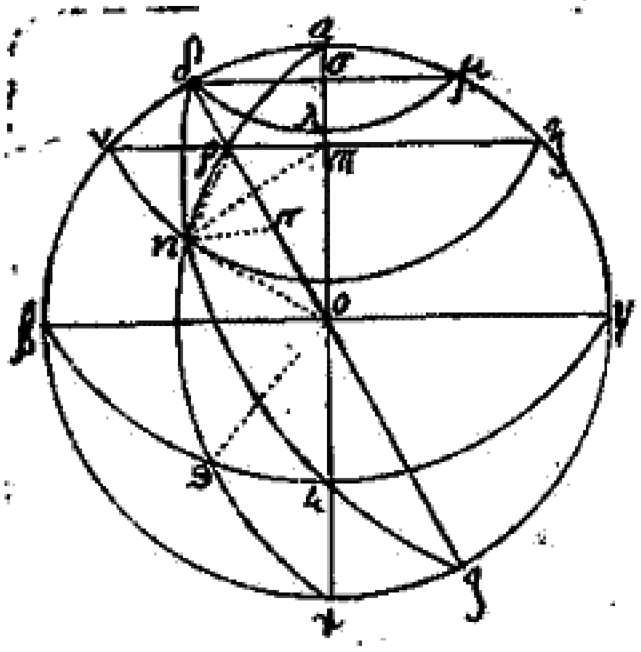


Δείκνυται, κατὰ γὰρ τὴν ἐσχάτην τοῦ ς': τοῦ στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ ὑπὸ ζγα, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ αγθ, οὕτως ὁ ζαγ, τομεὺς πρὸς τὸν αγθ, τομέα, ἀλλ' ἐπεὶ τὸ εγα, τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ζαγ, τομέως, ἄρα κατὰ τὴν ή: τοῦ έ: τοῦ αὐτοῦ, μείζονα λόγον ἔχει τὸ εγα, τρίγωνον πρὸς τὸν αγθ, τομέα, καὶ πολλῷ μείζονα πρὸς τὸ αγβ, τρίγωνον, ἤπερ ἡ ὑπὸ εγα, πρὸς τὴν ὑπὸ αγβ, γωνίαν, καὶ συνθέσει ἄρα τὸ ὅλον εγβ, τρίγωνον πρὸς τὸ αγβ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ εγβ, γωνία, ἤτοι ἡ ὑπὸ αδβ, (ἴσαι γὰρ κατὰ τὴν κή: τοῦ ά: τοῦ αὐτοῦ,) πρὸς τὴν ὑπὸ αγβ. ἀλλ' ὡς τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον, κατὰ τὴν ά: τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ, ἡ βε, βάσις πρὸς τὴν αβ, βάσιν, καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, παράλληλός ἐστι τῇ εγ, ἔσαι ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν αβ, κατὰ τὴν δ': τοῦ ῥηθέντος, οὕτως ἡ βγ, πρὸς τὴν βδ, ἡ βγ, ἄρα πρὸς τὴν βδ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ αδβ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ αγδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων διερχόμενος, τέμνῃ τὸν λοξὸν, μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ οὗ ὁ λοξὸς ἅπτεται, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, οὗ ἐφάπτεται ὁ λοξὸς, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τοῦ τε ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, καὶ τοῦ ἐξῆς διὰ τῶν πόλων, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων.

Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ α β γ, ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ α, σημεῖον, καὶ τὸν α β γ, τεμνέτωσαν δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς οἱ β ε γ, δ ε ζ, ὧν ὁ μὲν β ε γ, μέγιστος τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δ ε ζ, λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ α π κ, διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων, τεμνέτω τὸν δ ε ζ, μεταξὺ τοῦ τε β ε γ, καὶ οὗ ἐφάπτεται ὁ δ ε ζ, οὗ δὲ ἐφάπτεται ὁ δ ε ζ, ἔστω ὁ δ λ μ. Λέγω, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος β γ, πρὸς τὴν τοῦ δ λ μ, κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β θ, περιφέρεια πρὸς τὴν δ η, περιφέρειαν. Γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η, παράλληλος κύκλος ὁ ν η ξ, καὶ ἔστωσαν κοιναὶ τῶν ἐπιπέδων τομαὶ αἱ α κ, δ ζ, β γ, ν ξ, δ μ, θ ο, η π, ο η, η ρ. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ,



Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 15.

κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς δ λ μ, ν η ξ, β ε γ, διὰ τῶν πόλων τέμνει δίχα τε τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὴν ι β': τοῦ α': τοῦ παρόντος, αἱ δ μ, ν ξ, β γ, ἄρα διάμετροί εἰσι τῶν δ λ μ, ν η ξ, β ε γ, κύκλων, καὶ ὁ α β γ, ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς ἕκαστον τῶν δ λ μ, ν η ξ, β ε γ, κύκλων. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι εἰσὶν οἱ δ λ μ, ν η ξ, β ε γ, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν εὐθεῖά τις διήκται ἡ α κ, ἡ α κ, ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἕκαστον τὸν δ λ μ, ν η ξ, β ε γ, κύκλων, καὶ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν τε καὶ τῆς σφαίρας ἐστὶ κατὰ τὴν θ': τοῦ αὐτοῦ: Τὰ σ, π, ο, ἄρα σημεῖα, κέντρα ἐστὶ τῶν δ λ μ, ν η ξ, β ε γ. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ δ λ μ, ν η ξ, β ε γ, ὑπό τινος ἐπιπέδου τοῦ α β γ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ τομαὶ ἄρα αὐτῶν παράλληλοί εἰσιν, αἱ ἄρα δ μ, ν ξ, β γ, παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, κατὰ τὴν ις': τοῦ ι α': τοῦ στοιχειωτοῦ. Πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ν η ξ, β ε γ,

ὑπὸ

ὑπό τινος ἐπιπέδου τοῦ α η κ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ η π, τῇ θ ο. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ υ π, π η, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, τὰς β ο, ο θ, εἰσί, μὴ οὖσαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἴσας γωνίας περιέχουσιν, κατὰ τὴν ιέ: τοῦ αὐτοῦ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ υ π η, γωνία τῇ ὑπὸ β ο θ. καὶ ἐπεὶ οἱ υ η ξ, δ ε ζ, ὀρθοί εἰσι πρὸς τὸν α β γ, κύκλον, καὶ ἡ τῶν υ η ξ, δ ε ζ, κοινὴ τομὴ πάντως ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν α β γ, κύκλον, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ αὐτοῦ, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομή ἐστιν ἡ η ρ. αὕτη ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν α β γ, κύκλον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ α β γ, κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας, κατὰ τὸν γ': τοῦ αὐτοῦ ὅρον, ἅπτεται δὲ τῆς η ρ, ἑκατέρα τῶν π ρ, ρ ο, οὖσαι ἐν τῷ τοῦ α β γ, κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ η ρ π, η ρ ο, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ α κ, τῇ υ ξ, ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ ρ π ο, γωνία ὀρθή ἐστι, πάντως γε ἡ ὑπὸ π ο ρ, ὀξεῖά ἐστι. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ο ρ, τῆς ρ π. Κείσθω οὖν τῇ π ρ, ἴση ἡ ρ τ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ η τ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ π ρ, τῇ ρ τ, κοινὴ δὲ ἡ η ρ, δύο δὴ αἱ π ρ, ρ η, δυσὶ ταῖς τ ρ, ρ η, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ π ρ η, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ τ ρ η, ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ η π, βάσει τῇ η τ, ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ π ρ η, τρίγωνον τῷ τ ρ η, τριγώνῳ ἴσον ἐστι, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ η π ρ, γωνία τῇ ὑπὸ η τ ρ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ η π ρ, τῇ ὑπὸ θ ο β, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ η τ ρ, τῇ ὑπὸ θ ο β, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ τρίγωνον τὸ η ο ρ, ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ ρ, καὶ διῆκταί τις ἡ η τ, ἡ ο ρ, ἄρα κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, πρὸς τὴν ρ τ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ ρ τ η, πρὸς τὴν ὑπὸ ρ ο η, γωνίαν, ἴση δὲ ἡ μὲν ρ τ, τῇ ρ π, ἡ δὲ ὑπὸ ρ τ η, γωνία τῇ ὑπὸ θ ο β, καὶ ἡ ο ρ, ἄρα πρὸς τὴν ρ π, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ β ο θ, πρὸς τὴν ὑπὸ ρ ο η. ἀλλὰ κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τοῦ στοιχειωτοῦ, ὡς μὲν ἡ ο ρ, πρὸς τὴν ο π, οὕτως ἐστὶν ἡ ο δ, πρὸς τὴν δ σ, τουτέστιν ἡ δ ζ, πρὸς τὴν δ μ, ὡς δὲ ἡ ὑπὸ β ο θ, πρὸς τὴν ὑπὸ ρ ο η, γωνίαν, οὕτως ἐστὶν ἡ β θ, περιφέρεια πρὸς τὴν δ η, περιφέρειαν, κατὰ τὴν λγ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ ζ δ, ἄρα πρὸς τὴν δ μ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β θ, περιφέρεια πρὸς τὴν δ η, περιφέρειαν, καὶ ἐστιν ἡ μὲν δ ζ, διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ δὲ δ μ, διάμετρος τοῦ δ λ μ, κύκλου, ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ δ λ μ, κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β θ, περιφέρεια πρὸς τὴν δ μ, περιφέρειαν.

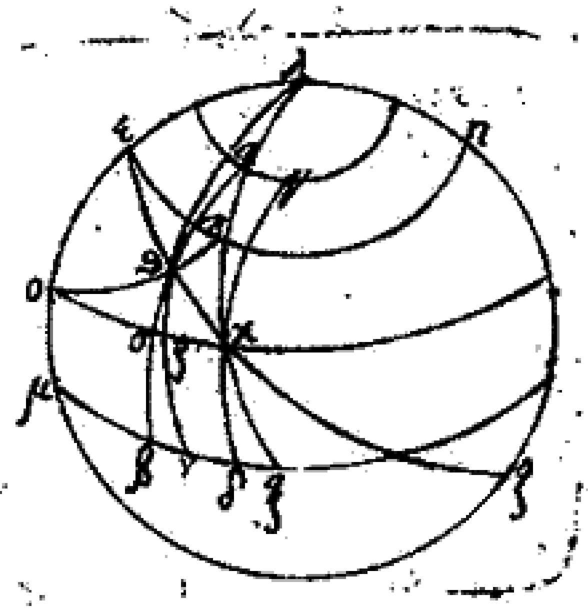
Πρό-

Πρότασις ΙΑʹ. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφάπτωνται, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων μεταξὺ αὐτῶν. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν οἱ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτοντο, καὶ τέμνῃ τοὺς αὐτοῦ ἐφαπτομένους μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ οὗ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτοντο, ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, οὗ ἐφάπτεται ὁ λοξὸς, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων κύκλου περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἐφαπτομένων, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι οἱ α β, γ δ, τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτέσθωσαν τοῦ α γ. κατὰ τὰ α, γ, σημεῖα, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, ὁ ε ζ, μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὧν οἱ α β, γ δ, ἐφάπτονται. καὶ τεμνέτω τὰς α β, γ δ, μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ οὗ οἱ α β, γ δ, ἐφάπτονται, τοῦ α γ, κύκλου. Ἔστω δὲ μέγιστος μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων ὁ μ β ξ. οὗ δὲ ἐφάπτεται ὁ ε ζ, ἔστω ὁ ε η. Λέγω, ὅτι ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ ε η, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β δ, περιφέρεια πρὸς τὴν θ κ, περιφέρειαν. Ἔστω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων, τὸ λ, σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ λ, καὶ ἑκάστου τῶν ε, θ, κ, σημείων, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ λ ε μ, λ θ ν, λ κ ξ. διὰ δὲ τοῦ κ, παράλληλος κύκλος γεγράφθω ὁ ο κ, διὰ δὲ τοῦ θ, μέγιστος ὁ θ π ο, ἐφαπτόμενος τοῦ ε η, κατὰ τὸ π. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο παράλληλοί εἰσι κύκλοι οἱ ο κ, ε π η. καὶ γεγραμμένοι εἰσὶ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ε θ κ ζ, ο θ π, ἐφαπτόμενοι τοῦ ε π η, κατὰ τὰ ε, π. διὰ δὲ τοῦ θ, σημείου καὶ τοῦ λ, πόλου γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ λ θ ρ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ο ρ, τῇ ρ κ, κατὰ τὴν ιβʹ: τοῦ βʹ: τοῦ παρ: καὶ ἡ ρ σ, ἄρα τῆς ρ κ, ἐλάττων ἐστὶν, ἡ σ κ, ἄρα τῆς κ ρ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. ἀλλ' ἡ μὲν σ κ, τῇ β δ, ἐστὶν ὁμοία, κατὰ τὴν θʹ: τοῦ αὐτοῦ. ἡ δὲ κ ρ, τῇ ν ξ, κατὰ τὴν αὐτὴν, καὶ ἡ β δ, ἄρα τῆς ν ξ, ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ε η, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μ ν, περιφέρεια πρὸς τὴν ε θ, περιφέρειαν κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἔχει δὲ ἡ μ ν, περιφέρεια πρὸς τὴν ε θ, περιφέρειαν μείζονα λόγον, ἤπερ ἡ ν ξ,

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 16.



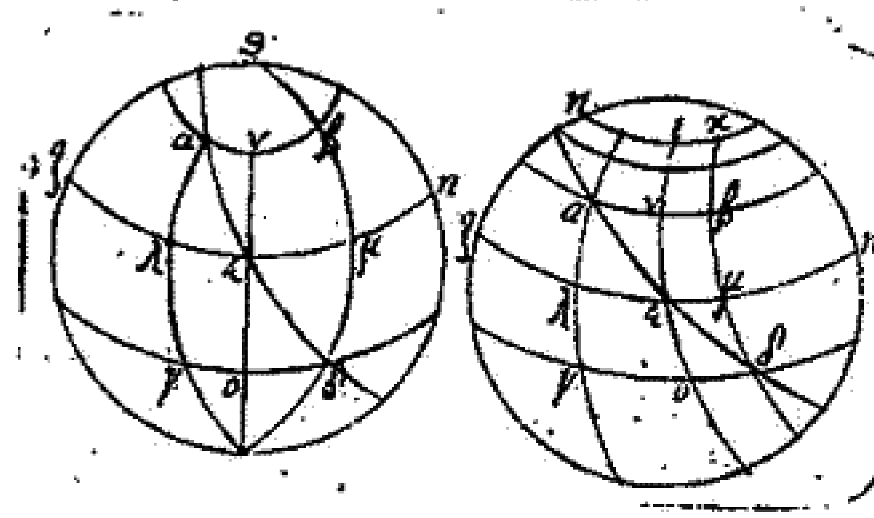
ἡ ν ξ, περιφέρεια πρὸς τὴν θ κ, περιφέρειαν, κατὰ τὴν θ′: τοῦ παρ: καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ε π η, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ν ξ, περιφέρεια πρὸς τὴν θ κ, περιφέρειαν. καὶ τὰ διπλάσια τῶν ἡγουμένων: ἡ ἄρα διπλασία τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ ε π η, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς ν ξ, περιφερείας διπλῆ πρὸς τὴν θ κ, περιφέρειαν, ἡ δὲ τῆς ν ξ, περιφερείας διπλῆ πρὸς τὴν θ κ, περιφέρειαν μείζω λόγον ἔχει ἤπερ ἡ β δ, περιφέρεια πρὸς τὴν θ κ. ἡ γὰρ τῆς ν ξ, διπλῆ, μείζων ἐστὶ τῆς β δ. πολλῷ ἄρα ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ ε π η, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β δ, περιφέρεια πρὸς τὴν θ κ, περιφέρειαν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶσι μεγίστου τινὸς κύκλου πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γινομένων σημείων γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι, ἢ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων διερχόμενοι, ἢ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτόμενοι, ἴσας ἀπολήψονται περιφερείας ἀπὸ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, οἱ α β, γ δ, μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ α δ, περιφερείας τὰς α ε, ε δ, ἀφαιρήτωσαν ἴσας, πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ζ ε η. καὶ διὰ τῶν α, ε, δ, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν, οἱ ἤτοι διὰ τοῦ θ, πόλου διαβαίνουσιν, ἢ ἅπτονται τοῦ η κ, παραλλήλου. καὶ τεμνέτωσαν τὸν μέγιστον παράλληλον ζ ε η, κατὰ τὰ λ, ε, μ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι τὰ λ ε, ε μ, τόξα ἴσα εἰσιν. Ἐπεὶ οὖν τὰ α ε, ε δ, τόξα ἴσα ἐστι, πάντως γε κατὰ τὴν ι ϛ′: τοῦ β′: τοῦ παρόντος, οἱ α β, γ δ, παράλληλοι, ἴσοι εἰσι, καὶ κατὰ τὴν ι ζ′: τοῦ αὐτοῦ, τὰ λ α, β μ, δ μ, λ γ, ε ν, ε ο, τόξα, ἴσα ἐστι, καὶ κατὰ τὴν β′: τοῦ παρόντ: αἱ α ν, ο δ, ἐπιζευγνύουσαι τὰ ε α, ε ν, ε δ, ε ο, τόξα ἴσα, ἴσαι εἰσι, καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν κ ή: τοῦ γ′: στοιχ: τὰ ο δ, α ν, τόξα ἴσα ἐστι. ἀλλ᾽ ἐπὶ μὲν τοῦ α: σχήματος, τὰ ο δ, ε μ, ὥσπερ καὶ τὰ α ν, λ ε, κατὰ τὴν θ′: τοῦ β′: τοῦ παρόντος, ὅμοιά εἰσιν, ἄρα καὶ τὰ λ ε, ε μ, ὅμοιά εἰσι, καὶ ἐπεί εἰσι τμήματα τοῦ αὐτοῦ κύκλου, πάντως γέ εἰσι καὶ ἴσα. ἐπὶ δὲ τοῦ β′: σχήματος, τὰ α ν, λ ε, καὶ ἔτι τὰ ο δ, ε μ, τόξα ὅμοιά εἰσι κατὰ τὴν ι β′: τοῦ αὐτοῦ. ἄρα τὰ λ ε, ε μ, τόξα ἴσα εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 17.



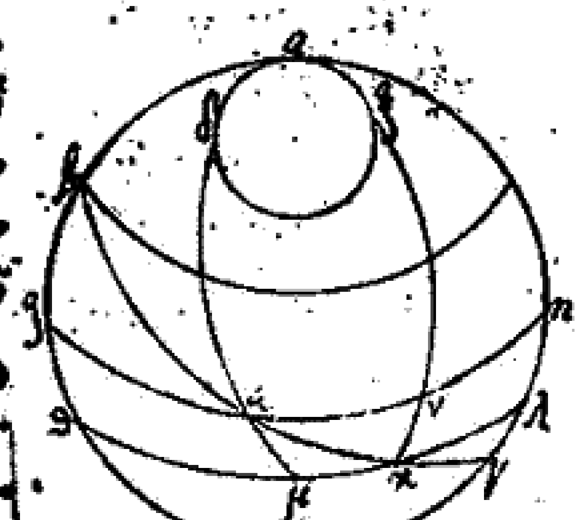
Πρό-

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο, ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες, ἢ ὅμοιαι ἔσονται ἀεὶ, αἱ ἔγγιον ὁποτέρου τῶν πόλων τῆς πορρώτερον.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγ, κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ αδξ, ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ α, σημεῖον. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ βεγ, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὧν ὁ αβγ, ἐφάπτεται. Λέγω, ὅτι ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες, ἢ ὅμοιαι ἔσονται ἀεὶ αἱ ἔγγιον ὁποτέρου τῶν πόλων τῆς πορρώτερον. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τοῦ βγ, λοξοῦ κύκλου δύο σημεῖα τυχόντα τὰ ε, κ, καὶ διὰ τῶν ε, κ, σημείων, γεγράφθωσαν κύκλοι παράλληλοι τῷ αδξ, οἱ ζεη, θκλ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν εη, περιφέρεια τῆς κλ, περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ἡ δὲ θκ, περιφέρεια τῆς ζε, περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. Γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν ε, κ, σημείων μέγιστοι κύκλοι, οἱ δεμ, ξνκ, ἐφαπτόμενοι τοῦ αδξ. ὥστε ἀσύμπτωτα εἶναι, τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ δ, ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ μ, μέρη, τῷ ἀπὸ τοῦ α, ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὰ θ, μέρη, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ ξ, ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ κ, μέρη, τῷ ἀπὸ τοῦ α, ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὰ λ, μέρη. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμπτωτά ἐστι τὰ αλ, ξκ, ἡμικύκλια, καὶ μεταξὺ αὐτῶν, κύκλων περιφέρειαί εἰσιν αἱ νη, κλ, ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ νη, περιφέρεια τῇ κλ, περιφερείᾳ κατὰ τὸ ιβ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ζε, τῇ θμ, ἐστὶν ὁμοία, καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ νη, περιφέρεια τῇ κλ, περιφερείᾳ, ἡ ἄρα εη, περιφέρεια, μείζων ἐστὶ τῆς κλ, περιφερείας, ἢ ὁμοία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θκ, τῆς ζε, μείζων ἐστὶν, ἢ ὁμοία. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 18.



Τέλος τοῦ Τρίτου τῶν κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικῶν.

ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΥ ΤΟΜΟΥ.

ΕΥΜΕΝΗΣ ΑΝΑΓΝΩΣΤΑ.

ΟΡΑ, ΑΝΑΠΟΛΗΣΟΝ, ΚΑΙ ΣΥΓΓΝΩΘΙ.

Πέρας τοῦ τυποῦσθαι τὸν παρόντα τόμον ἰδὼν, ἐπανέλαβον, καὶ ὡς οἷόν τε ἐπιμελῶς διεξιὼν, ἐνέτυχόν τισι παροράμασι περὶ τὴν διόρθωσιν, ἅτινα, ὡς ὁρᾷς ἐνταυθοῖ τοῖς ἐπανωρθωμένοις παρακείμενα, ἀντικρὺς τῆς σελίδος καὶ στίχου παρασεσημειωμένων, σπουδαιότερον φέρει σύμβολον ἐπιμελείας εὐκαίρου, ἢ ῥαθυμίας ἀκαίρου, οὔτε μιᾶς γραφίδος ἢ παρόψεως αἴτιον, ἀλλὰ κατὰ τὸν εἰπόντα, μᾶλλον Μήρην ἔρδα.

Σελ.	στίχ.	Ἐσφαλμ.	Ἐπανωρθωμ.
xxxiii	κ η.	μωνίαν	γωνίαν,
1	12	κηπορῷ	κηπουρῷ·
2	4	εὐθαλὴς	εὐθαλῆ,
2	30	κλεῖν,	κλεῖν·
10	9	ἐπιφανείας	ἐπιφανείας,
10	21	Ἐπίπεδος	ἐπίπεδος
11	12	ἐπίπεδων	ἐπιπέδων.
11	12	εἴσιν	εἴσιν,
11	15	ὑπο	ὑπὸ,
11	24	περιφαρῆς	περιφερῆς.
13	3	οἰκεῖα	οἰκεία.
13	16	πλειόντων	πλειόνων.
14	15	λαμβαμενης.	λαμβανομένης.
14	32	πρῶτόν φασὶ	πρῶτόν φασι,
15	7	τὴς	τῆς
15	20	μεῖξόν	μεῖζον,
15	28	σφαίρα	σφαῖρα
15	33	ὑπὸ τῦ	ὑπό τῦ
16	11	πραῦδον	πραέδου
16	12	ὠεῖσαντο	ᾠείσαντο
16	22	περὶ απλᾶίρων	περὶ απλαίρων,
16	23	κἀντοῖς	καὶ τοῖς
16	31	ὑπ'	ὄπ'
20	22	πραγματεῦεται	πραγματεύεται.
21	5	πεπρασμενης	πεπερασμένης
22	28	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
22	31	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
23	21	ἀξιώμα	ἀξίωμα,
24	3	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
24	12	ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι	ἄλλας δύο εὐθείας ἴσας,
24	12	ἑκατέρα	ἑκατέραν;
24	13	ἔχυσαι	ἐχύσας,
24	25	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
24	26	εὐθείαις	εὐθείας.
25	18	ἀνωτέρῳ	ἀνωτέρω.
27	18	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
27	33	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
28	2	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
28	13	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
30	7	ἀξιώμα	ἀξίωμα,
32	15	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
32	26	ἀνωτέρῳ	ἀνωτέρω
33	11	ἀξιώμα	ἀξίωμα,
35	6	μωνίαν τῆ	γωνίαν τῇ
35	21	εἶσαι	ἴσαι
35	21	ἴσαι εἰσὶ	ἴσαί εἰσι
35	24	δεῖζαι	δεῖξαι.
36	9	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
36	11	εἶσαί	ἴσαί
36	25	ἀξιώμα	ἀξίωμα
37	24	ἀξιώμα	ἀξίωμα
39	9	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
39	13	ἀξιώμα	ἀξίωμα
41	30	δοθείσει	δοθείσῃ
57	20	τὴν μζ, τῦ παρόντος,	τὴν μζ: παρελθόντος.
60	15	ὁρισκῶς	ὁριστικῶς

Σελ.	σίχ.	Ἔσφαλμ.	Ἐπανώρθωμ.
71	3	λειφθῇ	ληφθῇ
71	28	δεῖξαις	δεῖξαι
71	34	περόντος	παρόντος
72	22	μάλλον	μᾶλλον
104	4	αἱ	φασὶ
113	31	ἐντῇ	ἐν τῇ
125	35	ὑποσαῦν	ὁποσαοῦν.
126	29	δδίεδρον	δίεδρον
130	28	τὸ γ.	τῷ γ.
164	26	περαλληλό- γραμμοῦ.	παραλληλό- γράμμου.
165	27	γώμων	γνώμων
165	31	γώμονι	γνώμονι,
166	29	γώμονι	γνώμονι.
179	16	ἀριθὸς ἀριθ- μοῦ μέρη,	ἀριθμὸς ἀριθ- μοῦ μέρος
179	17	τὰ αὐτὰ μέρη	τὸ αὐτὸ μέρος,
179	18	τὰ αὐτὰ μέρη ἔσαι, ἅπερ	τὸ αὐτὸ μέρος ἔσαι, ὅπερ
205	8	τὸν παρόντος	τοῦ παρόντος
240	2	σημειωτοῖς.	σημειωτός.
244	4	τοῦτο τὸ δὲ	τοῦτο δὲ
250	7	ἀπτομέναι	ἀπτόμεναι
250	7	περὶ	παρὰ
250	8	ἀπτομένας	ἀπτομένας
250	12	περὶ	παρὰ
251	2	τέτμηται	τέμνηται,
257	4	αἱ αβ,	ἡ αβ,
267	22	παραλληλεπί- δα.	παραλληλεπί- πεδα.
270	22	ἴσωται	ἴσωσαι,
279	30	τμήματι	τμήματι.
282	5	ἀπτομαένας	ἀπτομένας,
288	1	πυραμίδι	πυραμίδι,
291	26	ἡμισὴ ἐςι	ἡμίση ἐςὶ
335	20	τὸν παρὰ	τὸν πατέρα
336	7	τῶν βα,	τῶν βγ,
336	10	αἱ δγ, δζ,	αἱ δγ, γζ.
336	27	τρισκαιδικάτῳ,	τρισκαιδεκάτῳ,
339	25	ἐγγαγράφθαι,	ἐγγεγράφθω,
354	25	τῶν κεύβον	τῶν κύβων.
363	28	κεύβου.	κύβου.
383	12	ἐναπολειπέμε- να.	ἐναπολειπόμε- να.
387	11	μέρων	μερῶν.
398	28	πόειμα	πόρισμα.
415	18	τύπου	τούτου