μένου τοῦ ἀπὸ τῆς αθ, τετραγώνου, πάντως γε τὰ ἀπὸ τῶν αθ, θε, τετράγωνα μέγιστά εἰσιν, ἐλάχιστα δὲ τὰ ἀπὸ τῶν αθ, θβ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αθ, θδ, μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν αθ, θγ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αθ, θε, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αθ, θβ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αθ, θδ, τὸ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αθ, θγ, τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἄρα ἡ μὲν αε, μεγίστη ἐστὶ, καὶ διέρχεται ὑπὸ τὸν πόλον, ἡ δὲ αβ, ἐλαχίστη, καὶ ἡ αδ, μείζων τῆς αγ. ὅπερ ἦν τοῦ ὑποκειμένου τὸ α'.

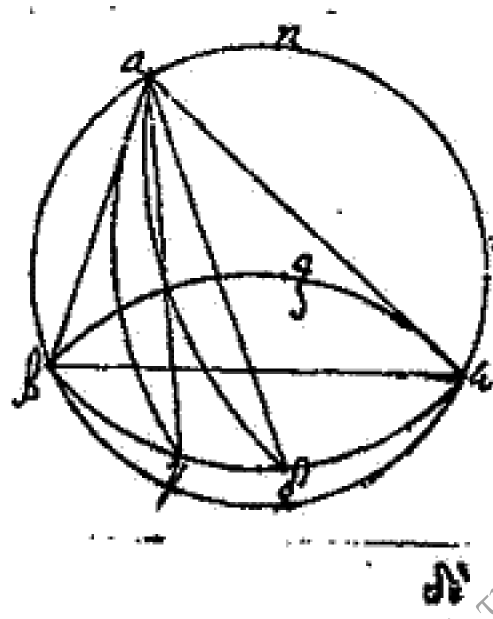
Ὅτι δὲ δύο ἐφ' ἑκάτερα τῆς θε, ἢ θβ, μόνον εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ α, προσπίπτουσι σημείου ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, δῆλον, κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν ζ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ δύο ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης θβ, ἀπὸ τοῦ θ, σημείου μόνον προσπίπτουσιν εὐθεῖαι, ὡς αἱ θγ, θζ, ὥστε κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ ἀπὸ τῆς αθ, τὰ ἀπὸ τῶν αθ, θγ, τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αθ, θζ, καὶ κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα ἴσα εἰσὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ, αζ, ἄρα καὶ ἡ αγ, ἴση ἐστὶ τῇ αζ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ αδ, τῇ ακ, ἴση. ὅπερ ἦν τὸ β': Λείπεται οὖν δεῖξαι ὅτι καὶ ἡ αθ, ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου πίπτει.

Γραφήτω δὴ διὰ τῶν α, καὶ η, σημείων κύκλος μέγιστος ὁ αβλε, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, καὶ ἔσται κοινὴ τομὴ αὐτοῦ τε καὶ τοῦ βγδεζ, κύκλου ἡ βθε, ἀλλ' ὁ αβλε, κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδεζ, κύκλου ἐπίπεδον κατὰ τὴν ιβ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ διὰ τῆς αθ, διέρχεται. ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ πρὸς τὸ τοῦ βγδεζ, κύκλου ἐπίπεδον, ἄρα κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ ια': τοῦ στοιχειωτοῦ ἡ αθ, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὴν βε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν κύκλου τινὸς πόλος, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τόξα μεγίστων κύκλων ἀχθῶσι, μέγιστον μέν ἐστι τὸ διὰ τοῦ πόλου τοῦ κύκλου, ἐλάχιστον δὲ τὸ λοιπόν, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ διὰ τοῦ πόλου τοῦ ἀπώτερον μεῖζόν ἐστι. δύο δὲ μόνα ἴσα ἀχθήσονται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τοῦ τε μεγίστου καὶ ἐλαχίστου.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 23.



Ληφθήτω τὸ α, τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ ἀχθήτωσαν ἀπ' αὐτοῦ τόξα μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ βγδεζ, κύκλου, οὗ πόλος τὸ η, σημεῖον, τὰ αβ, αγ, αδ, αε. Λέγω τὸ αε, τὸ διὰ τοῦ η, πόλου διερχόμενον μέγιστον εἶναι, τὸ δὲ αβ, ἐλάχιστον, καὶ τὸ αδ, τοῦ αγ, μεῖζον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, αγ, αδ, αε, ὑποτείνουσαι. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ μὲν αε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ

δὲ

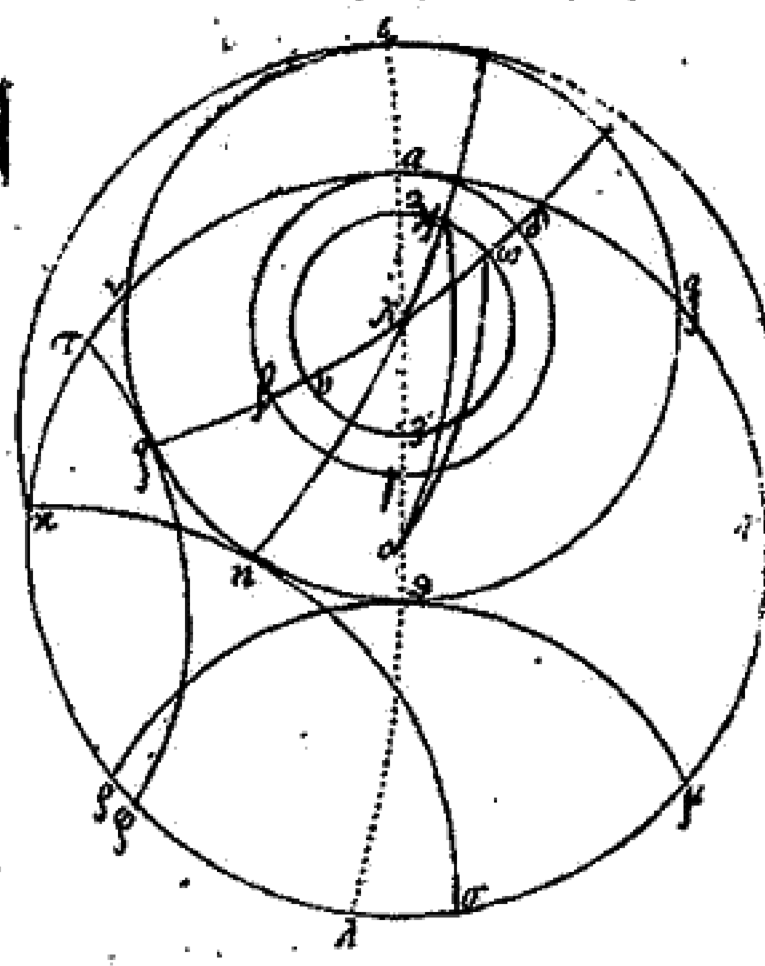
δὲ αβ, ἐλαχίστη, καὶ ἡ αδ, μείζων τῆς αγ, κατὰ δὲ τὴν κη΄: τοῦ γ΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, ἐπὶ τῶν ἴσων κύκλων αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ὑποτείνουσι; πάντως γε τὸ αηε, τόξον μέγιστόν ἐστιν, ὅτι καὶ ἡ αε, ὑποτείνουσα μεγίστη, ὡς δέδεικται, τὸ δὲ αβ, ἐλάχιστον, ὅτι γε καὶ ἡ αβ, ἐλαχίστη, καὶ τὸ αδ, μεῖζον τοῦ αγ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, μείζων ἐστὶ τῆς αγ. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ αηε, μεγίστου τόξου, καὶ αβ, ἐλαχίστου δύο ἴσα τόξα μόνα ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἄγονται, ὅτι καὶ ἐφ' ἑκάτερα τῆς αε, ἢ αβ, ὑποτεινούσης δύο μόναι εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ α, προσπίπτουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΓ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἅπτηται μὲν τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παραλλήλων, τέμνῃ δὲ τὸν μείζονα, ὥστε τὸν πόλον αὐτοῦ μεταξὺ εἶναι τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ἅπτωνται δὲ καὶ τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων κύκλοι μέγιστοι ὁσοιδηποτοῦν, οἱ πόλοι τῶν ἁπτομένων τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων ἐν τῇ περιφερείᾳ τοῦ αὐτοῦ εἰσι κύκλου, παραλλήλου ὄντος καὶ αὐτοῦ τοῖς ἐξ ἀρχῆς παραλλήλοις, ἐλάττονος δὲ ἑκατέρου, καὶ πρὸς τὸν ἁπτόμενον τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐξ ἀρχῆς παραλλήλων, ὁ μὲν τοῦ μείζονος ἁπτόμενος, καθ' ὃ τὸ ἔλαττον αὐτοῦ τμῆμα δίχα τέμνεται, μεγίστην ἔχει τὴν κλίσιν, ὁ δὲ, καθ' ὃ τὸ μεῖζον αὐτοῦ τμῆμα δίχα τέμνεται ἁπτόμενος, ἐλαχίστην ἔχει τὴν κλίσιν πρὸς τὸν αὐτὸν, τῶν δ' ἄλλων ὁ ἐγγύτερον τοῦ τὴν μεγίστην ἔχοντος κλίσιν τοῦ ἀπώτερον μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ αβγδ, εζηθ, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος αβγδ, ἁπτέσθω ὁ ακλμ, μέγιστος κύκλος κατὰ τὸ α, τὸν δὲ μείζονα εζηθ, τεμνέτω κατὰ τὰ ν, καὶ ξ, σημεῖα, καὶ ἔσω ὁ τοῦ εκλμ, κύκλου πόλος μεταξὺ τοῦ αβγδ, εζηθ, δὸς εἰπεῖν, ἔνθα τὸ ο, σημεῖον, ἁπτέσθωσαν δὲ καὶ τοῦ εζηθ, μείζονος παραλλήλου οἱ κεπ, μθρ, κησ, τζφ, μέγιστοι κύκλοι. Λέγω τοὺς πόλους τῶν κεπ, μθρ, κησ, τζφ, μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας εἶναι τοῦ αὐτοῦ κύκλου, παραλλήλου μὲν τοῖς αβγδ, καὶ εζηθ, ἐλάττονος δὲ ἑκατέρου, καὶ τὸν μὲν κεπ, μεγίστην ἔχειν τὴν κλίσιν πρὸς τὸν ακλμ, τὸν δὲ μθρ, ἐλαχίστην, καὶ τὸν τζφ, μᾶλλον ἐγκλινόμενον εἶναι πρὸς τὸν αὐτὸν ακλμ, ἢ τὸν κησ. Εὑρεθήτω δὴ ὁ πόλος τῶν αβγδ, εζηθ, παραλλήλων κατὰ τὴν ιζ΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, καὶ ἔσω οὗτος ὁ χ, καὶ διὰ τῶν α, καὶ θ, σημείων γραφήτω μέγιστος κύκλος κατὰ τὴν ις΄: τοῦ αὐτοῦ ὁ εαθλ, ὅστις καὶ διὰ τοῦ χ, διελεύσεται κατὰ τὴν γ΄: καὶ δ΄: τοῦ παρόντος, γραφήτωσαν δ' ἔτι κατὰ τὴν ῥηθεῖθεῖσαν ιϛ΄: οἱ ηχψ, ζχω, μέγιστοι κύκλοι. καὶ ἐπεὶ τὸ οα, τόξον τεταρτημόριόν ἐστι κατὰ τὸ πόρ: τῆς ιγ΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, ληφθήτωσαν ἴσα τῷ οα, τὰ θ 2, ηψ, ζω, καὶ ε 3, τόξα. ὅτι μὲν οὖν οἱ κεπ, μθρ, κησ, τζφ, μέγιστοι κύκλοι ἐγκλινόμενοί εἰσι τῷ ακλμ, δῆλον. οὐδεὶς γὰρ διὰ τοῦ ο, πόλου διέρχεται. ἐπεὶ τὰ θ 2, ηψ, ζω, καὶ ε 3, τόξα τεταρτημόριά εἰσι κατὰ τὴν κατασκευήν, πάντως γε τὸ μὲν 2, σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ μθρ, κατὰ τὸ αὐτὸ πόρ: τὸ δὲ ψ, τοῦ κησ, τὸ δὲ ω, τοῦ τζφ, καὶ τὸ 3, τοῦ κεπ. ἀλλὰ τὰ θχ, ηχ, ζχ, εχ, ἴσα εἰσὶ κατὰ τὸν ϛ΄: ὅρον τοῦ α΄: τοῦ παρ: ἄρα κατὰ τὸ γ΄: ἀξίωμα τοῦ στοιχ: ἀφαιρουμένων τῶν θχ, ηχ, ζχ, εχ, ἀπὸ τῶν θ 2, ηψ, ζω, ε 3, ἐναπολειφθήσονται τὰ χ 2, χψ, χω, καὶ χ 3, ἴσα. ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ χ, διαστήματι δὲ τῷ χ 2, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν ψ, ω, 3, σημείων. ἔστι δὲ τὸ μὲν 2, πόλος τοῦ μθρ, τὸ δὲ ψ, τοῦ κησ, τὸ δὲ ω, τοῦ τζφ, καὶ τῷ 3, τοῦ κεπ, κατὰ τὸ πόρ: τῆς ῥηθείσης ιγ΄: τοῦ παρόντος, ἄρα οἱ πόλοι τῶν κεπ, μθρ, κησ, τζφ, ἐν τῇ περιφερείᾳ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ 2υ3ω, ὅς παράλληλός τε ἐστὶ τοῖς αβγδ, εζηθ, διὰ τὸ ἔχειν τὸν αὐτὸν πόλον αὐτοῖς, καὶ ἐλάττων ἑκατέρου, διὰ τὸ ἔλαττον εἶναι τὸ τόξον χ 2, τοῦ τε χα, καὶ χε. ὅπερ ἔδει τὸ α΄:

Theod. Sf. Lib.2. Fig.24.



Αὖθις ἐπεὶ τὸ θ 2, τεταρτημόριόν ἐστι, πάντως γε τὸ οχ, ἔλαττόν ἐστι τεταρτημορίου. ὥστε τὸ ο, οὐκ ἔστιν ὁ ἕτερος πόλος τοῦ 2υ3ω. οἱ γὰρ πόλοι παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἡμικυκλίῳ ἀφίστανται, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τὸ ο 2, τόξον μέγιστόν ἐστιν, ἐλάχιστον δὲ τὸ ο 3, καὶ τὸ οψ, μεῖζον τοῦ οω. ἀλλὰ τὸ ο, πόλος ἐστὶ τοῦ ακλμ, μεγίστου κύκλου, τοῦ ἁπτομένου μὲν τοῦ αβγδ, τέμνοντος δὲ τὸν εζθξ, τὸ δὲ 2, ὁμοίως πόλος ἐστὶν τοῦ μθρ, ἁπτομένου τοῦ εζθξ, μείζονος παραλλήλου κατὰ τὸ θ, τὸ δὲ 3, τοῦ κεπ, ἁπτομένου τοῦ αὐτοῦ κατὰ τὸ ε, τὸ δὲ ψ, τοῦ κησ, καὶ τὸ ω, τοῦ τζφ. ἄρα ὁ πόλος τοῦ κεπ, ἐλαχίστην ἔχει τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ο, πόλου τοῦ ακλμ, ὁ δὲ πόλος τοῦ μθρ, μεγίστην, ὁ δὲ τοῦ κησ, μείζονα, ἢ ὁ τοῦ τζφ, πόλος. ἀλλ᾽ ὁ μὲν κεπ, ἅπτεται τοῦ εζθξ, μείζονος παραλλήλου κατὰ τὸ ε, καθ᾽ ὃ δίχα τέμνεται τὸ νεξ, ἔλαττον αὐτοῦ τμῆμα, ὁ δὲ μθρ, ἅπτεται τοῦ αὐτοῦ κατὰ τὸ θ, καθ᾽ ὃ δίχα τέμνεται τὸ νθξ, μεῖζον τοῦ αὐτοῦ τμῆμα, καὶ ὁ τζφ, ἐγγύτερός ἐστι τοῦ κησ.

Ὅτι δὲ τὸ ν ε ξ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ν θ ξ, τόξου δῆλον. ὁ γὰρ τοῦ ε ζ θ ξ, πόλος ἐντός ἐστι τοῦ α κ λ μ. ὥστε κατὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ ι ή: τὸ ὅρου τοῦ α: τοῦ στοιχειωτοῦ, τὸ μὲν ν ε ξ, τόξον ἔλαττόν ἐστι, τὸ δὲ ν θ ξ, μεῖζον. Ὅτι δὲ καὶ δίχα ἑκάτερον τέμνεται, δείκνυται διὰ τῆς ή: τοῦ α: τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

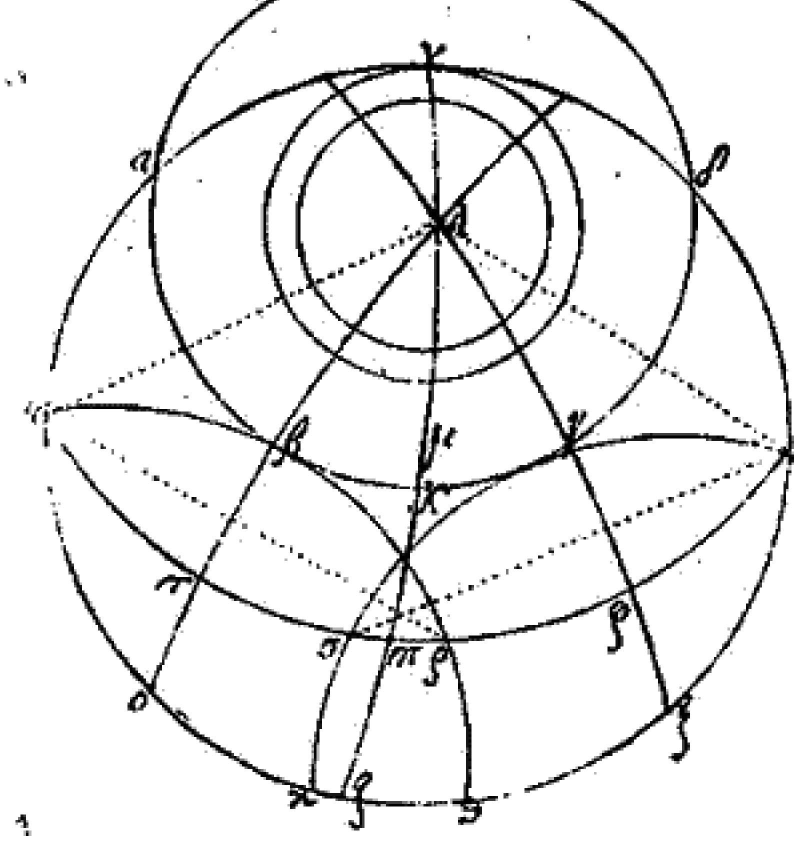
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οἱ ἐξ ἴσου ἀφιστάμενοι τοῦ τὴν μεγίστην ἔχοντος κλίσιν, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοί εἰσι.

Πρότασις ΚΔ′: Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μεγίστου τεμνομένου κύκλου κύκλοι μέγιστοι ἅπτωνται, καὶ τὰ τῶν ἁπτομένων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν ἁφῶν καὶ κοινῶν τομῶν αὐτῶν τε καὶ τοῦ τέμνοντος ἐμπεριλαμβανόμενα ἴσα ὦσιν, οἱ μέγιστοι ἐκεῖνοι κύκλοι ἐξ ἴσου εἰσὶν ἐγκλινόμενοι τῷ τέμνοντι κύκλῳ.

Ἁπτέσθωσαν τοῦ α β γ δ, ἐλάσσονος κύκλου, ὑπὸ τοῦ α ε ζ η δ, μεγίστου τεμνομένου, οἱ ε β θ, η γ κ, κατὰ τὰ β, καὶ γ. καὶ ἔστωσαν τὰ ε β, γ η, τόξα τὰ μεταξὺ τῶν τε β, καὶ γ, ἁφῶν, καὶ τῶν ε, καὶ η, κοινῶν τομῶν, τῶν τε ε β θ, η γ κ, καὶ α ζ δ, κύκλων ἴσα. Λέγω τοὺς ε β θ, η γ κ, ἐξ ἴσου εἶναι ἐγκλινομένους τῷ α ζ δ, τέμνοντι. Εὑρεθήτωσαν δὴ οἱ πόλοι τοῦ τε α β γ δ, καὶ α ζ δ, κύκλου κατὰ τὴν ι ζ′: τοῦ α′: τοῦ παρόντος. καὶ ἔστω τοῦ μὲν α β γ δ, πόλος τὸ λ, σημεῖον, τοῦ δὲ α ζ δ, τὸ μ, καὶ γραφήτω διὰ τῶν λ, καὶ μ, κύκλος μέγιστος ὁ ζ μ λ ν, κατὰ τὴν ι ς′: τοῦ αὐτοῦ. γραφέτωσαν δ᾽ ἔτι κατὰ τὴν αὐτὴν, καὶ οἱ λ γ ξ, λ β ο, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων τοῦ τε α β γ δ, καὶ κ γ η, ε β θ, ἀπτομένων διερχόμενοι. οἵγε καὶ διὰ τῶν β, καὶ γ, ἁφῶν διελεύσονται κατὰ τὴν γ′: τοῦ παρόντος. Δείκνυται.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 25.



Ἐπεὶ οὖν οἱ λ β ο, ε β θ, μέγιστοι κύκλοι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλους τέμνουσι, κατὰ τὸ πόρ: τῆς ι β′: τοῦ παρόντος, πάντως γε τὸ τοῦ λ β ο, ἡμικύκλιον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ε β θ, κύκλον. ὡσαύτως καὶ τὸ τοῦ λ γ ξ, ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν κ γ η, κύκλον, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λ β, λ γ, τόξα ἴσα κατὰ τὸν ε′: ὅρον τοῦ α′: τοῦ παρόντος,

ἄρα

ἄρα ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ε β θ, η γ κ, μεγίστων κύκλων ἐφίστανται ὅμοια τόξα πρὸς ὀρθάς, καὶ εἴληπται ἀπ' αὐτῶν τόξα ἴσα τὰ β λ, γ λ, εἴληπται δὲ καὶ ἀπὸ τῶν ε β θ, η γ κ, κύκλων ἴσα τόξα κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὰ ε β, γ η, ἄρα κατὰ τὴν ι α: τοῦ παρόντος, αἱ λ ε, λ η, εὐθεῖαι ἐπιζευχθεῖσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὥστε ὁ ἀπὸ τοῦ λ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ λ ε, γραφόμενος κύκλος, ἐλεύσεται καὶ διὰ τοῦ η, καὶ παράλληλος ἔσται τῷ α β γ δ. Αὖθις ἐπεὶ ὁ λ β ο, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων διέρχεται τῶν ε β θ, ε π η, τεμνομένων ἀλλήλων, πάντως γε κατὰ τὴν η: τοῦ παρόντος τὰ ε β ρ, ε σ ρ, τμήματα δίχα τέμνει, ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ ε β, β ρ, καὶ ε τ, τ ρ. διὰ τὰ αὐτὰ ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ η γ, γ σ, η φ, φ σ. ἀλλὰ τὰ ε β, η γ, ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὸ ὅλον ε β ρ, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ η γ σ, καὶ ἑπομένως αἱ ε ρ, η σ, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κθ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, αἱ δὲ ε ρ, η σ, ὑποτείνουσι καὶ τὰς ε π ρ, η φ σ, περιφερείας, ἄρα κατὰ τὴν κη': τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ ε τ ρ, η φ σ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ε τ, η φ, ἴσαι εἰσίν, ὡς δέδεικται, ἄρα αἱ τ ρ, φ σ, ἴσαι εἰσί, κοινῆς οὖν ἀφαιρουμένης τῆς σ ρ, περιφερείας, ἐναπολείπεται τὰ τ σ, ρ φ, τόξα ἴσα, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ε τ, η φ, ἴσα, ὡς ἤδη εἴρηται, ὅλον ἄρα τὸ ε τ σ, ὅλῳ τῷ η φ ρ, ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν η: τοῦ παρόντος καὶ τὰ ε π, π η, ἴσα ἐστίν, ὁ γὰρ ν μ ζ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων διέρχεται τῶν α ζ δ, ε π η, τεμνομένων κύκλων. ἄρα ἀφαιρουμένων τῶν ε τ σ, η φ ρ, ἴσων, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ σ π, π ρ, εἰσὶ δὲ ὡς δέδεικται καὶ τὰ σ τ, ρ φ, ἴσα, ὅλον ἄρα τὸ τ π, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ π φ, ἀλλὰ τὰ β χ, χ γ, ὅμοιά εἰσι τοῖς τ π, π φ, τόξοις, διὰ τὸ ὁμοκέντρους εἶναι τοὺς α β γ δ, ε π η, κύκλους, ἄρα καὶ τὰ β χ, χ γ, ἴσα εἰσί, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς αὐωτέρω οἱ ε β θ, η γ κ, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοί εἰσι τῷ α β γ δ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μεγίστου τεμνομένου κύκλου, κύκλοι μέγιστοι ἅπτωνται, καὶ τὰ τῶν ἁπτομένων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν ἁφῶν καὶ κοινῶν τομῶν αὐτῶν τε καὶ τοῦ τέμνοντος, ἐμπεριλαμβανόμενα ἴσα ὦσιν, οἱ μέγιστοι ἐκεῖνοι κύκλοι ἐξ ἴσου εἰσὶν ἐγκλινόμενοι τῷ τέμνοντι κύκλῳ.

Τέλος τοῦ Δευτέρου τῶν κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικῶν.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ

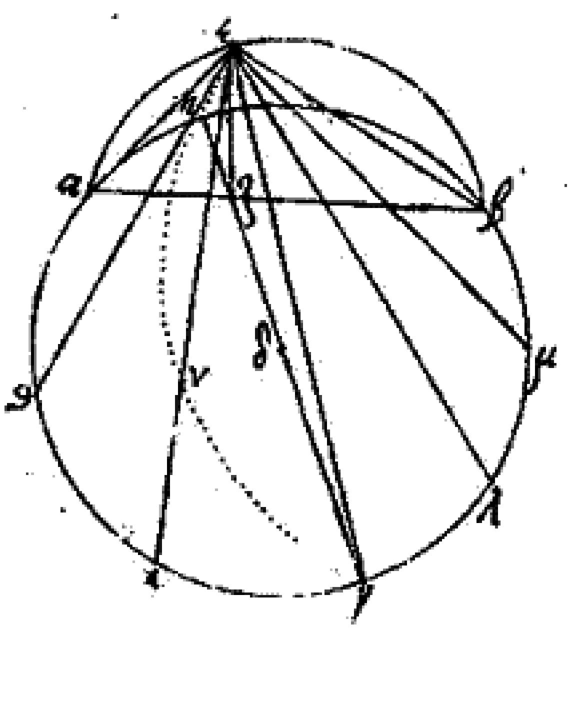
ΚΑΤΑ ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ ΤΟΝ ΤΡΙΠΟΛΙΤΗΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

Πρότασις Α΄. Θεώρημα.

Ἐὰν τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἢ ἐγκλινόμενον ᾖ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἑτέρου τινὸς κύκλου, τέμνον τὸν αὐτὸν κύκλον εἰς δύο ἄνισα, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ τμήματος περιφερείας, ὥστε τὸ τμῆμα εἰς δύο κατ' αὐτὸ ἄνισα τέμνεσθαι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν τοῦ κύκλου μείζονα περιφέρειαν εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ τὸ ἔλαττον τοῦ τμήματος ὑποτείνουσα τόξον, ἀφ' ἧς αὔξονται μὲν ἄχρι τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἡ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου κάθετος πίπτει, ἐλαττοῦνται δὲ ἕως ἂν πρὸς τὴν αὐτὴν ἀποκατασταθῶσι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 1.

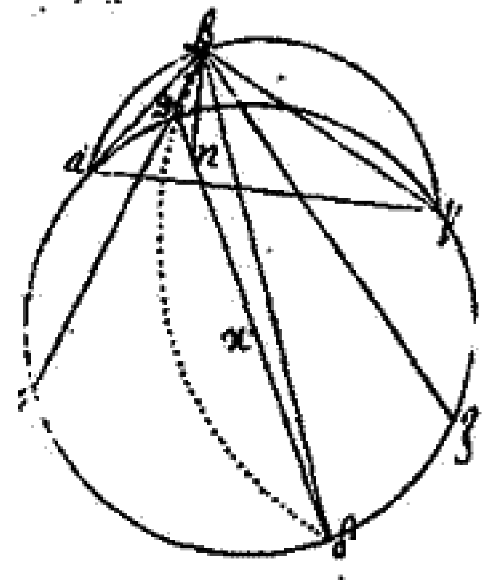


Ἔστω δὲ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ α β γ, κύκλου, οὗ κέντρον τὸ δ, τμῆμα κύκλου ὀρθὸν τὸ α ε β, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, σημείου, καθ' ὃ τὸ α ε β, τμῆμα εἰς δύο ἄνισα τέμνεται τὰ α ε, ε β, πρὸς μὲν τὸ ἐπίπεδον τοῦ α β γ, κύκλου πιπτέτω κάθετος ἡ ε ζ, πρὸς δὲ τὴν α γ β, μείζονα τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἀχθήτωσαν αἱ ε θ, ε κ, ε γ, ε λ, ε μ, ε ν, ε β. καὶ διὰ τοῦ ζ, ἤχθω ἡ γ ζ η. Λέγω τὴν μὲν ε α, ἐλαχίστην εἶναι, τὰς δὲ λοιπὰς αὔξεσθαι μὲν ἀπὸ τοῦ α, μέχρι τοῦ γ, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, μέχρι τοῦ β, ἐλαττοῦσθαι. Γραφήτω δὴ μεγίστου κύκλου τόξον διὰ τῶν ε η γ, σημείων τὸ γ η κ, καὶ τὴν ε ς: τοῦ δ: τὰ παρόντος, καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ α β γ, κύκλου ἐπί-

πε-

πεδον, καὶ τὴν κατασκευὴν, πάντως γε καὶ ὁ γ ν η ε, κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ α β γ, κύκλου ἐπίπεδον, ὥστε καὶ διὰ τοῦ πόλου αὐτοῦ διέρχεται, τεμνομένου δὲ τοῦ γ ν η, δίχα κατὰ τὸ ν, δῆλον, ὅτι τὸ ν, πόλος ἐστὶ τοῦ α β γ, κύκλου, τὸ ε, ἄρα οὐκ ἔστι πόλος τοῦ αὐτοῦ, καὶ κατὰ τὴν κβ΄: τοῦ β΄: τοῦ παρόντος, ἡ μὲν ε η, ἐλαχίστη ἐστὶ, μεγίστη δὲ ἡ ε γ, ἡ δὲ ε κ, ἡ ἔγγιον τῆς ε γ, μείζων ἐστὶ τῆς ε θ, καὶ ἡ ε θ, τῆς ε α. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ μὲν ε λ, μείζων ἐστὶ τῆς ε μ, ἡ δὲ ε μ, τῆς ε β, αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ ε, σημείου ἐπὶ τὴν α γ, περιφέρειαν ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ μὲν τοῦ α, μέχρι τοῦ γ, αὔξονται, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, μέχρι τοῦ β, ἐλαττοῦνται.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 2.



Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ α β γ, τμῆμα ἐγκλινόμενον πρὸς τὸ τοῦ α γ δ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ ἀπὸ τοῦ β, σημείου, καθ᾽ ὃ τὸ α β γ, τμῆμα εἰς ἄνισα τέμνεται, ἀχθήτωσαν ἐπὶ τὴν α δ γ, περιφέρειαν αἱ β α, β ε, β δ, β ζ, β γ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν β α, ἐλαχίστη ἐστὶ, μεγίστη δὲ ἡ β δ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ α, μέχρι τοῦ δ, αὔξονται αἱ ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὴν α δ, περιφέρειαν ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἄχρι τοῦ γ, ἐλαττοῦνται. ἡ γὰρ τούτου κατασκευὴ τὰ μὲν ἄλλα ἡ αὐτή ἐστι τῇ τοῦ ἀνωτέρω, διενήνοχε δὲ, ὅτι ἐπ᾽ ἐκείνου μὲν ἡ ἀπὸ τοῦ ε, ληφθέντος σημείου κάθετος ἐπὶ τῆς α β, πίπτει, ὡς ἡ ε ζ. ἐπὶ τούτου δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ β, ἐκτὸς πίπτει τῆς α γ, ἐφ᾽ ἣν τὸ α β γ, ἐφίσταται τμῆμα, ὡς ἡ β κ. ὥστε, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κ β΄: δείκνυνται ὁμοίως καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος ἀπὸ μὲν τοῦ α, σημείου μέχρι τοῦ δ, αὔξεσθαι τὰς ἀπὸ τοῦ β, ληφθέντος σημείου ἀγομένας εὐθείας ἐπὶ τὴν α δ γ, περιφέρειαν, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἄχρι τοῦ γ, ἐλαττοῦσθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

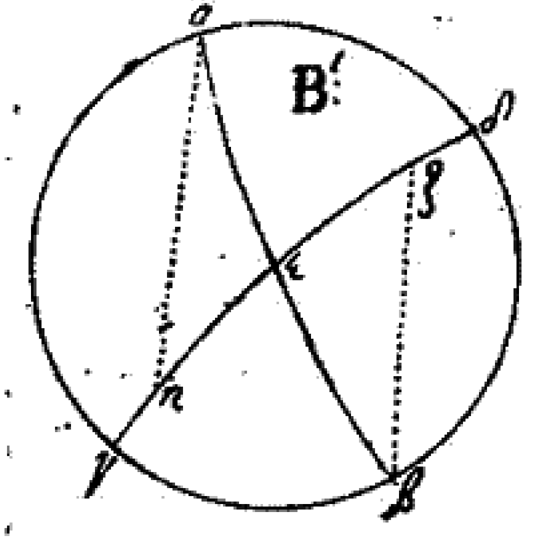
Πρότασις Β΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ὦσι, καὶ ἀπὸ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ἴσα ἐν ἑκατέρῳ τόξα ληφθῶσιν, αἱ τὰ τόξα αὐτῶν ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἔσονται.

Ἔστωσαν κύκλοι μέγιστοι οἱ α β, γ δ, τεμνόμενοι ἀλλήλοις κατὰ τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, σημείου ληφθήτωσαν ἴσα τόξα ἐν μὲν τῷ α β, τὰ ε α, ε β, ἐν δὲ τῷ γ δ, τὰ ε ζ, ε η, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α η, ζ β. Λέγω δὴ τὰς α η, ζ β, εὐθείας, τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰ α ε, ε η, καὶ β ε, ε ζ, τόξα, ἴσας εἶναι. Ἀπὸ γὰρ τοῦ ε, ὡς ἀπὸ πόλου, διαστήματι τῷ ε α, ἢ ε β, μείζονι τοῦ ε η, καὶ ε ζ, γραφήτω κύκλος ὁ α γ β δ. καὶ ἐπεὶ οἱ α β, γ δ, διὰ τοῦ ε, πόλου τοῦ α γ β δ, κύκλου διέρχονται, πάντως γε κατὰ τὴν ι β΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν ἑκάτερος τέμνει.

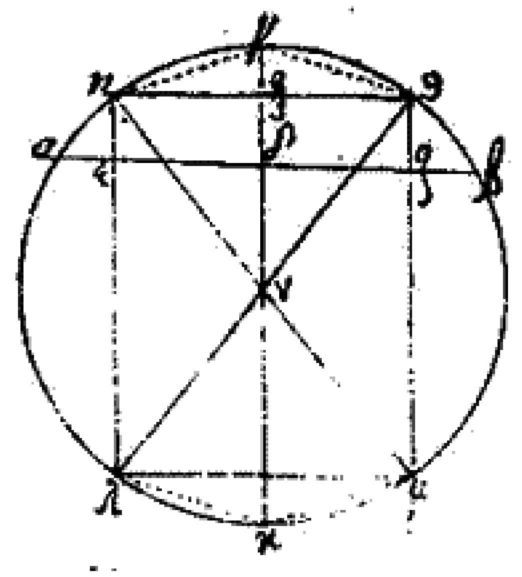
μνουσιν, ὥστε τὰ μὲν αδβ, δβγ, τόξα τοῦ αγβδ, κύκλου ἡμικύκλιά ἐστι, καὶ ἴσα ἀλλήλοις, κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ δβ, ἐναπολείπονται τὰ αδ, γβ, τόξα ἴσα, ἀλλὰ καὶ τὰ εγ, εδ, ἴσα εἰσί, κατὰ τὴν ε: ὅρον τοῦ παρόντος, ἀφῄρηνται ἀπ' αὐτῶν τὰ εη, εζ, ἴσα, καὶ τὸ γεδ, τμῆμα ὀρθὸν ἐφίσταται ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ αγβδ, κύκλου, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἄρα κατὰ τὴν ια: τοῦ β': τοῦ αὐτοῦ αἱ ηα, ζβ, αἱ τὰς τομὰς ἐπιζευγνύουσαι, ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 3.



ΛΗΜΜΑ, Α'.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τοῦ τυχόντος τόξου δίχα τμηθείσης δύο ἑκατέρωθεν ληφθῶσι σημεῖα, ἐξ ἴσου τοῦ μέσου ἀφιστάμενα, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων κάθετοι ἐπ' αὐτῆς ἀνασταθῶσι τὰ ἐναπολαμβανόμενα μεταξὺ τῶν καθέτων τόξα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.



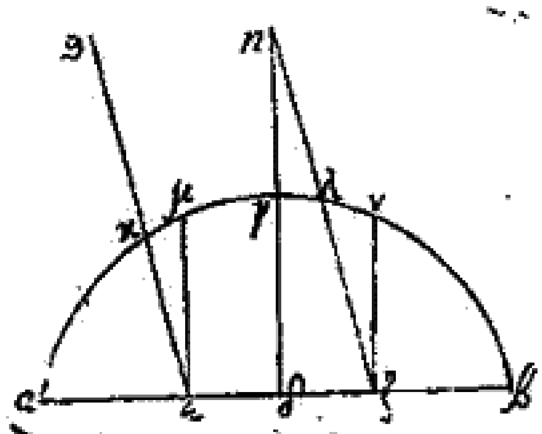
Τμηθήτω ἡ αβ, ὑποτείνουσα τοῦ αγβ, τόξου δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ληφθήτωσαν τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, ὥστε τὰ δε, δζ, διαστήματα ἴσα εἶναι, ἀπὸ δὲ τῶν ε, δ, ζ, σημείων ἀνεστάθωσαν κάθετοι ἐπὶ τῆς αβ, αἱ δγ, εη, ζθ. Λέγω τὰ γη, γθ, τόξα ἴσα εἶναι. Ἀναπεπληρώσθω δὴ ὁ αγβκ, κύκλος, οὗ κέντρον τὸ ν, καὶ ἐξαχθήτωσαν αἱ δγ, εη, ζθ, εὐθεῖαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τῶν δ, ε, ζ, σημείων ἐπὶ τὰ κ λ μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ημ, θλ. καὶ ἐπεὶ αἱ δγ, εη, ὀρθαί εἰσιν ἐπὶ τῆς αβ, πάντως γε αἱ ὑπὸ ηεδ, γδε, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὴν κη: τοῦ α: τοῦ στοιχειωτοῦ, αἱ γδ, ηε, παράλληλοί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ ἔτι παράλληλοί εἰσι καὶ αἱ γδ, θζ. ὥστε κατὰ τὴν κζ: τοῦ α: καὶ κζ: τοῦ γ: τοῦ στοιχ: τὰ γη, λκ, τόξα ἴσα εἰσίν, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ γθ, κμ. (διὰ τὸ ὑποτείνεσθαι ἴσαις εὐθείαις, καὶ ὑποκεῖσθαι ἴσαις ταῖς πρὸς τῷ κέντρῳ ν, γωνίαις.) ἀλλ' αἱ ὑπὸ γνθ, κνλ, γωνίαι ἴσαι εἰσί, κατὰ κορυφὴν γάρ, καὶ εἰσὶ πρὸς τῷ κέντρῳ, ἄρα κατὰ τὴν κζ: τοῦ γ: τοῦ στοιχειωτοῦ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἡ γθ, ἄρα περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ κλ, ἀλλὰ καὶ ἡ γη, ἴση δέδεικται τῇ κλ, ἡ γη, ἄρα ἴση ἐστὶ γθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ. Β'.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τινὸς τόξου δίχα τμηθείσης κάθετος ἀπὸ τῆς τομῆς ἀνασταθῇ, ληφθῇ δὲ ἑκατέρωθεν δύο σημεῖα ἐξ ἴσου τοῦ μέσου ἀφιστάμενα, καὶ ἀπ' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, καὶ τούτων ἡ μὲν συμπέσῃ τῇ καθέτῳ ἐκβαλλομένῃ, ἡ δὲ μὴ συμπέσῃ, ἡ συμπίπτουσα ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξον.

Τμηθήτω ἡ αβ, ὑποτείνουσα τοῦ αγβ, τόξου δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἀνεστάθω κάθετος ἡ δγ· ληφθήτωσαν δὲ καὶ τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, ὥστε τὰ δε, δζ, διαστήματα ἴσα εἶναι· καὶ ἀπὸ τῶν ε, καὶ ζ, ἀχθήτωσαν παράλληλοι αἱ ζη, εθ, ὧν ἡ μὲν ζη, συμπιπτέτω τῇ δγ, καθέτῳ ἐκβαλλομένῃ, κατὰ τὸ η, ἡ δὲ εθ, μὴ συμπιπτέτω. Λέγω τὸ γλ, τόξον ἔλαττον εἶναι τοῦ γκ. Ἀνεστάθωσαν γὰρ ἐπὶ τῆς αβ, κάθετοι αἱ εμ, ζν, καὶ πάντως γε, κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, τὰ γν, γμ, τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἀλλὰ τὸ γλ, ἐλαττόν ἐστι τοῦ γν, ἄρα τὸ αὐτὸ γλ, ἐλαττόν ἐστι καὶ τοῦ γμ, ἔστι δὲ καὶ τὸ γμ, ἔλαττον τοῦ γκ, τὸ γλ, ἄρα πολλῷ ἐλαττόν ἐστι τοῦ γκ. ὅπερ ἦν δεικτέον.

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 4.



Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

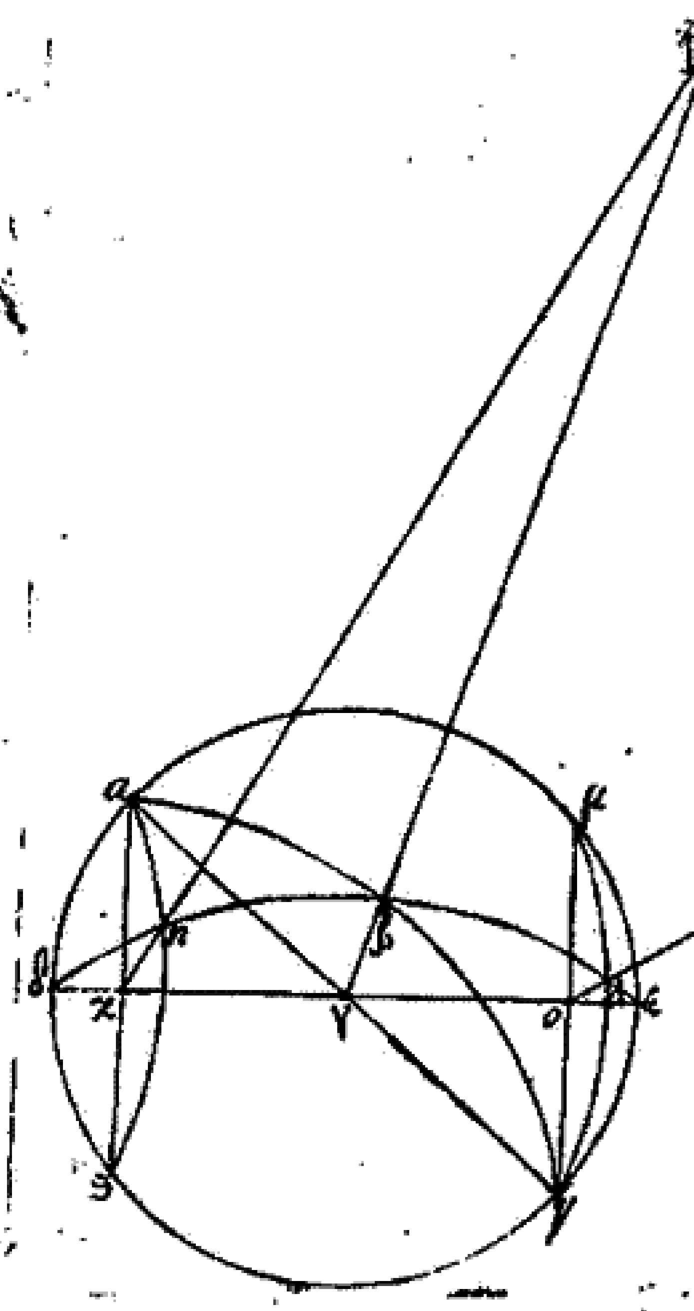
Ἐὰν ὦσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας δύο κύκλοι μέγιστοι, καὶ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς δύο σημεῖα ληφθῶσιν, ἐξ ἴσου τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀφιστάμενα τομῆς, διὰ δὲ τῶν ληφθέντων σημείων ἐπίπεδα παράλληλα διέλθωσι τέμνοντα τὸν ἕτερον τῶν μεγίστων κύκλων, καὶ τούτων τὸ μὲν ἐκβαλλόμενον συμπέσῃ τῇ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ κοινῆς τομῆς τῶν μεγίστων κύκλων ἐκβαλλομένῃ εὐθείᾳ, τὸ δὲ μή, τὸ συμπίπτον ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξον ἀπὸ τοῦ τεμνομένου μεγίστου κύκλου.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι μέγιστοι οἱ αβγ, δβε, τεμνόμενοι κατὰ τὸ β· καὶ ληφθήτωσαν ἐπὶ τοῦ αβγ, τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, ὥστε τὰ βα, βγ, διαστήματα ἴσα εἶναι, διὰ δὲ τῶν α, καὶ γ, διελθέτωσαν ἐπίπεδα παράλληλα τέμνοντα τὸν δβε, κύκλον. καὶ ἐπεὶ αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ μετὰ τῆς σφαίρας κύκλοι εἰσί, κατὰ τὴν β': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ἔστωσαν οὗτοι οἱ αηθ, γλμ. διὰ δὲ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν αβγ, δβε, μεγίστων κύκλων, καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διήχθω ἡ νβξ, καὶ κείσθω τὸ μὲν διὰ τοῦ α, σημείου διερχόμενον ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον συμπίπτειν τῇ νβξ, κατὰ τὸ ξ, σημεῖον, τὸ δὲ διὰ τοῦ γ, μὴ συμπίπτειν.

Λέγω

Λέγω τὸ διὰ τοῦ α, ἔλαττον τοῦ δβε, ἀφαιρεῖν τόξον, τὸ δὲ διὰ τοῦ γ, μεῖζον, τουτέστι τὸ βη, ἔλαττον εἶναι τοῦ βλ. Γραφήτω γὰρ ὡς ἀπὸ πόλου τοῦ β, διὰ τῶν α, καὶ γ, σημείων ὁ αδγε, κύκλος, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, εδ, κη, ολ. καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν αβγ, δβε, μεγίστων κύκλων διὰ τοῦ β, πόλου τοῦ αδγε, διέρχεται, πάντως γε δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, κατὰ τὴν ιβʹ: τοῦ αʹ: τοῦ παρόντος, ὥστε αἱ αγ, εδ. διάμετροί εἰσι τοῦ αδγε, κύκλου. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ νβξ, διὰ τῶν πόλων τοῦ αὐτοῦ αδγε, διέρχεται, δῆλον, ὅτι κάθετός ἐστι ἐπὶ τοῦ αδγε, κατὰ τὴν θʹ: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ διέρχεται κύκλου, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς, τὸ ν, ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ αδγε. Αὖθις ἐπεὶ οἱ αηθ, γλμ, κύκλοι παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ τέμνονται ὑπὸ τοῦ αδγε, πάντως γε αἱ αθ, γμ, κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι. πέπτωκε δὲ εἰς αὐτὰς ἡ αγ, ἄρα κατὰ τὴν κθʹ: τοῦ αʹ: τοῦ στοιχειωτοῦ αἱ ὑπὸ καν, ογν, ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ανκ, γνο, κατὰ κορυφὴν ὁμοίως ἴσαι εἰσιν, καὶ ἡ αν, ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ γν, ἡμιδιαμέτρῳ, ἄρα κατὰ τὴν κςʹ: τοῦ αʹ: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ νκ, ἴση ἐστὶ τῇ νο. ὥστε αἱ κηξ, ολ, ἐξ ἴσου ἀφίστανται τοῦ ν. Τελευταῖον, ἐπεὶ τὸ

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 5.



τοῦ αηθ, κύκλου ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον συμπίπτει, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῇ νβξ, καθέτῳ, τὸ δὲ τοῦ γλμ, οὐ συμπίπτει, ἄρα τὸ ξ, σημεῖον ἐπὶ τῆς κη, κοινῆς ἐστι τομῆς τῶν αηθ, καὶ δβε, κύκλων, ἑκατέρα γὰρ τῶν κη, ολ, ἐν τῷ τοῦ δβε, ἐπιπέδῳ ἐστὶν, ἀλλ' ἡ κη, καὶ ἐν τῷ τοῦ αηθ, ἐπιπέδῳ ἐστὶν, ὥσπερ καὶ ἡ ολ, ἐν τῷ τοῦ γλμ, ἄρα ἡ κη, ἐκβαλλομένη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ αηθ, συμπίπτει τῇ νβ, ἐκβαλλομένῃ καὶ αὐτῇ, κατὰ τὸ ξ, ἡ δὲ ολ, οὐ συμπίπτει ἀφίσταται δὲ ἑκατέρα ἐξ ἴσου τοῦ ν, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὸ βʹ: λῆμμα, ἡ μὲν κη, ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξον τοῦ δβε, ἢ ἡ ολ. ἀφαιρεῖται δὲ ἡ μὲν κη, τὸ βη, ἡ δὲ ολ, τὸ βλ, τὸ βη, ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ βλ. ὅπερ ἦν τὸ ὑποκείμενον. Δεῖ δὲ τὰ βη, βλ, διαστήματα ἐλάττονα εἶναι τῶν βα, βγ, ἑκάτερον ἑκατέρου.

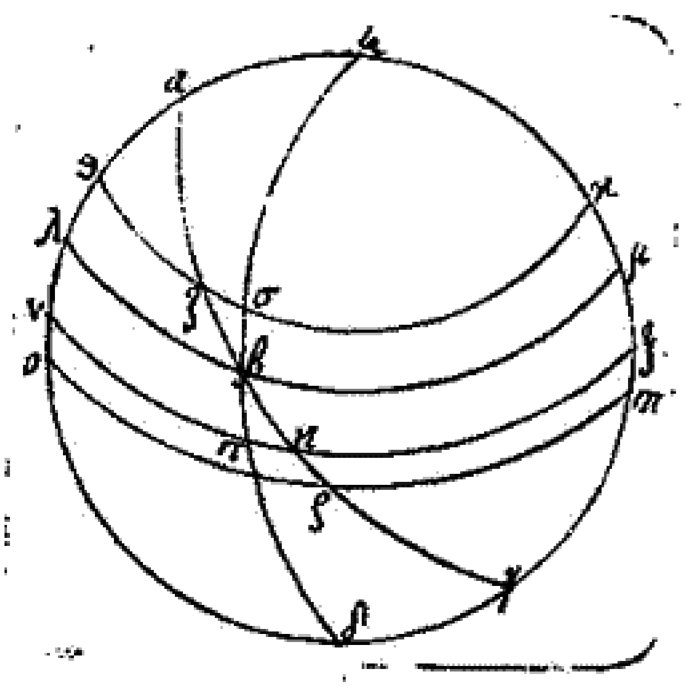
Πρό-

Πρότασις Δ′. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τεμνόμενοι, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ ἑνὸς περιφερείας τόξα ἴσα ληφθῶσιν, ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ ἑτέρου σημεῖον, ὃ μή ἐστι πόλος τοῦ ὑπ' αὐτοῦ τεμνομένου, καὶ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου κύκλοι παράλληλοι διὰ τῶν περάτων τῶν ληφθέντων τόξων ἐπὶ τῆς τοῦ ἑτέρου περιφερείας γραφῶσιν, οἱ κύκλοι οὗτοι τόξα ἄνισα ἀφαιρήσουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἐφ' ἧς τὸ σημεῖον εἴληπται, καὶ ὁ μείζονι γραφόμενος διαστήματι, μεῖζον καὶ τὸ τόξον ἀφαιρήσει.

Ἔστωσαν κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τεμνόμενοι οἱ α β γ, α δ γ ε, κατὰ τὰ α, καὶ γ. καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ α β γ, περιφερείας ληφθήτωσαν τόξα ἴσα τὰ β ζ, β η, ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ α δ γ ε, ληφθήτω σημεῖον τὸ ε, μὴ ὂν πόλος τοῦ α β γ. καὶ ἀπὸ τοῦ ε, ληφθέντος σημείου, ὡς ἀπὸ πόλου γραφήτωσαν διὰ τῶν ζ β η, σημείων κύκλοι παράλληλοι, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ ο ε π, εἶναι ἡμισφαιρίῳ, οἱ θ ζ κ, λ β μ, ν η ξ. Λέγω τοὺς αὐτοὺς παραλλήλους ἄνισα ἀφαιρεῖν τόξα ἀπὸ τῆς τοῦ α δ γ ε, περιφερείας, τὰ θ λ, λ ν. καὶ τὸ λ ν, μεῖζον εἶναι τοῦ θ λ. Γραφήτω γὰρ διὰ τῶν ε, καὶ β, σημείων κύκλος μέγιστος ὁ ε β δ. καὶ ἐπεὶ ὁ α δ γ ε, διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν διέρχεται παραλλήλων, ἄρα, κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ α: τοῦ παρ: δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει, καὶ ἑπομένως οἱ θ ζ κ, λ β μ, ν η ξ, ὀρθοί εἰσι πρὸς τὸ τοῦ α δ γ ε, ἐπίπεδον. μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἐστὶν ὁ ο ρ π, ὡς δίχα τὴν σφαῖραν τέμνων, ἄρα, κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς αὐτῆς διὰ τοῦ πόλου τοῦ α δ γ ε, διέρχεται. τὸ β, ἄρα οὐκ ἔστι πόλος τοῦ α δ γ ε, καὶ τὸ α β, τόξον ἔλαττόν ἐστι τοῦ β γ, ὥστε ἐὰν ἐννοηθῇ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ β, σημείου καὶ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεσθαι, πάντως γε οὐκ ἔστιν ὀρθὴ πρὸς τὸ τοῦ α δ γ ε, ἐπίπεδον, ἄλλως γὰρ ἂν τὸ β, πόλος ἦν τοῦ α δ γ ε, κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἐγκλίνει μᾶλλον πρὸς τὴν ο ε π, περιφέρειαν, ὥστε ἐκβαλλόμενα τὰ ἐπίπεδα τῶν θ ζ κ, ν η ξ, παραλλήλων κύκλων, τὸ μὲν τοῦ θ ζ κ, ἐπίπεδον συμπεσεῖται τῇ διὰ τοῦ β, σημείου, καὶ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένῃ εὐθείᾳ, τὸ δὲ τοῦ ν η ξ, οὐ συμπεσεῖται. ἀλλὰ τῶν α β γ, ε β δ, μεγίστων κύκλων ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ὄντων ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ α β γ, περιφερείας εἴληπται δύο σημεῖα τὰ ζ, καὶ η, ἐξ ἴσου

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 6.



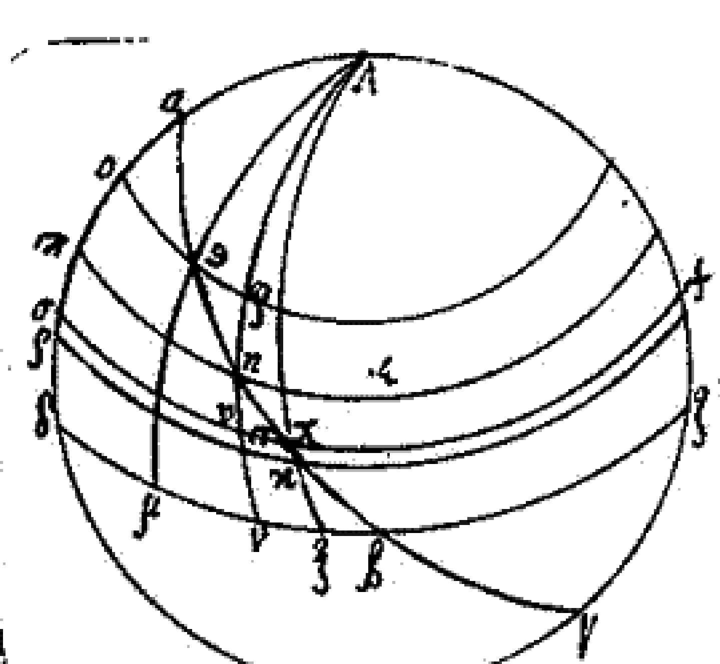
τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς, τοῦ β, δηλ: σημείου, ἀφιστάμενα, καὶ διὰ τῶν αὐτῶν σημείων ἐπίπεδα παράλληλα διέρχονται, τὰ τῶν θ ζ κ, καὶ ν η ξ, παραλλήλων, καὶ τούτων τὸ μὲν συμπίπτει τῇ διὰ τοῦ β, κοινῆς τομῆς τῶν αὐτῶν μεγίστων κύκλων, καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἄρα τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα ἄνισα ἀφαιρεῖται τόξα ἀπὸ τῆς τοῦ ε β δ, κύκλου περιφερείας, ὥστε τὰ β σ, β τ, τόξα κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἄνισά εἰσι, καὶ μεῖζον τὸ β τ, τοῦ β σ. ἀλλὰ τὸ μὲν β τ, ἴσον ἐστὶ τῷ λ ν, τὸ δὲ β σ, τῷ θ λ, κατὰ τὴν θ': τοῦ β': τοῦ παρ: ἄρα τὸ λ ν, μεῖζόν ἐστι τοῦ θ λ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο κύκλοι μέγιστοι πλαγίως ἀλλήλοις τέμνωνται, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ ἑνὸς περιφερείας τόξα ἴσα ληφθῶσι, διὰ δὲ τοῦ πόλου τοῦ ἑτέρου κύκλου καὶ τῶν περάτων τῶν εἰλημμένων τόξων κύκλοι μέγιστοι γραφῶσιν, οἱ κύκλοι οὗτοι ἄνισα τόξα ἀφαιρέσουσιν ἀπὸ τῆς περιφερείας, οὗ πόλος ἐστὶ τὸ εἰλημμένον σημεῖον, καὶ τὸ ἐναπολαμβανόμενον μεταξὺ τῶν διὰ τῶν περάτων τοῦ ἐγγύτερον τοῦ πόλου τμήματος ἀγομένων μεγίστων κύκλων μεῖζόν ἐστιν.

Ἔστωσαν κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ α β γ, δ β ζ, πλαγίως ἀλλήλοις τεμνόμενοι· καὶ εἰλήφθω ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ α β γ, περιφερείας τόξα ἴσα τὰ η θ, η κ. ἔστω δὲ πόλος τοῦ δ β ζ, τὸ λ, σημεῖον· ἀφ' οὗ γραφήτωσαν κύκλοι μέγιστοι διὰ τῶν θ, η, κ, σημείων οἱ λ θ μ, λ η ν, λ κ ξ. Λέγω τὰ μ ν, ν ξ, τόξα ἄνισα εἶναι, καὶ μεῖζον τὸ μ ν, τοῦ ν ξ, ὡς ἐναπολαμβανόμενον μεταξὺ τῶν λ θ μ, λ η ν, τῶν διὰ τῶν περάτων τοῦ η θ, τμήματος διερχομένων, τοῦ ἐγγύτερον ὄντος τῷ λ, πόλῳ. Γραφήτωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ λ, πόλου διὰ τῶν θ, η, κ, σημείων παράλληλοι οἱ θ ο, η π, κ ρ. καὶ ἐπεὶ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸ π ρ, τόξον μεῖζόν ἐστι τοῦ π ο, ἀφαιρεθήτω τὸ π σ, ἴσον τῷ π ο, καὶ διὰ τοῦ σ, σημείου, ὡς ἀπὸ πόλου τοῦ λ, γραφήτω παράλληλος ὁ σ τ, τέμνων τὸν λ η ν, κατὰ τὸ υ. Δείκνυται, ὅτι τὰ η φ, ο π, καὶ η υ,

Theod: Sf: Lib. 3. Fig.7.



π σ, ἴσα εἰσὶ, κατὰ τὴν θ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, ἀλλὰ καὶ τὰ ο π, π σ, ἴσα εἰσὶ, κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἄρα καὶ τὰ η φ, η υ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. εἴληπται δὲ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ τὰ η θ, η κ, ἴσα, ἄρα κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος αἱ θ φ, υ κ, εὐθεῖαι, αἱ τὰ ἴσα ἐπιζευγνύουσαι τόξα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ ὁ λ κ ξ, μέγιστος κύκλος διὰ τοῦ πόλου τοῦ σ τ, παραλλήλου διέρχεται, οἱ γὰρ ἐν τῇ αὐτῇ

σφαί-

σφαίρᾳ παράλληλοι τὸν αὐτὸν ἔχουσι πόλον, κατὰ τὴν α: τοῦ β': τοῦ παρόντος, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, ὥστε καὶ ὁ σ τ, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν λ κ ξ. ἀλλὰ καὶ εἰς δύο ἄνισα αὐτὸν τέμνει (ἐὰν γὰρ ἑκάτερος τῶν λ κ ξ, σ τ, ὁλοκλήρως εἶναι γεγραμμένος ἐννοηθῇ, πάντως γε ὁ σ τ, εἰς δύο ἄνισα μέρη τὸν λ κ ξ, τέμνει κύκλον, κατὰ τὸ χ, καὶ τὸ τούτῳ κατὰ διάμετρον ἀντικείμενον· καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ χ, ἐπὶ τὸ λ, χωροῦν, καὶ περατούμενον ὑπὸ τοῦ κατὰ διάμετρον ἀντικειμένου τῷ χ, ἔλαττόν ἐστι, τὸ δὲ λοιπὸν τὸ ἀπὸ τοῦ χ, ἐπὶ τὸ ξ, μεῖζον, ὅτι γε καὶ τὸ σ λ ψ, τμῆμα τῆς σφαίρας ἔλαττόν ἐστι τοῦ σ γ ψ, μέγιστος ὁ δ β ζ, ὑποτίθεται, καὶ εἰς δύο ἴσα τὴν σφαῖραν τέμνει, τὰ δ λ ζ, δ γ ζ.) εἴληπται δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ χ σ, τμήματος τοῦ ψ χ σ, ὁλοκλήρου κύκλου, καθ' ὃ τὸ αὐτὸ τμῆμα, ὅπερ ἀπὸ τοῦ χ, ἀρχόμενον σημείου καὶ χωροῦν ἐπὶ τὸ σ, περατοῦται ὑπὸ τοῦ κατὰ διάμετρον ἀντικειμένου τῷ χ, εἰς ἄνισα τέμνεται· ἄρα, κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος ἡ υ χ, ὑποτείνουσα ἐλάττων ἐστὶ τῆς υ κ, ἐνουμένης, ἴση δὲ τῇ υ κ, δέδεικται ἡ θ φ, ἄρα ἡ υ χ, ἐλάττων ἐστὶ καὶ τῆς θ φ. ἀλλ' ὁ φ θ ο, παράλληλος, ἐλάττων ἐστὶ τοῦ σ τ ψ, κατὰ τὴν ις': τοῦ β': τοῦ παρόντος, δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ φ θ, τόξον τὸ ὑπὸ τῆς φ θ, μείζονος ὑποτεινόμενον, μεῖζόν ἐστι τῷ λόγῳ τοῦ υ χ, τόξου, τοῦ ὑπὸ τῆς ἐλάττονος υ χ, ὑποτεινομένου, εἰ μὴν δὲ ὅμοιον, ταὐτὸν δ' ἐστιν εἰπεῖν, ὅτι τὸ φ θ, τόξον πλειόνων ἐστὶ μοιρῶν, καθ' ἃς ὁ φ θ ο, ὁλόκληρος κύκλος εἰς 360 διαιρεῖται, τὸ δὲ υ χ, ἐλαττόνων, καθ' ἃς ὁ χ υ σ, ὁλόκληρος κύκλος εἰς τοσαύτας διαιρεῖται. ἔστι δὲ τῷ μὲν θ φ, ὅμοιον τὸ μ ν, κατὰ τὴν θ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, τῷ δὲ υ χ, τὸ ν ξ, ἄρα τὸ μ ν, μεῖζόν ἐστι τοῦ ν ξ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποκείμενον. Δεῖ δὲ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, ὡς τὰ θ, η, κ.

Πρότασις ϛ': Θεώρημα.

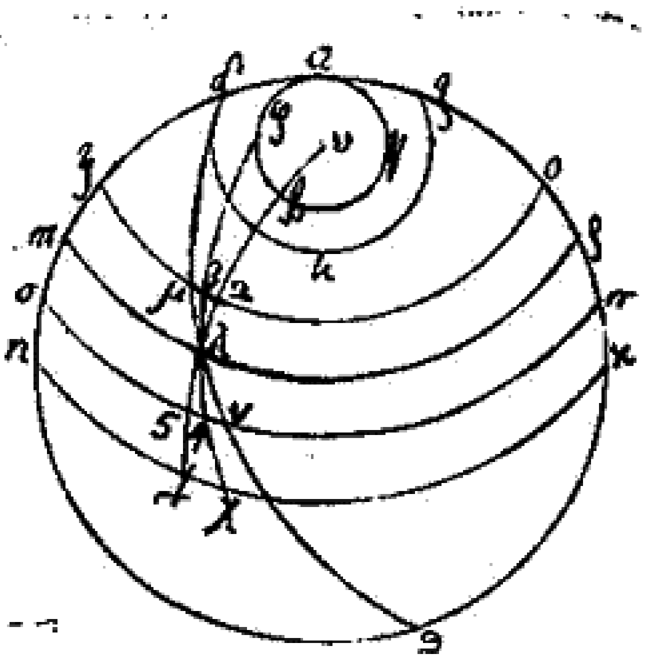
Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι δύο, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, τὸν δὲ μείζονα τέμνῃ, καὶ τοῦ τεμνομένου αὖθις ἕτερος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, καθ' ὃ τέμνεται σημεῖον, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων τόξα ἴσα, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν σημείων τῶν ληφθέντων τόξων παράλληλοι κύκλοι τοῖς ἐξ ἀρχῆς ἀχθῶσιν, οἱ κύκλοι ἤτοι ἄνισα τόξα ἀφαιρέσουσιν ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐξ ἀρχῆς παραλλήλων, καὶ τὸ ἐγγύτερον τοῦ πόλου τῶν παραλλήλων ἔλαττον ἔσται.

Ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ α β γ, δ ε ζ, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος α β γ, ἁπτέσθω ὁ α η θ κ, μέγιστος κύκλος κατὰ τὸ α. τὸν δὲ μείζονα δ ε ζ, τεμνέτω κατὰ τὸ δ, καθ' ὃ ἁπτέσθω τοῦ αὐτοῦ ὁ δ λ θ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθήτωσαν ἴσα τόξα τὰ λ μ, λ ν, καὶ διὰ τῶν μ, λ, ν, σημείων ἀχθήτωσαν

 πα-

παράλληλοι οἱ ξ μ ο, π λ ρ, σ ν κ, τέμνοντες τὸν α η θ κ, κατὰ τὰ ξ π σ, σημεῖα. Λέγω δὴ τὰ π ξ, π σ, τόξα ἄνισα εἶναι, καὶ τούτων τὸ π ξ, ἔλαττον εἶναι τοῦ π σ, ὡς ἐγγύτερον τοῦ υ, πόλου. Διὰ τοῦ λ, τοίνυν σημείου, τῆς κοινῆς τῶν ληφθέντων τόξων ἀφῆς γραφήτωσαν δύο κύκλοι μέγιστοι, ὁ μὲν ἁπτόμενος τοῦ α β γ, ἐλάττονος τῶν παραλλήλων, κατὰ τὸ φ, ὁ δὲ διὰ τοῦ υ, πόλου τῶν αὐτῶν διερχόμενος, οἷοι οἱ φ λ χ, υ λ ψ. καὶ ἐπεὶ ὁ υ λ ψ, διὰ τοῦ πόλου τῶν παραλλήλων διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α': τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει. εἴληπται δὲ ἐπὶ τῆς αὐτοῦ περιφερείας τὸ λ, σημεῖον, καὶ τοῦτο οὐκ ἔστιν ὁ ἕτερος πόλος τῶν αὐτῶν παραλλήλων, διὰ τὸ ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ μετὰ τοῦ υ, πόλου, καὶ μὴ κατὰ διάμετρον ἀλλήλοις ἀντικεῖσθαι, ἀπὸ δὲ τοῦ ληφθέντος λ, ἤχθησαν τόξα μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ π ξ μ ο, καὶ σ ν τ, παραλλήλου τὰ λ 2, λ 3, λ μ, λ ν, λ 4, λ 5, ἄρα κατὰ τὴν κβ': τοῦ β': τοῦ παρόντος τὸ λ 2, ὡς διὰ τοῦ πόλου υ, διερχόμενον ἐλάχιστόν ἐστι, τὸ δὲ λ 3, ἔλαττον τοῦ λ μ. ὡσαύτως κἀπὶ τοῦ ἑτέρου τὸ μὲν λ ν, μέγιστόν ἐστιν, ὡς διὰ τοῦ ἑτέρου πόλου τῶν αὐτῶν παραλλήλων διερχόμενον, τὸ δὲ λ 4, ἔλαττον τοῦ λ 5. Αὖθις ἐπεὶ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο εἰσὶ κύκλοι μέγιστοι οἱ δ λ θ, φ λ χ, τεμνόμενοι, κατὰ τὸ λ, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ δ λ θ, περιφερείας εἴληπται τόξα ἴσα τὰ λ μ, λ ν, καὶ διὰ τῶν μ, ν, παράλληλοι ἤχθησαν κύκλοι οἱ ξ μ ο, σ ν τ, πάντως γε κατὰ τὴν γ': τοῦ παρόντος οἱ αὐτοὶ παράλληλοι κύκλοι ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τοῦ φ λ χ, τόξα ἄνισα τὰ λ 3, λ 4, καὶ τὸ λ 3, ἔλαττόν ἐστι, τοῦ λ 4. (ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εὐθεῖά τις διὰ τοῦ λ, σημείου ἐννοηθῇ ἠγμένη, δῆλον, ὅτι τῷ υ, προσεγγίζει τῷ πόλῳ, καὶ τὸ τοῦ ξ μ ο, ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον συμπεσεῖται τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ,) ἀλλὰ τὸ μὲν λ 3, ἴσον ἐστὶ τῷ π ξ, τὸ δὲ λ 4, τῷ π σ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ π ξ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ π σ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν.

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 8.



Πρό-