λν, κε, ὡς δέδεικται ἐν τῷ ἀνωτέρω, εἰσὶ δ᾽ ἔτι καὶ αἱ ὑπὸ κμβ, λνε, γωνίαι ἴσαι, διὰ τὸ ἴσας ὑποτίθεσθαι τὰς αβ, δε, περιφερείας, ἐφ᾽ ὧν αὗται βεβήκασιν, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ΄: αἱ κβ, λε, ἴσαι εἰσί. δέδεικται δὲ καὶ ἡ μὲν ηκ, κάθετος τῇ θλ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ηκβ, γωνία τῇ ὑπὸ θλε, ἄρα κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ ἡ ηβ, τῇ θε, ἴση ἐστίν.

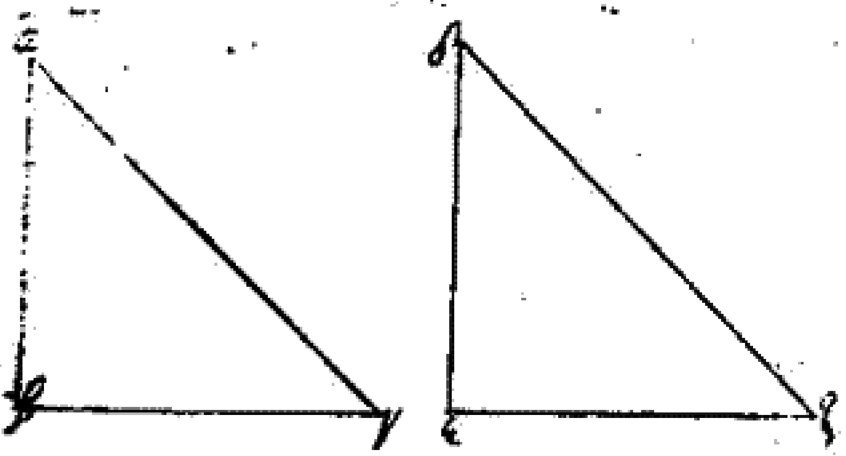
Ἐπὶ δὲ τῶν σχημάτων τῆς γ΄: δείξεως ὁμοίως, ἐπεὶ αἱ ηα, θδ, καὶ αβ, δε, ἴσαι εἰσί, δέδεικται δὲ ἐν τῷ ἀνωτέρω καὶ ἡ ὑπὸ ηαβ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ θδε, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ΄: καὶ αἱ ηβ, θε, ἴσαι εἰσίν. ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἴσων κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα. καὶ τὰ ἑξῆς.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν ὁποιανδήποτε γωνίᾳ ὁποιᾳδήποτε ἴσην, καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ τῇ λοιπῇ ἴση ἔσται, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐχέτωσαν τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς αγ, γβ, δυσὶ ταῖς δζ, ζε, ἴσας, τὴν μὲν αγ, τῇ δζ, τὴν δὲ γβ, τῇ ζε, καὶ τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, ἴσην. Λέγω, ὅτι καὶ τὴν αβ, τῇ δε, ἴσην ἔχει, καὶ ὅλον τὸ αβγ, τρίγωνον ὅλῳ τῷ δεζ, τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ γ, γωνία τῇ πρὸς τῷ ζ, ἡ δὲ πρὸς τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ, ὁμοίως ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν αγ, τῇ δζ, ἡ δὲ γβ, τῇ ζε, ἴση ἐστίν, πάντως γε ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν δζ, ἔστι καὶ ἡ γβ, πρὸς τὴν ζε, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἡ δζ, πρὸς τὴν ζε, κατὰ τὴν ις΄: τοῦ ε΄: τῶν στοιχείων, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ ε, ἄρα κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ ς΄: τοῦ αὐτοῦ, τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν. ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστίν. ὥστε κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ καὶ βάσις ἡ αβ, βάσει τῇ δε, ἴση ἐστί, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἦν τὸ ὑποσχεθέν.

Theod. Sph. Lib. 2. Fig. 12.



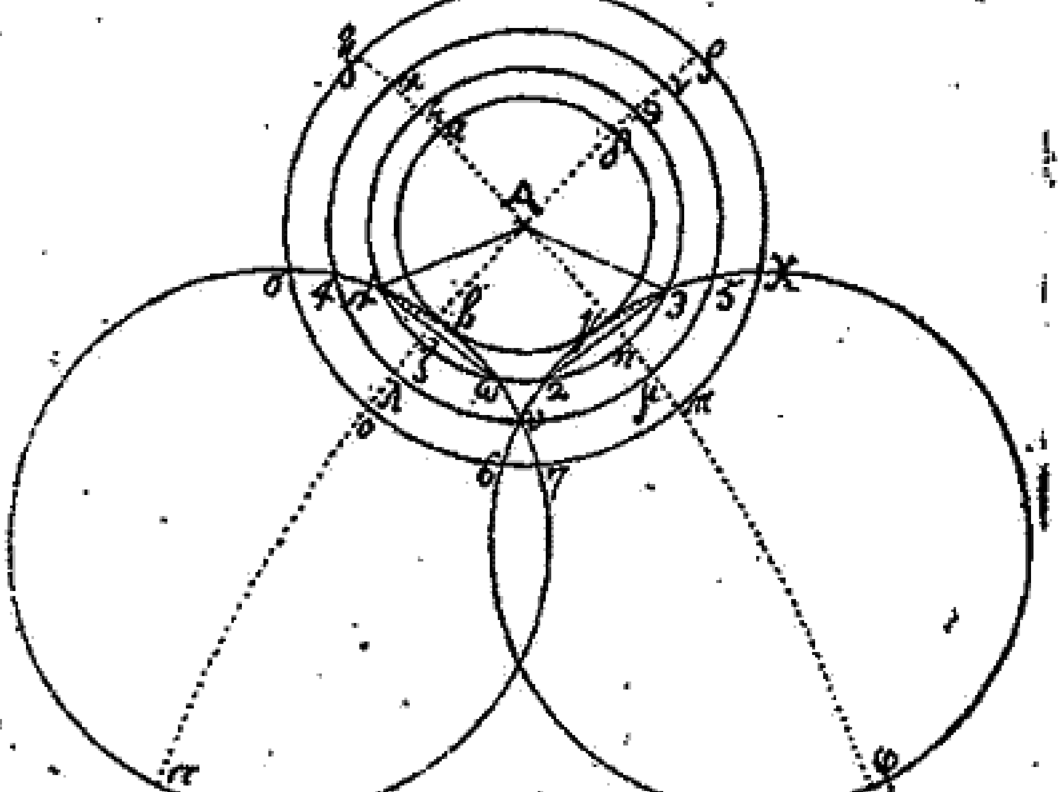
Πρό-

Πρότασις ΙΒ′. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι, πολλῶν ὄντων παραλλήλων ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τοῦ μὲν ἐλάσσονος ἅπτωνται, τοὺς δὲ λοιποὺς τέμνωσι, τὰ τῶν μεγίστων τόξα, τά τε ὑφ᾽ ἑκάστου τῶν παραλλήλων περιεχόμενα, καὶ τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ τῶν παραλλήλων τὰ ὑπὸ τῶν μεγίστων περιεχόμενα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, καὶ τούτων αὖθις ὅσα μὲν διὰ τῆς τομῆς τῶν μεγίστων διέρχεται κύκλων ἄνευ τινὸς προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως ὅμοιά ἐστι τῷ μεταξὺ τῶν ἁφῶν τόξῳ, τοῦ ὅπερ οἱ μέγιστοι παραλλήλου ἅπτονται, ὅσα δὲ διὰ τῶν καθ᾽ ἃ οἱ κύκλοι τέμνονται μερῶν διέρχεται μετὰ ἀφαιρέσεως, ὅσα δὲ διὰ τῶν πρὸς ἃ οὐ τέμνονται οἱ κύκλοι διαβαίνουσι μετὰ προσθήκης ἑκάτερον ὅμοια εἰσίν.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ αβγδ, εζηθ, κλμν, ξοπρ, καὶ τοῦ μὲν αβγδ, ἐλάσσονος ἐφαπτέσθωσαν οἱ βστυ, γυφχ, κατὰ τὰ β, καὶ γ, σημεῖα, τοὺς δὲ λοιποὺς τεμνέτωσαν οἱ αὐτοὶ κατὰ τὰ ψ, ω. 2, 3. 4, υ. υ, 5. σ, 6. 7, χ. Λέγω, ὅτι τά τε ψβω, 2γ3, 4βυ, υγ5, σβ7, 6γχ, τόξα τῶν μεγίστων κύκλων βστυ, γυφχ, τὰ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, καὶ τὰ 4ψ, ωυ, υ2, 35, σ4, υ6, 7υ, 5χ, τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα ὁμοίως ἴσα ἐστιν. ἔτι δὲ καὶ τὰ ψζω, 2η3, 4λυ, υμ5, σο7, 6πχ, τόξα τῶν παραλλήλων ἴσα καὶ αὐτὰ ἀλλήλοις εἰσί, καὶ τούτων αὖθις τὰ μὲν

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 13.



4λυ, υμ5, ὅμοιά εἰσι τῷ βγ, ἄνευ τινὸς προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως, τὰ δὲ σο7, 6πχ, μετ᾽ ἀφαιρέσεως τοῦ 6, 7, καὶ τὰ ψζω, 2η3, μετὰ προσθήκης τοῦ ω2, ὅμοιά εἰσι τῷ αὐτῷ β γ, τόξῳ, τῷ μεταξὺ τῶν β, καὶ γ, ἀφῶν. Διήχθωσαν γὰρ διὰ τοῦ Α, πόλου τῶν ῥηθέντων παραλλήλων, καὶ β, γ, ἀφῶν μέγιστοι κύκλοι οἱ ρ Α τ, ξ Α φ. καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ δ, β σ τ 7, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ β, καὶ ὁ ρ Α τ, μέγιστος διὰ τοῦ Α, πόλου τοῦ α β γ δ, διέρχεται κύκλου, καὶ τῆς β, ἀφῆς, πάντως γε κατὰ τὴν δʹ: τοῦ παρόντος ὁ ρ Α τ, διέρχεται καὶ διὰ τοῦ πόλου τοῦ β σ τ 7, ὥστε κατὰ τὴν ιβʹ: τοῦ αʹ: τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, τὸ ἄρα β τ, τμῆμα ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β σ τ 7, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ τῶν Α β, β ψ, ὑποτεινουσῶν ἐπιζευχθεισῶν, ἔτι δὲ καὶ τῆς Α ψ, ἡ ὑπὸ Α β ψ, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ Α γ 3, ὀρθή. εἰσὶ δὲ κατὰ τὸν εʹ: ὅρον τοῦ αὐτοῦ καὶ αἱ β Α, Α ψ, ἴσαι ταῖς γ Α, Α 3, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἄρα κατὰ τὸ προτεθὲν λῆμμα ἡ β ψ, ὑποτείνουσα ἴση ἐστὶ τῇ γ 3, ὥστε καὶ αἱ β ψ, γ 3, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κθʹ: τοῦ γʹ: τοῦ στοιχειωτοῦ, ἀλλ' ἑκάτερον τῶν ψ β ω, 2 γ 3, τμημάτων δίχα τέμνεται, ἄρα καὶ τὰ ψ β ω, 2 γ 3, ὡς διπλάσια τῶν β ψ, γ 3, ἴσα ἐστὶ κατὰ τὸ βʹ: ἀξίωμα τοῦ στοιχ: τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται ἴσα καὶ τὰ 4 β υ, υ γ 5, καὶ σ β 7, 6 γ χ. ἐπεὶ οὖν δέδεικται τὰ τε ψ β, β ω, καὶ 4 β, β υ, ἴσα, πάντως γε ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν ἴσων 4 β, β υ, τὰ ἴσα ψ β, β ω, ἀπολειφθήσεται τὰ 4 ψ, ω υ, ἴσα κατὰ τὸ γʹ: ἀξίωμα. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ἔτι ἴσα καὶ τὰ σ 4, υ 7, καὶ υ 2, 3 5, καὶ 6 υ, 5 χ. Αὖθις ἐπεὶ τὰ ψ β ω, 2 γ 3, ἴσα εἰσιν, ὡς δέδεικται, πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κθʹ: τοῦ γʹ: τοῦ στοιχειωτοῦ αἱ ψ ω, 2 3, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσιν, ὥστε κατὰ τὴν κηʹ: τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ ψ ζ ω, 2 η 3, περιφέρειαι ἴσαι εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ 4 λ υ, υ μ 5, καὶ σ ο 7, 6 π χ, ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἦν τὸ δʹ: Τελευταῖον ἐπεὶ τὰ 4 λ υ, υ μ 5, ἴσα ἐστι, καὶ τοῦ μὲν 4 λ υ, ἥμισυ ἐστι τὸ 4 λ, τοῦ δὲ υ μ 5, τὸ υ μ, κατὰ τὴν ηʹ: τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ 4 λ, ἴσον ἐστι τῷ υ μ. κοινοῦ προσκειμένου τοῦ λ υ, δῆλον, ὅτι τὸ 4 λ υ, ἴσον ἐστι τῷ λ υ μ, ἀλλὰ τὸ λ υ μ, ὅμοιόν ἐστι τῷ αὐτῷ β γ, ἄνευ τινὸς προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως. ὁμοίως δὲ πάλιν, ἐπεὶ τὸ σ ο 7, ἴσον ἐστὶ τῷ 6 π χ, ὡς δέδεικται, καὶ τοῦ μὲν ἥμισυ ἐστι τὸ σ ο, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ηʹ: τοῦ δὲ τὸ 6 π, κοινοῦ προσκειμένου τοῦ ο 6, πάντως γε τὰ σ ο 6, ο 6 π, ἴσα ἐστιν, ἀλλὰ τὸ ο 6 π, ὅμοιόν ἐστι τῷ β γ, ἄρα καὶ τὸ σ ο 6, ὅμοιόν ἐστι τῷ β γ. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ 7 π χ, ὅμοιον τῷ β γ. ἄρα τὰ σ ο 7, 6 π χ, τόξα τὰ διὰ τῶν, καθ' ἃ τέμνονται οἱ μέγιστοι κύκλοι, μερῶν διερχόμενα τόξα ὅμοιά ἐστι τῷ μεταξὺ τῶν τομῶν μετὰ ἀφαιρέσεως τοῦ 6 7. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ τὰ ψ ζ ω, 2 η 3, ὅμοια εἶναι τῷ β γ, μετὰ προσθήκης τοῦ ω 2. δειχθήσεται γὰρ ὡς πρότερον τὸ ψ ζ, ἴσον τῷ 2 η. κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ ζ ω, ἔσται τὸ ψ ζ 2, ἴσον τῷ ζ 2 η, ἀλλὰ τὸ ζ 2 η, ὅμοιόν ἐστι τῷ β γ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν θʹ: τοῦ παρόντος. ἄρα καὶ τὸ ψ ζ 2, ἢ τὸ ψ ζ ω, μετὰ προσθήκης τοῦ ω 2, ὅμοιόν ἐστι τῷ β γ, τῷ μεταξὺ τῶν ἀφῶν. ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ω η 3. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

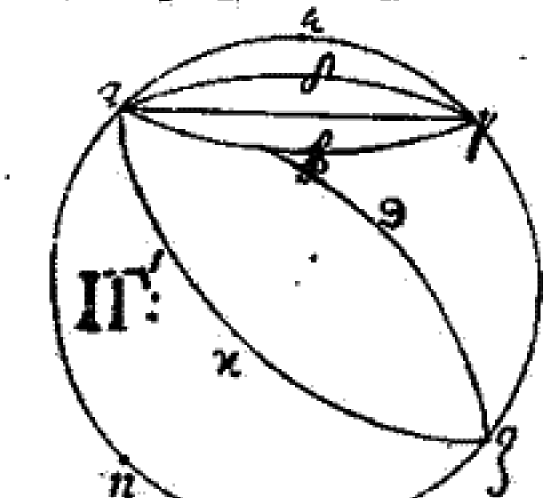
Πρό-

Πρότασις ΙΓ': Πρόβλημα.

Κύκλου ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ δοθέντος κύκλον μέγιστον καταγράψαι ἁπτόμενον τοῦ ἐλάσσονος κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον.

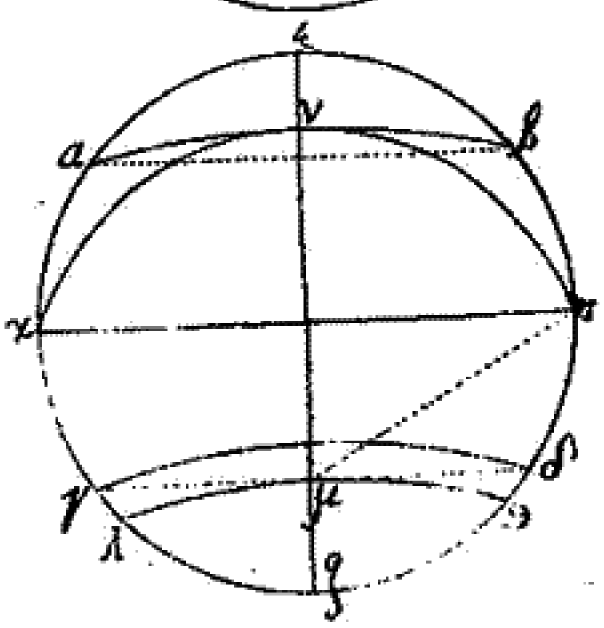
Δοθήτω ἐλάσσων κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ζητηθήτω καταγραφῆναι μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ α β γ δ, κατὰ τὸ α, σημεῖον. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὴν ιζ': τοῦ παρόντος ὁ πόλος τοῦ δοθέντος α β γ δ, ἐλάσσονος κύκλου, καὶ ἔσω οὗτος ὁ ε, καὶ διὰ τῶν ε, καὶ α, σημείων γραφήτω μέγιστος κύκλος ὁ ε α ζ γ, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ αὐτοῦ. εἶτα ἀφαιρεθήτω τὸ α η, τεταρτημόριον τοῦ α ζ γ ε, μεγίστου κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ η, ὡς ἀπὸ πόλου διαστήματι τῷ η α, γραφήτω ὁ α θ ζ κ, κύκλος, καὶ οὗτος ἔσται ὁ ζητούμενος. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β γ δ, α θ ζ κ, κύκλοι συμπίπτουσι τῷ αὐτῷ α, σημείῳ τοῦ α η ζ γ, μεγίστου κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου διερχομένου, πάντως γε κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος οἱ α β γ δ, α θ ζ κ, ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ α, σημεῖον. ἀλλ' ὁ α θ ζ κ, κύκλος ἀφίσταται τοῦ η, πόλου τεταρτημορίῳ, ἄρα κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιγ': τοῦ παρόντος μέγιστός ἐστι. κύκλου ἄρα ἐλάσσονος τοῦ α β γ δ, δοθέντος ἐν σφαίρᾳ, κύκλος μέγιστος καταγέγραπται ἁπτόμενος αὐτοῦ κατὰ τὸ δοθὲν α, σημεῖον ὁ α θ ζ κ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 14.



Πρότασις ΙΔ': Πρόβλημα.

Δοθέντος σημείου ἐν σφαίρᾳ μεταξὺ δύο κύκλων παραλλήλων τε καὶ ἴσων, κύκλον μέγιστον διὰ τοῦ δοθέντος γράψαι σημείου ἁπτόμενον ἑκατέρου τῶν παραλλήλων.

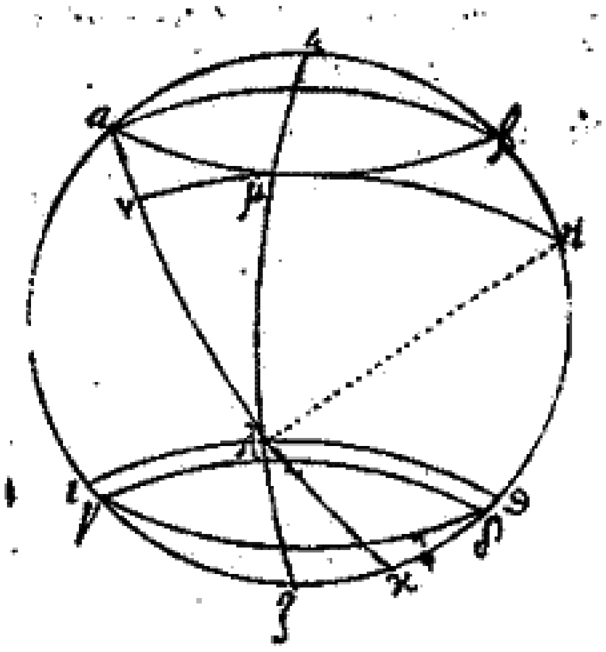


Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοι οἱ α β, γ δ, ὧν πόλοι τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα καὶ δοθήτω μεταξὺ αὐτῶν σημεῖον τὸ η, καὶ ζητηθήτω καταγραφῆναι κύκλος μέγιστος διὰ τοῦ η, σημείου ἁπτόμενος ἑκατέρου τῶν α β, γ δ, κύκλων. Ἐπεὶ δὲ τὸ δοθὲν σημεῖον ἤτοι ἐξ ἴσου ἀφίσταται τῶν παραλλήλων κύκλων, ἢ τοῦ μὲν πλησιέστερον, τοῦ δὲ ἀπώτερόν ἐστι. Κείσθω α: ἐξ ἴσου ἀφίστασθαι τὸ η, σημεῖον τοῦ τε β, καὶ δ. διὰ τοῦ ε, τοίνυν πόλου καὶ η, δοθέντος σημείου γραφήτω ὁ ε κ ζ η, μέγιστος κύκλος κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ παρόντος, τέμνων τὸν μὲν α β, παράλληλον κατὰ τὰ α, καὶ β, τὸν δὲ γ δ, κατὰ τὰ γ, καὶ δ. καὶ ἔστωσαν τὰ β θ, η ζ, τόξα ἴσα τῷ τοῦ ε κ ζ η, κύκλου τεταρτημορίῳ, καὶ ἀπὸ

ἀπὸ μὲν τοῦ ζ, σημείου διαστήματι τῷ ζθ, γραφήτω παράλληλος ὁ λθ, ἀπὸ δὲ τοῦ η, διαστήματι τῷ ηζ, γραφήτω μέγιστος ὁ ζε, τέμνων τὸν μὲν λθ, κατὰ τὸ μ, τὸν δὲ αβ, κατὰ τὸ ν· εἶτα ἀπὸ τοῦ μ, ὡς ἀπὸ πόλου, διαστήματι τῷ μν, γραφήτω ὁ κνη, καὶ οὗτος ἔσται ὁ ζητούμενος. Ἐπεὶ γὰρ τὸ βθ, τεταρτημόριόν ἐστι, τῷ δὲ βθ, ἴσον ἐστὶ τὸ μν, κατὰ τὴν θ΄: τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ τὸ μν, τεταρτημόριόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τὸ ηζ, ὁμοίως τεταρτημόριόν ἐστι, τῷ δὲ ηζ, ἴσον ἐστι τῷ ημ, κατὰ τὸν ε΄: ὅρον τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ μν, διάστημα ἴσον ἐστι τῷ μη. ὁ ἄρα γραφόμενος κύκλος τῷ μν, διαστήματι διέρχεται καὶ διὰ τοῦ η, οἷος ὁ κνη, ἅπτεται δὲ ὁ κνη, κύκλος τοῦ αβ, παραλλήλου, ἅπτεται ἄρα ὁ αὐτὸς καὶ τοῦ γδ, κατὰ τὴν ς΄: τοῦ παρόντος, διέρχεται δὲ καὶ διὰ τοῦ δοθέντος η, σημείου, ὡς δέδεικται, δοθέντος ἄρα σημείου ἐν σφαίρᾳ μεταξὺ δύο κύκλων παραλλήλων τε καὶ ἴσων, κύκλος μέγιστος διὰ τοῦ δοθέντος γέγραπται σημείου, ἁπτόμενος ἑκατέρου τῶν παραλλήλων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ δοθὲν η, σημεῖον ἐξ ἴσου ἀφιστάμενον τῶν β, δ. τούτου δὲ κειμένου, γραφήτω διὰ τοῦ ε, πόλου, καὶ η, σημείου μέγιστος κύκλος ὁ εαγδβ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ις΄: τοῦ παρόντος, καὶ ἔστωσαν τὰ βθ, ηκ, τόξα ἴσα τεταρτημορίῳ ἑκάτερον, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ ζ, πόλου διαστήματι τῷ ζθ, γραφήτω ὁ θλι, παράλληλος, ἀπὸ δὲ τοῦ η, διαστήματι τῷ ηκ, γραφήτω ὁ κλνα, κύκλος τέμνων τὸν θι, παράλληλον κατὰ τὸ λ. διὰ δὲ τῶν ζ, καὶ λ, διήχθω ὁ ζλε, μέγιστος, τέμνων τὸν αβ, παράλληλον κατὰ τὸ μ. εἶτα ἀπὸ τοῦ λ, διαστήματι τῷ λμ, γραφήτω ὁ νμη, καὶ οὗτος ἔσται ὁ ζητούμενος. ἐπεὶ γὰρ τὸ βθ, τεταρτημόριόν ἐστι,

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 15.



πάντως γε καὶ τὸ μλ, ὁμοίως τεταρτημόριόν ἐστιν, ἴσα γὰρ κατὰ τὴν θ΄: τοῦ παρόντος, ὥσπερ καὶ τὸ αι, ἀλλὰ καὶ τὸ ηλ, τεταρτημόριόν ἐστι, γέγραπται γὰρ ὁ κλν, τῷ ηκ, διαστήματι τεταρτημορίῳ ὄντι κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα ὁ κέντρῳ μὲν τῷ λ, διαστήματι δὲ τῷ λν, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ η, οὗτος δ᾽ ἐστιν ὁ νμ, ἄρα ὁ νμ, διέρχεται καὶ διὰ τοῦ η, δοθέντος σημείου. ἀλλ᾽ ὁ νμη, ἅπτεται τοῦ αβ, κατὰ τὴν κατασκευήν, ἅπτεται ἄρα ὁ αὐτὸς καὶ τοῦ γδ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ς΄: τοῦ παρόντος, διέρχεται δὲ καὶ διὰ τοῦ η, ὡς δέδεικται, γέγονεν ἄρα τὸ προσταχθέν.

Ὅτι δὲ ὁ κλν, μέγιστος κύκλος τέμνει τὸν θι, δῆλον. τὸ γὰρ βθ, τεταρτημόριόν ἐστιν, ὥστε τὸ βκ, μεῖζόν ἐστι τεταρτημορίου, ἀπώτερον ἄρα ἐστὶ τὸ κ, τοῦ θ, διέρχεται δὲ ὁ μὲν θι, διὰ τοῦ θ, ὁ δὲ κλν, διὰ τοῦ κ, καὶ τοῦ μὲν θι, πόλος ἐστὶ τὸ ε, σημεῖον, ὅπερ καὶ τοῦ αβ, καὶ γδ, τοῦ δὲ κλν, τὸ η, ὁ κλν, ἄρα οὔτε παράλληλός ἐστι τῷ θι, ὡς μὴ ἔχων τὸν αὐτὸν πόλον, οὔ-

τε

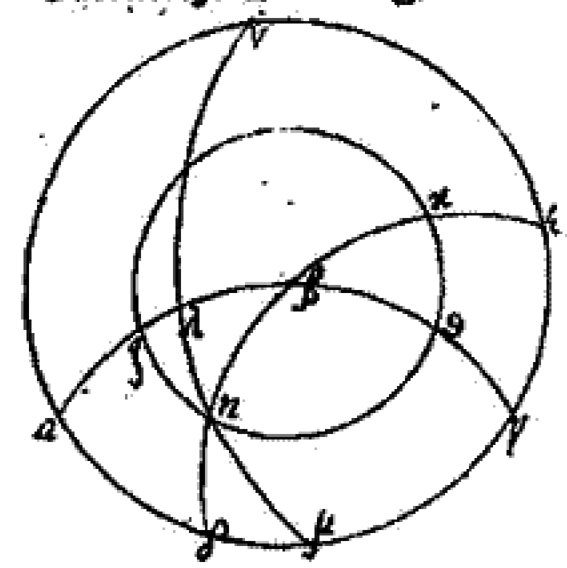
τὸ μίαν ἅπτεται αὐτοῦ, ὡς ἀφισαμένων τῶν θ, καὶ κ, σημείων ἀλλήλων, τέμνει ἄρα αὐτόν.

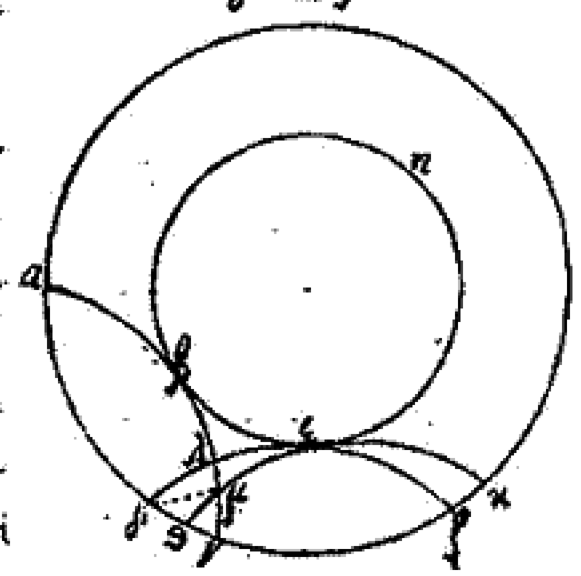
Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Δύο μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι, ἐὰν ὅμοια τόξα παραλλήλων κύκλων ἐναπολαμβάνωσιν, ἢ ἄμφω διὰ τῶν πόλων διέρχονται τῶν παραλλήλων, ἢ τοῦ αὐτοῦ ἑκάτερος ἅπτεται, ἢ γοῦν τοὺς παραλλήλους ἑκάτερος τέμνει.

Κύκλοι μέγιστοι οἱ α β γ, δ β ε, ἀπολαμβανέτωσαν ὅμοια τόξα τῶν α δ γ ε, ζ η θ κ, παραλλήλων τὰ α δ, ζ η. καὶ κείσθω τὸν α β γ, κύκλον διὰ τῶν πόλων τῶν α δ γ ε, ζ η θ κ, διέρχεσθαι παραλλήλων. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ δ β ε, διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν διέρχεται, τουτέστι τὸ β, σημεῖον, καθ' ὃ οἱ α β γ, δ β ε, τέμνονται κύκλοι, πόλος ἐστὶ τῶν α δ γ ε, ζ η θ κ, παραλλήλων. εἰ γὰρ μή, ἔστω πόλος τῶν αὐτῶν τὸ λ, σημεῖον, καὶ διὰ τῶν η, καὶ λ, γραφήτω κύκλος ὁ μ η λ ν, κατὰ τὴν ιϛ'. τοῦ α. τοῦ παρόντος, καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ, μ λ ν, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων τῶν α δ γ ε, ζ η θ κ, παραλλήλων διέρχονται, πάντως γε κατὰ τὴν θ'. τοῦ παρόντος ὅμοια τόξα ἐναπολαμβάνουσιν, ἄρα τὰ α μ, ζ η, ὅμοιά εἰσι, κατὰ τὴν αὐτήν. ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὅμοιά εἰσι καὶ τὰ α δ, ζ η, ἄρα καὶ τὰ α μ, α δ, ὅμοιά εἰσιν, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα τὸ λ, σημεῖον πόλος ἐστὶ τῶν ῥηθέντων παραλλήλων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλο τι, τὸ αὐτὸ γὰρ ἕψεται ἄτοπον. τὸ β, ἄρα πόλος ἐστὶ τῶν αὐτῶν. ὅπερ ἔδει τὸ α.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 16.





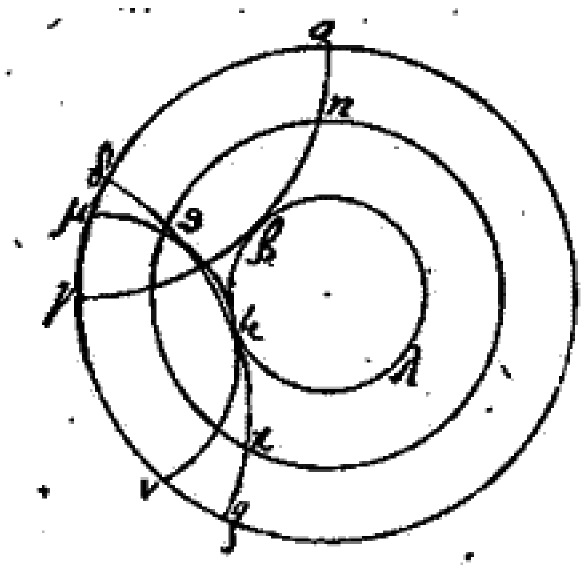
Ἀπολαμβανέτωσαν αὖθις οἱ α β γ, δ ε ζ, μέγιστοι κύκλοι ὅμοια τόξα τῶν α γ ζ, β ε η, παραλλήλων τὰ α δ, β ε. καὶ κείσθω τὸν α β γ, ἅπτεσθαι τοῦ β ε η, κατὰ τὸ β, σημεῖον. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ δ ε ζ, ἅπτεται τοῦ αὐτοῦ κατὰ τὸ ε, εἰ γὰρ μή, ἀπτέσθω τοῦ β ε η, κατὰ τὸ ε, ὁ θ ε κ, καὶ ἐπεὶ οἱ ζ ε δ, θ ε κ, μέγιστοί εἰσι, καὶ τέμνονται ἀλλήλοις κατὰ τὸ ε, πάντως γε ὁ θ ε κ, οὐ διέρχεται διὰ τοῦ δ. εἰ γὰρ δυνατόν, διελθέτω, ὡς ὁ δ μ ε κ. κατὰ τὴν ια. ἄρα τοῦ παρόντος τὰ δ λ ε, δ μ ε, τόξα ἡμικύκλια ἂν εἴησαν. ἀλλὰ τὸ δ ε, ἴσον ἐστὶ τῷ α β, διὰ τὸ ἴσα εἶναι τὰ α β γ, δ ε ζ, τόξα κατὰ τὴν ιβ'. τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν α β, β γ, ἡμικύκλιόν ἐστι, καὶ τὸ α β γ, τόξον κύκλος, ὅπερ ἀδύνατον, ἄρα θ ε κ, οὐ διέρχεται διὰ

τοῦ

τοῦ δ. ἐπεὶ δὲ ἅπτεται τοῦ β ε η, κατὰ τὸ ε, ἅπτεται δὲ τοῦ αὐτοῦ καὶ ὁ α β γ, κατὰ τὸ β, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβ': τὰ α θ, β ε, τόξα ὅμοιά εἰσιν, ἀλλὰ καὶ τὰ α δ, β ε, ὅμοιά εἰσι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα τὰ α δ, α θ, ὅμοιά εἰσιν, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ θ ε κ, ἅπτεται τοῦ β ε η, οὐδ' ἄλλος τις παρὰ τὸν δ ε ζ. ἄρα ὁ δ ε ζ, ἅπτεται τοῦ β ε η, κατὰ τὸ ε, ὅπερ ἦν τὸ β':

Ἀπολαμβανέτωσαν τελευταῖον οἱ α β γ, δ ε ζ, μέγιστοι κύκλοι ὅμοια τόξα τῶν α γ ζ, η θ κ, παραλλήλων τὰ α δ, η θ. καὶ κείσθω τὸν α β γ, τέμνειν τὸν η θ κ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ δ ε ζ, τέμνει τὸν αὐτὸν η θ κ. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α β γ, πλαγίως τέμνει τὸν η θ κ, οὐ γὰρ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, ἅπτεται δύο κύκλων ἴσων τε ἀλλήλοις καὶ παραλλήλων τοῦ τεμνομένου, ἁπτέσθω δὴ τοῦ β ε λ, κατὰ τὸ β, διὰ δὲ τοῦ θ, σημείου γραφήτω κύκλος μέγιστος ἁπτόμενος τοῦ β ε λ, κατὰ τὴν ιδ': τοῦ παρόντος, καὶ πάντως γε συμπεσεῖται τῷ δ ε ζ. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω οὗτος ὁ μ θ ε ν. καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ, μ θ ε ν, μέγιστοι κύκλοι ἅπτονται τοῦ β ε λ, παραλλήλου, τοὺς δὲ λοιποὺς η θ κ, α γ ζ, τέμνουσι, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος τὰ α μ, η θ, τόξα ὅμοιά εἰσιν, ἀλλὰ καὶ τὰ α δ, η θ, ὅμοιά εἰσι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα τὰ α δ, α μ, ὅμοιά ἐστι τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον, ὁ ἁπτόμενος ἄρα τοῦ β ε λ, παραλλήλου μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τοῦ θ, διερχόμενος συμπίπτει τῷ δ ε ζ. ὥστε ὁ δ ε ζ, ἅπτεται τοῦ β ε λ, κύκλου. καὶ ἐπεὶ ἅπτεται τοῦ ἐλάσσονος τῶν παραλλήλων κύκλων, πάντως γε τέμνει τοὺς λοιποὺς, τέμνει ἄρα τὸν η θ κ, ὅπερ ἦν τὸ γ':

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 17.

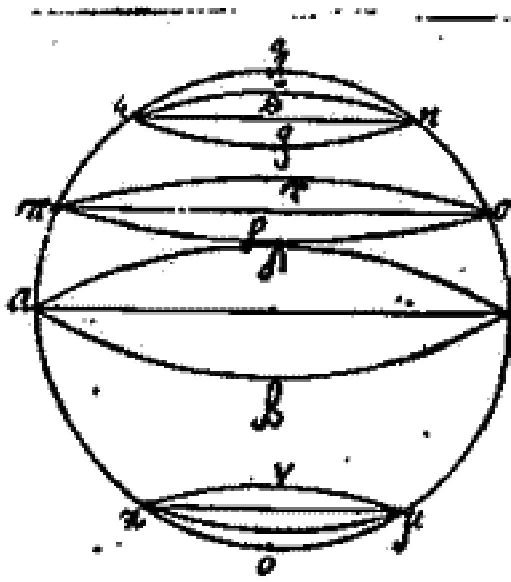


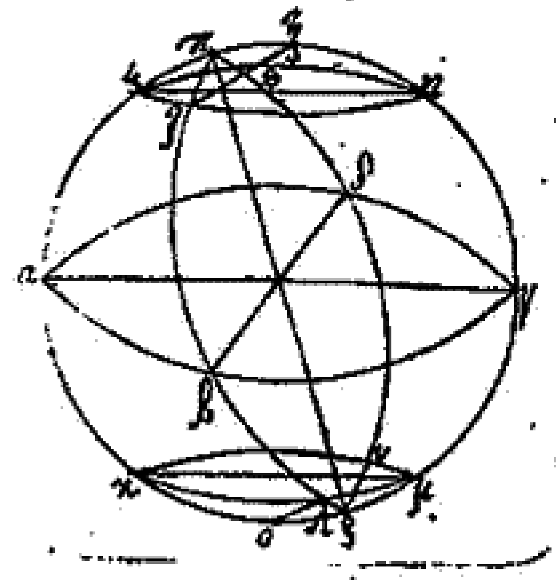
Πρότασις Ις': Θεώρημα.

Τῶν ἐν σφαίρᾳ παραλλήλως κειμένων κύκλων μεγίστῳ τινὶ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλῳ, οἱ ἐξ ἴσου τοῦ μεγίστου ἀφιστάμενοι κύκλου, καὶ ὧν μεταξὺ καὶ τοῦ μεγίστου τὰ τόξα ἴσα ἐστὶν, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν, ὁ δὲ ἔλαττον ἀφιστάμενος, καὶ οὗ μεταξὺ καὶ τοῦ μεγίστου ἔλαττον ἐμπεριλαμβάνεται τόξον, μείζων ἐστὶν, οὗ δὲ μεταξὺ μεῖζον ἐμπεριλαμβάνεται τόξον, ἐλάττων ἐστίν.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος μέγιστος ὁ α β γ δ, καὶ τούτῳ παράλληλοι οἱ ε ζ η θ, κ λ μ ν, ἐξ ἴσου ἑκάτερος τοῦ α β γ δ, ἀφιστάμενος, ἤτοι ἴσωσαν τὰ α ε, α κ, τόξα, καὶ γ η, γ μ, ἴσα. Λέγω τοὺς ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους κύκλους, ἴσους ἀλλήλοις εἶναι. Γραφήτω κύκλος μέγιστος τέμνων τοὺς α β γ δ, ε ζ η θ, κ λ μ ν, κύκλους. καὶ ἐπεὶ ὁ αὐτὸς κύκλος ἤτοι διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν παραλλήλων διελεύσεται ϛεται κύκλων, ἢ μὴ διὰ τῶν πόλων. Κείσθω αʹ: διέρχεσθαι διὰ τῶν ξ, καὶ ο, πόλων, ὡς ὁ ξ α ο γ. ϗ ἐπεὶ μέγιϛος κύκλος ὁ ξ α ο γ, διὰ τῶν πόλων διέρχεται τῶν ε ζ η θ, α β γ δ, κ λ μ ν, πάντως γε κατὰ τὴν ιβʹ: τοῦ αʹ: τοῦ παρόντος δίχα ϗ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει, αἱ ἄρα ε η, α γ, κ μ, κοιναὶ τομαὶ τῶν παραλλήλων ϗ μεγίϛου τοῦ ξ α ο γ, κύκλου διάμετροί εἰσι τῶν ε ζ η θ, α β γ δ, κ λ μ ν, παραλλήλων κύκλων. Αὖθις ἐπεὶ οἱ α γ β δ, ξ α ο γ, κύκλοι μέγιϛοί εἰσι, πάντως γε κατὰ τὴν ιʹ: τοῦ αʹ: τοῦ παρόντος δίχα ἀλλήλους τέμνονται. Ἴσον ἄρα τὸ α ξ γ, τῷ α ο γ, ἀλλὰ ϗ τὸ α ε, τῷ α κ, ἴσον ἐϛιν, ὥσπερ καὶ τὸ γ η, τῷ γ μ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα ϗ τὰ ε ξ η, κ ο μ, τόξα ἴσα ἐϛιν, ὥϛε κατὰ τὴν κθʹ: τοῦ γʹ: τοῦ ϛοιχειωτοῦ, αἱ ε η, κ μ, ἴσαι εἰσιν, ἀλλ' αἱ ε η, κ μ, διάμετροί εἰσι τῶν ε ζ η θ, κ λ μ ν, ὡς δέδεικται, κύκλων, ἄρα οἱ ε ζ η θ, κ λ μ ν, κύκλοι ἴσοι εἰσιν.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 18.





Ἀλλὰ δὴ ἔϛω τὸ α π, τόξον ἔλαττον τοῦ α κ. Λέγω, ὅτι ὁ π ρ σ τ, κύκλος μείζων ἐϛὶ τοῦ κ λ μ ν. τοῦ γὰρ ξ α ο γ, μεγίϛου κύκλου, ὡς εἴρηται, γεγραμμένου, οἱ π ρ σ τ, α β γ δ, κ λ μ ν, κύκλοι δίχα τμηθήσονται, ὥϛε αἱ π σ, α γ, κ μ, διάμετροί εἰσι τῶν π ρ σ τ, α β γ δ, κ λ μ ν, κύκλων. ϗ ἐπεὶ τὰ α ξ γ, α ο γ, τόξα ἴσα εἰσιν, ὡς δέδεικται, πάντως γε ἀφαιρουμένων τῶν α π, α κ, ϗ γ σ, γ μ, ἀνίσων τόξων, ἐναπολείπεται τὸ π ξ σ, μεῖζον τοῦ κ ο μ, ϗ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κθʹ: τοῦ γʹ: ἡ π σ, μείζων ἐϛὶ τῆς κ μ. ἀλλ' ἡ μὲν π σ, διάμετρός ἐϛι τοῦ π ρ σ τ, ἡ δὲ κ μ, τοῦ κ λ μ ν, κύκλου, ἄρα ὁ π ρ σ τ, μείζων ἐϛὶ τοῦ κ λ μ ν, ὅπερ ἔδει τὸ βʹ:

Κείσθω δ' ἔτι τὸν π β ρ δ, γραφόμενον κύκλον, τοὺς α β γ δ, ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους τέμνοντα μὴ διὰ τῶν πόλων ξ, ο, αὐτῶν διέρχεσθαι. ϗ ἔϛωσαν τὰ β ζ, β λ, δ θ, δ ν, τόξα τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ϗ τοῦ μεγίϛου α β γ δ, κύκλου ἴσα. Λέγω ϗ οὕτω τοὺς ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους ἴσους εἶναι. Γραφήτω γὰρ διὰ τῶν πόλων τῶν τε ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλων, καὶ τοῦ β π δ ρ, ὁ ξ α ο γ, κατὰ τὴν ιςʹ: τοῦ αʹ: τοῦ παρόντος, καὶ ἐπεὶ ὁ ξ α ο γ, διὰ τῶν πόλων τῶν τε παραλλήλων ϗ τοῦ π β ρ δ, διέρχεται, πάντως γε δίχα ϗ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει, ἄρα ὁ ξ α ο γ, ὀρθός ἐϛι πρὸς τὸν β π δ ρ, καὶ τὰ π α ρ, π γ ρ, τόξα ὅμοια ἐπὶ τῆς π ρ, ἐφίϛαται διαμέτρου, κατὰ δὲ τὸ αʹ: πόρισμα τῆς ιβʹ: τοῦ αʹ: τοῦ παρόντος, ϗ οἱ π β ρ δ, α β γ δ, διὰ τῶν πόλων τοῦ ξ α ο γ, διέρχονται. ἔϛι δὲ τὸ β, σημεῖον κοινὸν, καθ' ὃ τέμνονται οἱ β γ δ ε, π β ρ δ, μέγιϛοι κύκλοι, ἄρα τὸ β, πόλος

πόλος ἐστὶ τοῦ ξ α ο γ, ὥστε τὰ β π, β ρ, τόξα ἴσα ἐστιν, ἀφαιρουμένων δὲ τῶν β ζ, β λ, ἴσων, ἐναπολείπονται λοιπὰ τὰ ζ π, λ ρ, ἴσα. Αὖθις ἐπεὶ οἱ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνονται κατὰ τὸ ιαʹ: τοῦ αʹ: τοῦ παρόντος, τὸ π γ ρ, ἡμικύκλιόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τὸ ξ γ ο, ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἄρα τὰ π γ ρ, ξ γ ο, ἴσα ἐστιν, κοινοῦ γοῦν ἀφαιρουμένου τοῦ ξ γ ρ, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ ξ π, ο ρ. δέδεικται δὲ ὅτι ἐπὶ τῆς π ρ, διαμέτρου ἐφίσταται ὅμοια τόξα τὰ π α ρ, π γ ρ, ὀρθὰ ὄντα πρὸς τὸ τοῦ π β ρ δ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ ἀφῃρέθησαν ἴσα τόξα ἀπὸ μὲν τοῦ π β ρ δ, κύκλου τὰ ζ π, λ ρ, ἀπὸ δὲ τῶν π α ρ, π γ ρ, τόξων τὰ π ξ, ο ρ, ἄρα κατὰ τὸ ιʹ: τοῦ παρόντος, τὰ ξ ζ, ο λ, διαστήματα ἴσα ἐστιν, ἀλλὰ τὰ ξ, καὶ ο, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τῶν ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλων κύκλων, ἄρα κατὰ τὸν εʹ: ὅρον τοῦ αʹ: τοῦ παρόντος οἱ ε ζ η θ, κ λ μ ν, κύκλοι ἴσοι εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐὰν δὲ τὸ β ζ, ἔλαττον εἴη τοῦ β λ, πάντως γε τὸ ζ π, μεῖζον ἔσται τοῦ λ ρ, καὶ ἔτι τὸ ζ ξ, διάστημα τοῦ ο λ, ὁ δὲ μεῖζον ἀφιστάμενος τοῦ πόλου μείζων ἐστὶ, μείζων ἄρα καὶ ὁ ε ζ η θ, τοῦ κ λ μ ν.

Πρότασις ΙΖʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι ἴσοι κύκλοι παράλληλοι μεγίστῳ τινὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλῳ, τὰ τοῦ μεγίστου κύκλου τόξα τὰ μεταξὺ αὐτῶν τε καὶ τοῦ, πρὸς ὃν παραλλήλως ἔχουσι, μεγίστου κύκλου ἐναπολαμβανόμενα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστωσαν δὴ ἐπὶ τῶν αὐτῶν σχημάτων παράλληλοι οἱ ε ζ η θ, κ λ μ ν, κύκλοι τῷ α β γ δ, μεγίστῳ κύκλῳ, καὶ κείσθω τὸν ξ α ο γ, μέγιστον κύκλον τέμνειν τοὺς ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους. Λέγω τὰ α ε, α κ, καὶ γ η, γ μ, ἐναπολαμβανόμενα τόξα μεταξὺ αὐτῶν τε καὶ τοῦ α β γ δ, μεγίστου κύκλου ἴσα εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, ἔσται τὸ α ε, φέρ᾽ εἰπεῖν ἔλαττον τοῦ α κ, καὶ κατὰ τὸ ἀνωτέρω ὁ ε ζ η θ, κύκλος μείζων ἂν εἴη τοῦ κ λ μ ν, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Πρότασις ΙΗʹ: Θεώρημα.

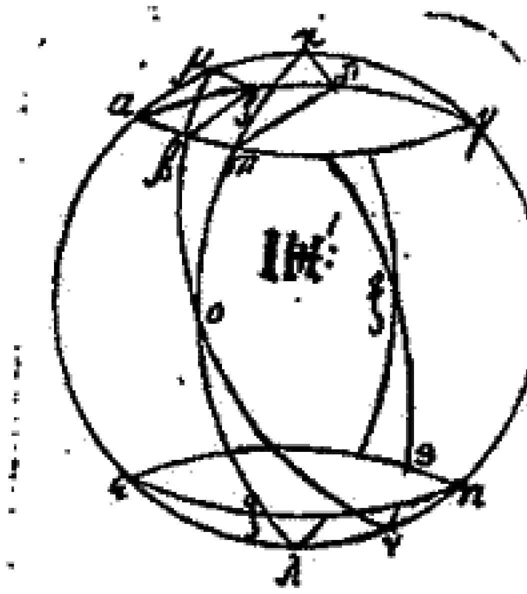
Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ ἐλάσσονάς τε καὶ παραλλήλους τέμνῃ κύκλους μὴ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχόμενος, οὐ τέμνει αὐτοὺς δίχα, καὶ τὰ τῶν παραλλήλων μείζονα τμήματα πρὸς τὸν ἐγγύτερον ἀφορῶσι πόλον.

Ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοι οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, ὧν πόλοι τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα, καὶ τεμνέτω αὐτοὺς ὁ μ β ν ξ, μὴ διερχόμενος διὰ τῶν κ, καὶ λ, πόλων. Λέγω τὸν μ β ν ξ, μὴ δίχα τέμνειν τοὺς α β γ δ, ε ζ η θ, παραλλήλους. Γραφήτω γὰρ διὰ τῶν κ, καὶ λ, πόλων ὁ κ ο λ ξ, μέγιστος, καὶ ἐπεὶ ὁ κ ο λ ξ, διὰ τῶν πόλων τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, διέρχεται κύκλων, πάντως γε κατὰ τὸ ιβʹ: τοῦ αʹ: τοῦ παρόντος

δίχα

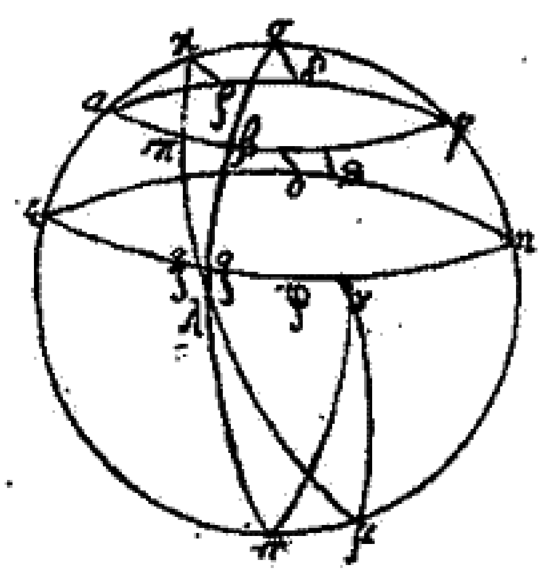
δίχα αὐτοὺς τέμνει, ὥστε τὸ π γ δ, τόξον ἡμικυκλιόν ἐστιν, ἄρα τὸ β γ ρ, μεῖζόν ἐστιν ἡμικυκλίου, τὸ δὲ β α ρ, ἔλαττον, ἀλλ' ὁ α β γ δ, τέμνεται ὑπὸ τοῦ μ β ν ξ, μεγίστου κύκλου κατὰ τὰ β, καὶ ρ, ἄρα ὁ μ β ν ξ, μέγιστος κύκλος μὴ διερχόμενος διὰ τῶν πόλων τοῦ α β γ δ, οὐ τέμνει αὐτὸν δίχα. ὅπερ ἦν τὸ α'. Ὅτι δὲ καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸν ἐγγύτερον ἀφορᾷ πόλον, δῆλον, τὸ γὰρ β γ ρ, τμῆμα μεῖζον ὂν πρὸς τὸν κ, ἀφορᾷ πόλον. τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται μηδὲ τὸν ε ζ η θ, δίχα τέμνειν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 19.

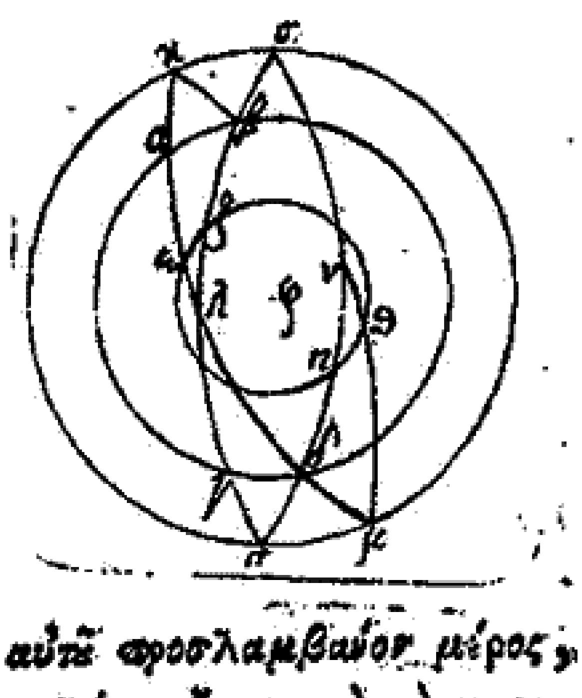


Πρότασις ΙΘ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλοι παράλληλοί τε καὶ ἐλάσσονες ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μεγίστου τέμνωνται κύκλου, μὴ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχομένου, ὁ ἐγγύτερος τοῦ πόλου μᾶλλον ἀνίσως τέμνεται.



Ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοί τε καὶ ἐλάσσονες οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, καὶ τεμνέτω ἑκάτερον αὐτῶν ὁ κ λ μ ν, μέγιστος κύκλος κατὰ τὰ ξ ο, π ρ, μὴ διερχόμενος διὰ τῶν σ, τ, πόλων τῶν αὐτῶν. Λέγω, ὅτι ὁ α β γ δ, ἐγγύτερος ὢν τοῦ σ, πόλου μᾶλλον ἀνίσως ὑπὸ τοῦ κ λ μ ν, τέμνεται κύκλου, ἢ ὁ ε ζ η θ. Ὑποκείσθω γὰρ τὸν σ λ τ ν, μέγιστον κύκλον διὰ τῶν σ, καὶ τ, διέρχεσθαι πόλων. καὶ ἐπεὶ ὁ σ λ τ ν, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, παραλλήλων διέρχεται, δῆλον, ὅτι τὸ μὲν ζ η, τόξον ὅμοιόν ἐστι τῷ β γ, καὶ τὸ η θ, τῷ γ δ, κατὰ τὴν θ': τοῦ παρόντος. ὥστε ὅλον τὸ ζ η θ, ὅλῳ τῷ β γ δ, ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ξ η ο, οὐκ ἔστιν ὅμοιον τῷ π γ ρ, ἄλλως γὰρ ὁ κ λ μ ν, διὰ τῶν πόλων τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, παραλλήλων διήρχετο, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. ἀλλὰ τό, τε ξ, τοῦ ζ, καὶ τὸ ο, τοῦ θ, ἔλαττον ἀφίσταται, ἤπερ τὸ π, τοῦ β, καὶ τὸ ρ, τοῦ δ, ὡς δειχθήσεται, ἄρα τὸ ξ η ο, ἐλάττονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ ξ ε ο, ὡς ἔλαττον αὐτοῦ προσλαμβάνον μέρος, ἤπερ τὸ π γ ρ, πρὸς τὸ π α ρ, τὸ ἄρα π γ ρ, ὡς μείζονα λόγον ἔχον πρὸς τὸ π α ρ, μείζονι αὐτοῦ ὑπεροχῇ ὑπερέχει, ἢ τὸ ξ η ο, τοῦ ξ ε ο, καὶ ἑπομένως μᾶλλον ἀνίσως τέμνεται ὑπὸ τοῦ κ λ μ ν, μεγίστου κύκλου, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν. Ὅτι δὲ τὸ ξ,



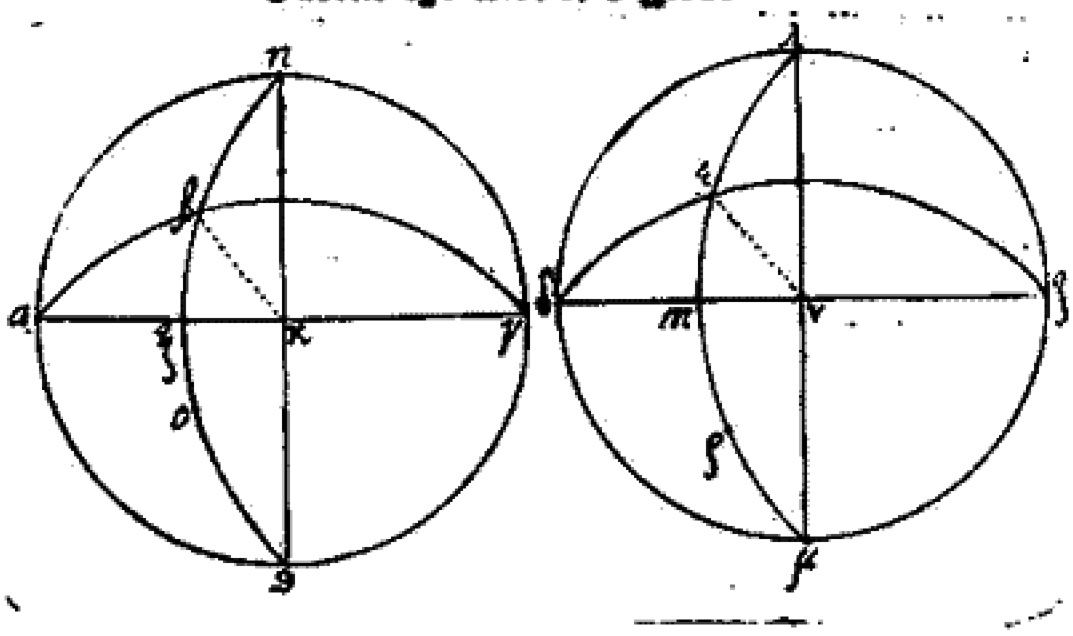
τοῦ ζ, ἔλαττον ἀφίσαται, ἤπερ τὸ π, τοῦ β, δῆλον. Γραφήτωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ φ, πόλου τοῦ σ κ τ μ, μεγίστου κύκλου οἱ α γ δ β, ε η θ ζ, παράλληλοι κύκλοι, καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν κ λ μ ν, σ λ τ ν, διὰ τῶν πόλων τῶν σ κ τ μ, α γ δ β, ε η θ ζ, διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν θ': τοῦ παρόντος τὰ ε ζ, α β, κ σ, τόξα ὅμοιά εἰσιν. ὥστε ὃ μέρος τὸ ε ζ, τοῦ ε η θ ζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ α β, τοῦ α γ δ β, καὶ τὸ κ σ, τοῦ κ τ μ σ, μείζων δὲ ὁ κ τ μ σ, τοῦ α γ δ β, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ κ σ, ὁμολόγον μέρος τοῦ α β, καὶ τὸ α β, ὁμοίως τοῦ ε ζ, μεῖζόν ἐστιν. ὥστε τῶν πλαγίως τεμνομένων κύκλων τὰ μὲν προσεγγίζοντα τῇ τομῇ μέρη, ἔλαττον ἀφίσανται, τὰ δὲ ἀπώτερον ὄντα, μεῖζον, καὶ μέγιστον μὲν ἐστι τὸ τεταρτημορίῳ ἀφισάμενον, ὡς τὸ κ σ. τεταρτημορίῳ γὰρ τὰ κ, σ, τῶν λ, καὶ ν, ἀφίσανται, καθ' ἃ οἱ κύκλοι τέμνονται, μεῖζον δὲ τὸ μᾶλλον ἀφισάμενον. ἀλλὰ τό, π ξ, καὶ ζ, ἔλαττον τοῦ λ, ἀφίσανται, ἤπερ τὸ π, καὶ β, μεῖζον ἄρα τὸ π, τοῦ β, ἤπερ τὸ ξ, τοῦ ζ, ἀφίσαται. ὅπερ ἔδει τὸ λειπόμενον.

Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Ἐπὶ τῶν ἴσων σφαιρῶν κύκλος κύκλῳ μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν, οὗ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσαται τοῦ πόλου τοῦ, ᾧ ἐγκλίνεται, κύκλου, ὧν δὲ οἱ πόλοι ἐξ ἴσου ἀφίσανται ἴσας καὶ τὰς ἐγκλίσεις ἔχουσιν.

Ἔστωσαν ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἐγκλινόμενοι κύκλοι οἱ α β γ, δ ε ζ, ὁ μὲν τῷ α θ γ η, μεγίστῳ κύκλῳ, οὗ κέντρον τὸ κ, ὁ δὲ τῷ δ μ ζ λ, οὗ κέντρον τὸ ν, καὶ κείσθω τὸν πόλον τοῦ α β γ, ἔλαττον ἀφίσασθαι τοῦ πόλου τοῦ α θ γ η, ἤπερ ὁ πόλος τοῦ δ ε ζ, τοῦ πόλου τοῦ δ μ ζ λ. Λέγω, ὅτι ὁ α β γ, κύκλος μᾶλλον ἐγκλίνεται τῷ α θ γ η. ἤπερ ὁ δ ε ζ, τῷ δ μ ζ λ. ἐπεὶ δὲ οἱ ἐγκλινόμενοι κύκλοι ἤτοι μέγιστοί εἰσιν, ἢ ἐλάσσονες. Ἔστωσαν οἱ μέγιστοι, καὶ ἀπὸ τῶν α, καὶ δ, σημείων, τῶν κοινῶν τομῶν τῶν α β γ, α θ γ η, καὶ δ ε ζ, δ μ ζ λ, ὡς ἀπὸ πόλων διαστήματι τεταρτημορίῳ γραφήτωσαν οἱ η β θ, λ ε μ, κύκλοι, οἳ καὶ μέγιστοί εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιγ': τοῦ α': τοῦ παρόντος. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κ β, ν ε. καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ, α θ γ η, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων τοῦ η β θ, διέρχονται, πάντως γε καὶ ὁ η β θ, διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν διέρχεται κατὰ τὸ α': πόρισμα τῆς ιβ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, καὶ ἑκάτερον δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει

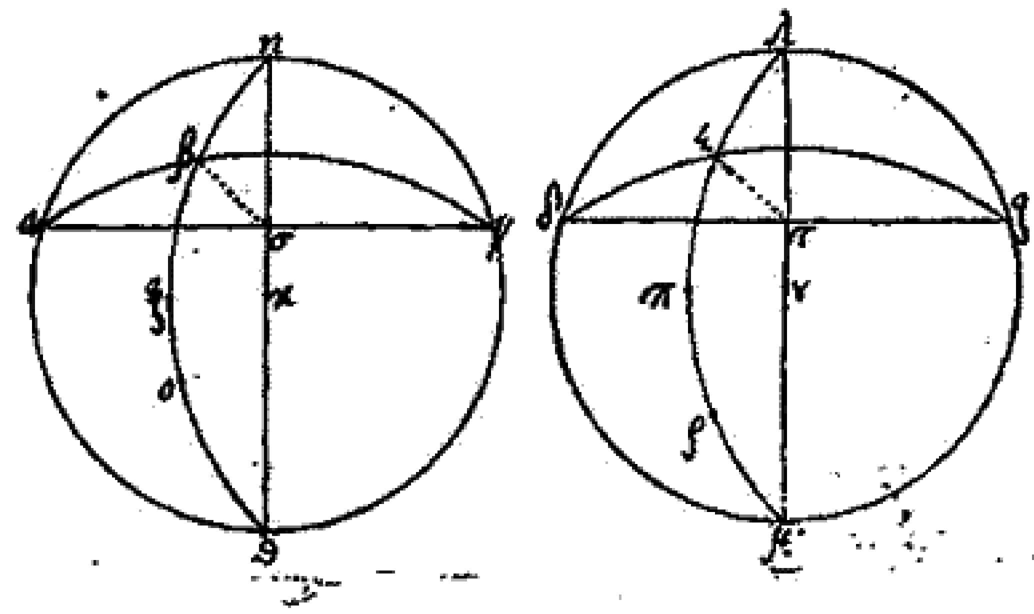
Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 20.



καὶ

καὶ τὴν αὐτὴν πρότασιν. ὥστε οἱ πόλοι τῶν α β γ, καὶ α θ γ η, ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐστὶ τοῦ η β θ, κύκλου. Ἔστω τοίνυν πόλος τοῦ μὲν α θ γ η, τὸ ξ, σημεῖον, τοῦ δὲ α β γ, τὸ ο. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸν δ': ὅρον τοῦ ια: τοῦ στοιχ: τότε λέγεται ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶναι, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, πάντως γε ἡ γ κ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ η β θ, κύκλου ἐπίπεδον, διὰ τὸ ὀρθὸν εἶναι καὶ τὸν α θ γ η, κύκλον πρὸς τὸν η β θ. ὥστε καὶ τὸν γ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἡ γ κ, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὴν κ η, καὶ κ β. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ζ υ, ὀρθή ἐστι πρός τε τὴν υ λ, καὶ υ ε. ἄρα κατὰ τὸν ϛ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἡ ὑπὸ β κ η, γωνία κλίσις ἐστὶ τοῦ α β γ, κύκλου πρὸς τὸν α θ γ η, ἡ δὲ ὑπὸ ε υ λ, ὁμοίως κλίσις ἐστὶ τοῦ δ ε ζ, πρὸς τὸν δ μ ζ λ, ἀλλὰ τὸ ο β, ἴσον ἐστὶ τῷ ξ η, τεταρτημόριον γὰρ ἑκάτερον ἴσων κύκλων, κοινοῦ ἄρα ἀφαιρουμένου τοῦ ξ β, ἐναπολείπεται τὸ ο ξ, ἴσον τῷ β η. ὡσαύτως ἀφαιρουμένου καὶ τοῦ π ε, ἐναπολείπεται τὸ ρ π, ἴσον τῷ ε λ, ἀλλὰ τὸ ο ξ, ἔλαττόν ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ ρ π, ἔλαττον. ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ β η, τοῦ ε λ. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ β κ η, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ε υ λ, καί εἰσι τῶν κλίσεων γωνίαι, ὡς δέδεικται, ὁ ἄρα α β γ, κύκλος, οὗ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσταται τοῦ πόλου τοῦ α θ γ η, κύκλου, μᾶλλον πρὸς τὸν αὐτὸν ἐγκέκλιται κύκλον.

Theod. Sf. Lib.2. Fig.22.



Ἔστωσαν δ' ἔτι οἱ α β γ, δ ε ζ, ἐλάττονες κύκλοι ἐγκλινόμενοι πρὸς τοὺς α θ γ η, δ μ ζ λ, καὶ τοῦ μὲν α β γ, ὁ πόλος ἀφιστάσθω ἧττον τοῦ πόλου τοῦ α θ γ η, κύκλου, ἤπερ ὁ τοῦ δ ε ζ, πόλος τοῦ πόλου τοῦ δ μ ζ λ. Λέγω τὸν α β γ, κύκλον μᾶλλον ἐγκλινόμενον εἶναι τῷ α θ γ η, κύκλῳ, ἢ τὸν δ ε ζ, τῷ δ μ ζ λ. Τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, καὶ τῶν σ β, τ ε, εὐθειῶν ἀχθεισῶν, εὐχερῶς δειχθήσεται, ὡς ἀνωτέρω, τὸν η ξ θ, εἶναι ὀρθὸν πρός τε τὸν α β γ, καὶ α θ γ η. ὁμοίως καὶ τὸν λ π μ, πρός τε τὸν δ ε ζ, καὶ δ μ ζ λ. ὥστε καὶ τοὺς πόλους τῶν μὲν α β γ, α θ γ η, ἐπὶ τῆς περιφερείας εἶναι τοῦ η ξ θ, τοὺς δὲ πόλους τῶν δ ε ζ, καὶ δ μ ζ λ, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ λ π μ. εἶτα δειχθήσεται τὴν μὲν β η, περιφέρειαν ἴσην εἶναι τῇ ξ ο, τὴν δὲ λ ε, τῇ π ρ. ἀλλ' ἡ ξ ο, ὑπετέθη ἐλάττων τῆς π ρ, τὸ γὰρ ξ, πόλος ἐστὶ τοῦ α θ γ η, ὡς καὶ ἀνωτέρω ὑπετέθη, τὸ δὲ ο, τοῦ α β γ. καὶ τὸ μὲν π, τοῦ δ μ ζ λ, τὸ δὲ ρ, τοῦ δ ε ζ. δῆλον ἄρα ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ β σ η, γωνία ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ε τ λ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα γωνία ἐγκλίσεως. ἄρα ὁ α β γ, οὗ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσταται, μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν,

ἢ ὁ

ὁ δεζ, οὗ ὁ πόλος μᾶλλον ἀφίσταται. ὥστε ἐὰν αἱ ξο, πρ, περιφέρειαι ἴσαι ὦσιν, ἴσαι δειχθήσονται καὶ αἱ βη, ελ. καὶ ἑπομένως γωνία ἡ ὑπὸ βση, ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ εκλ. ἄρα καὶ κύκλοι οἱ αβγ, δεζ, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοί εἰσιν, ὁ μὲν πρὸς τὸν αθγη, ὁ δὲ πρὸς τὸν δμζλ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

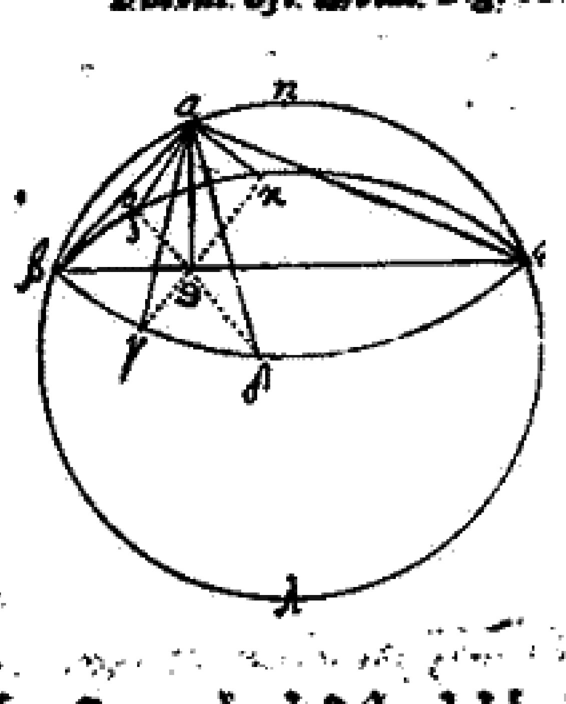
Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἐὰν διὰ τῶν πόλων τοῦ τε ἐγκλινομένου, καὶ τοῦ, ᾧ ἐγκέκλιται ὁ αὐτὸς, μέγιστος διέλθῃ κύκλος, τὸ ἐναπολαμβανόμενον τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου ὑπό τε τοῦ ἐγκλινομένου, καὶ ᾧ ἐγκέκλιται, μεῖζον ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου κλίσεως.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν πόλος κύκλου τινὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ εὐθεῖαί τινες ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ ὑπὸ τὸν πόλον τοῦ κύκλου, εἰς δι' αὐτοῦ ἀγομένη, ἐλαχίστη δὲ ἡ κατὰ διάμετρον ταύτῃ ἀντικειμένη, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ὑπὸ τὸν πόλον τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ, δύο δὲ μόναι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς τε μεγίστης καὶ ἐλαχίστης.

Ἀπὸ τοῦ α, σημείου μὴ ὄντος πόλου τοῦ βγδεζ, κύκλου πιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου εὐθεῖαί τινες αἱ αβ, αγ, αδ, αε, αζ, καὶ ἔσω ἡ μὲν αε, ὑπὸ τὸν κ, πόλον τοῦ βγδεζ, ὡς δι' αὐτοῦ ἠγμένη, ἀντικείσθω δὲ ταύτῃ κατὰ διάμετρον ἡ αβ, ὥστε τὴν βε, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ διέρχεσθαι κύκλου. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν αε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ δὲ αβ, ἐλαχίστη, ἡ δὲ αδ, μείζων τῆς αγ. Πιπτέτω γὰρ κάθετος ἀπὸ τοῦ α, σημείου πρὸς τὸ τοῦ βγδεζ, κύκλου ἐπίπεδον ἡ αθ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θγ, θδ. καὶ ἐπεὶ τὸ α, σημεῖον οὐκ ἔστι πόλος τοῦ βγδεζ, κύκλου, δῆλον, ὅτι καὶ τὸ θ, οὐκ ἔστι κέντρον τοῦ αὐτοῦ, εἰ γὰρ ἦν, καὶ τὸ α, πάντως γε πόλος ἦν κατὰ τὸ πόρισμα τῆς θ' τοῦ α' τοῦ παρόντος. ἀλλ' ἡ αθ, ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου πίπτει, ὡς δειξόμεθα, ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βγδεζ, κύκλου ἐπὶ τῆς θε, ἐστὶ, πρὸς ἣν καὶ ὁ πόλος ἀφορᾷ, καὶ κατὰ τὴν ζ' τοῦ γ' τῶν στοιχειωτῶν, ἡ μὲν θε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ δὲ θβ, ἐλαχίστη, καὶ ἡ θδ, μείζων τῆς θγ. ὥστε καὶ τὸ τετράγωνον τῆς θε, μέγιστόν ἐστι, τὸ δὲ τῆς θβ, ἐλάχιστον, καὶ τὸ τῆς θδ, μεῖζον τοῦ τῆς θγ. ἔστι δὲ ἡ αθ, πρὸς ὀρθὰς ἐφ' ἑκάστης τῶν θβ, θγ, θδ, θε, κατὰ τὸν γ' ὅρον τοῦ ια' τοῦ αὐτοῦ, ἄρα κοινοῦ λαμβανομένου

Theod. Sf. Lib. Fig. 22.



μένου τοῦ ἀπὸ τῆς αθ, τετραγώνου, πάντως γε τὰ ἀπὸ τῶν αθ, θε, τετράγωνα μέγιστά εἰσιν, ἐλάχιστα δὲ τὰ ἀπὸ τῶν αθ, θβ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αθ, θδ, μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν αθ, θγ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αθ, θε, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αθ, θβ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αθ, θδ, τὸ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αθ, θγ, τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἄρα ἡ μὲν αε, μεγίστη ἐστὶ, καὶ διέρχεται ὑπὸ τὸν πόλον, ἡ δὲ αβ, ἐλαχίστη, καὶ ἡ αδ, μείζων τῆς αγ. ὅπερ ἦν τοῦ ὑποκειθέντος τὸ α':

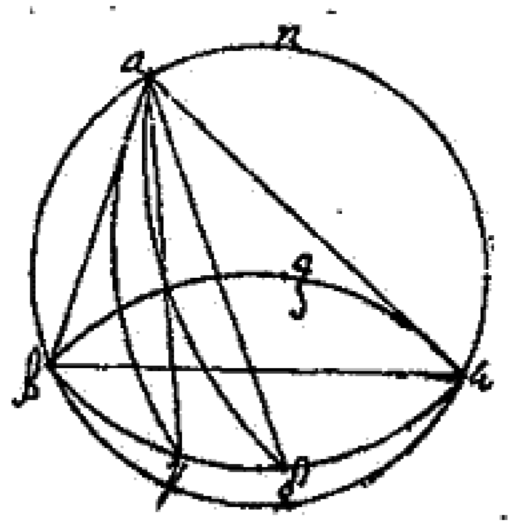
Ὅτι δὲ δύο ἐφ' ἑκάτερα τῆς θε, ἢ θβ, μόνον εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ α, προσπίπτουσι σημείου ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, δῆλον, κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν ζ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ δύο ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης θβ, ἀπὸ τοῦ θ, σημείου μόνον προσπίπτουσιν εὐθεῖαι, ὡς αἱ θγ, θζ, ὥστε κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ ἀπὸ τῆς αθ, τὰ ἀπὸ τῶν αθ, θγ, τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αθ, θζ, καὶ κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα ἴσα εἰσὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ, αζ, ἄρα καὶ ἡ αγ, ἴση ἐστὶ τῇ αζ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ αδ, τῇ αχ, ἴση. ὅπερ ἦν τὸ β': Λείπεται οὖν δεῖξαι ὅτι καὶ ἡ αθ, ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου πίπτει.

Γραφήτω δὴ διὰ τῶν α, καὶ η, σημείων κύκλος μέγιστος ὁ αβλε, κατὰ τὴν ιε': τοῦ α': τοῦ παρόντος, καὶ ἔσται κοινὴ τομὴ αὐτοῦ τε καὶ τοῦ βγδεζ, κύκλου ἡ βθε, ἀλλ' ὁ αβλε, κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδεζ, κύκλου ἐπίπεδον κατὰ τὴν ιβ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ διὰ τῆς αθ, διέρχεται. ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ πρὸς τὸ τοῦ βγδεζ, κύκλου ἐπίπεδον, ἄρα κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ ια': τοῦ στοιχειωτοῦ ἡ αθ, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὴν βε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν κύκλου τινὸς πόλος, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τόξα μεγίστων κύκλων ἀχθῶσι, μέγιστον μὲν ἐστι τὸ διὰ τοῦ πόλου τοῦ κύκλου, ἐλάχιστον δὲ τὸ λοιπὸν, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ διὰ τοῦ πόλου τοῦ ἀπώτερον μεῖζόν ἐστι. δύο δὲ μόνα ἴσα ἀχθήσονται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τοῦ τε μεγίστου καὶ ἐλαχίστου.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 23.



Ληφθήτω τὸ α, τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ ἀχθήτωσαν ἀπ' αὐτοῦ τόξα μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ βγδεζ, κύκλου, οὗ πόλος τὸ η, σημεῖον, τὰ αβ, αγ, αδ, αε. Λέγω τὸ αε, τὸ διὰ τοῦ η, πόλου διερχόμενον μέγιστον εἶναι, τὸ δὲ αβ, ἐλάχιστον, καὶ τὸ αδ, τοῦ αγ, μεῖζον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, αγ, αδ, αε, ὑποτείνουσαι. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ μὲν αε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ

δὲ