# ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

## ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ

## ΚΑΤΑ ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ ΤΟΝ ΤΡΙΠΟΛΙΤΗΝ.

# ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

### Οἱ Ὅροι.

Α΄: Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ παράλληλοί εἰσιν, ὧν τὰ ἐπίπεδα ἀσύμπτωτα.

Β΄: Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλων ἐφάπτεσθαι λέγονται, ὅτε ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων ἐφάπτεται ἑκατέρου τῶν κύκλων κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ καὶ οἱ κύκλοι ἐφάπτονται.

Γ΄: Κύκλος πρὸς κύκλον ἐγκλίνειν λέγεται, ὅταν ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων εὐθειῶν πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἑκατέρου τῶν κύκλων ὀξεῖα ᾖ, ἥτις καὶ κλίσις τῶν αὐτῶν κύκλων πρὸς ἀλλήλους λέγεται.

Δ΄: Κύκλος πρὸς κύκλον ὁμοίως κεκλῖσθαι λέγεται, καὶ ἕτερος πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Ε΄: Κλίσεως δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους μέτρον ἐςὶ τόξον μεγίςου κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν κύκλων διερχομένου, τὸ μεταξὺ τῶν κύκλων ἐναπολαμβανόμενον.

### Πρότασις Α΄: Θεώρημα.

**Οἱ παράλληλοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους, καὶ οἱ τοὺς αὐτοὺς ἐν σφαίρᾳ πόλους ἔχοντες κύκλοι, παράλληλοί εἰσιν.**

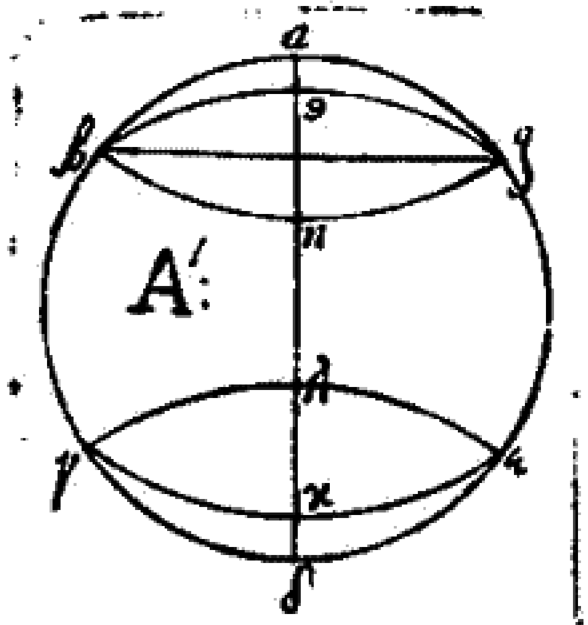
*Ἔςωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ α β γ δ ε ζ, κύκλοι παράλληλοι οἱ β η ζ θ, γ κ ε λ. Λέγω, ὅτι οἱ β η ζ θ, γ κ ε λ, τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους. Ἔςωσαν γὰρ πόλοι τοῦ β η ζ θ, οἱ α, δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α δ. καὶ ἐπεὶ ἡ α δ, διὰ τῶν πόλων τοῦ β η ζ θ, διέρχεται κύκλου, πάντως γε κατὰ τὴν θ΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος κάθετός ἐςι πρὸς τὸ τοῦ β η ζ θ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διέρχεται. ὥςε κατὰ τὸ πόρισμα τῆς γ΄: τοῦ αὐτοῦ ἡ α δ, καὶ διὰ τοῦ τῆς σφαίρας κέντρου διέρχεται. Αὖθις*

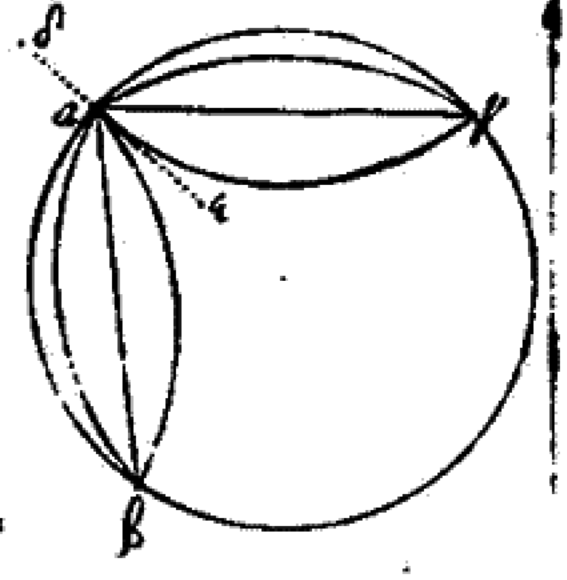
ἐπεὶ

ἐπεὶ οἱ β η ζ θ, γ κ ε λ, κύκλοι παράλληλοί εἰσι, πάντως γε ἡ α δ, ὀρθὴ οὖσα πρὸς τὸ τοῦ β η ζ θ, κύκλου ἐπίπεδον, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὸ τοῦ γ κ ε λ, κατὰ τὴν ιδ': τοῦ ια: τῶν στοιχ: ἀλλ' ἡ α δ, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν η: τοῦ α: τοῦ παρόντος διὰ τῶν πόλων τοῦ γ κ ε λ, διέρχεται. ὥστε τὰ α, καὶ δ, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ γ κ ε λ. ἀλλὰ τὰ α, καὶ δ, σημεῖα πόλοι εἰσὶ καὶ τοῦ β η ζ θ, κύκλου κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, οἱ ἄρα β η ζ θ, γ κ ε λ, παράλληλοι κύκλοι τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους.

Ἀλλὰ δὴ ἐχέτωσαν οἱ β η ζ θ, γ κ ε λ, κύκλοι τοὺς αὐτοὺς πόλους α, καὶ δ, λέγω ὅτι παράλληλοί εἰσιν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ α δ, καὶ ἐπεὶ ἡ α δ, διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν β η ζ θ, γ κ ε λ, διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν θ': τοῦ α: τοῦ παρόντος ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν β η ζ θ, γ κ ε λ, κύκλων, καὶ κατὰ τὴν ιδ': τοῦ ια: τῶν στοιχ: οἱ β η ζ θ, γ κ ε λ, κύκλοι παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 1.




## Πρότασις Β': Θεώρημα.

**Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι τῷ αὐτῷ συμπέσωσι σημείῳ, μεγίστου τινὸς κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου αὐτῶν διερχομένου, οἱ κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων.**

Ἔστω κύκλος μέγιστος ὁ α β γ, καὶ συμπιπτέτωσαν οἱ α β, α γ, κύκλοι τῷ α, σημείῳ, τοῦ α β γ, κύκλου, διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου αὐτῶν διερχομένου. Λέγω ὅτι οἱ α β, α γ, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ α, σημεῖον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α β, α γ, εὐθεῖαι, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν α β, α γ, κύκλων ἡ δ α ε, εὐθεῖα. καὶ ἐπεὶ ὁ α β γ, κύκλος διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν α β, α γ, διέρχεται κύκλων, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α: τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει, καὶ αἱ α β, α γ, εὐθεῖαι διάμετροί εἰσι τῶν α β, α γ, κύκλων. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν οἱ α β, α γ, κύκλοι ὀρθοί εἰσι πρὸς τὸν α β γ, μέγιστον κύκλον. ἔστι δὲ κοινὴ τομὴ τῶν α β, α γ, κύκλων κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἡ δ α ε, εὐθεῖα, ἄρα κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ια: τῶν στοιχ: ἡ δ α ε, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ α β γ, κύκλου ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἅπτονται δὲ τῆς δ α ε, αἱ α β, α γ, εὐθεῖαι, καὶ τίνων ἑκατέρα ἐν τῷ τοῦ α β γ, ἐπιπέδῳ ἐστὶ διὰ τὸ κοινὰς τομὰς εἶναι αὐτοῦ τε καὶ τῶν ἐπιπέδων

τῶν

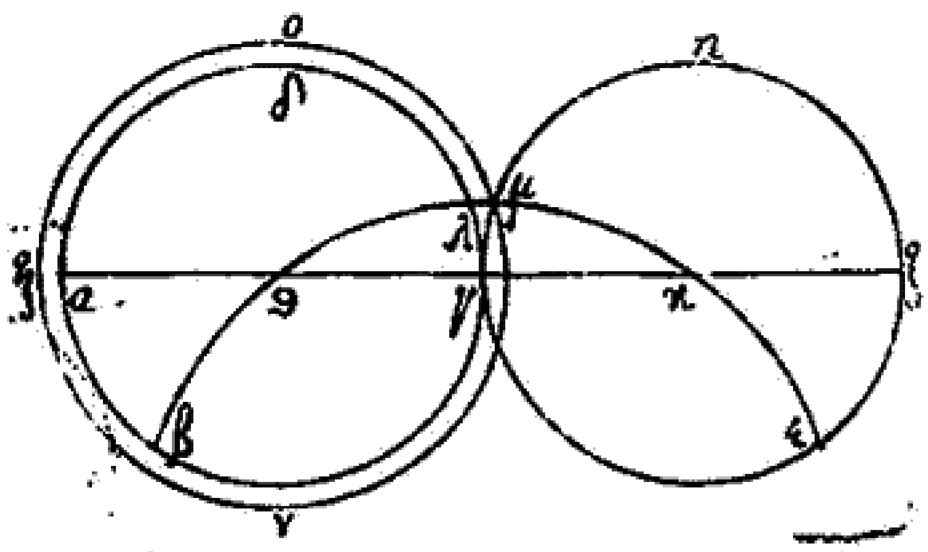
τῶν αβ, αγ, κύκλων, ἄρα ἡ δαε, ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν αβ, αγ, εὐθειῶν, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛʹ: τοῦ γʹ: τοῦ στοιχειωτοῦ ἅπτεται ἑκατέρου τῶν αβ, αγ, κύκλων ἡ δαε. ὥστε κατὰ τὸν βʹ: ὅρον τοῦ παρόντος, οἱ αβ, αγ, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις Γʹ: Θεώρημα.

**Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῶν διέρχεται.**

Ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐν σφαίρᾳ κύκλοι οἱ αβγδ, γεζη, κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω τοῦ μὲν αβγδ, πόλος τὸ θ, σημεῖον, τοῦ δὲ γεζη, τὸ κ. Λέγω, ὅτι ὁ διὰ τῶν θ, καὶ κ, πόλων διερχόμενος μέγιστος κύκλος, διέρχεται καὶ διὰ τῆς γ, αὐτῶν ἁφῆς, ὡς ὁ αθγκζ.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 2.



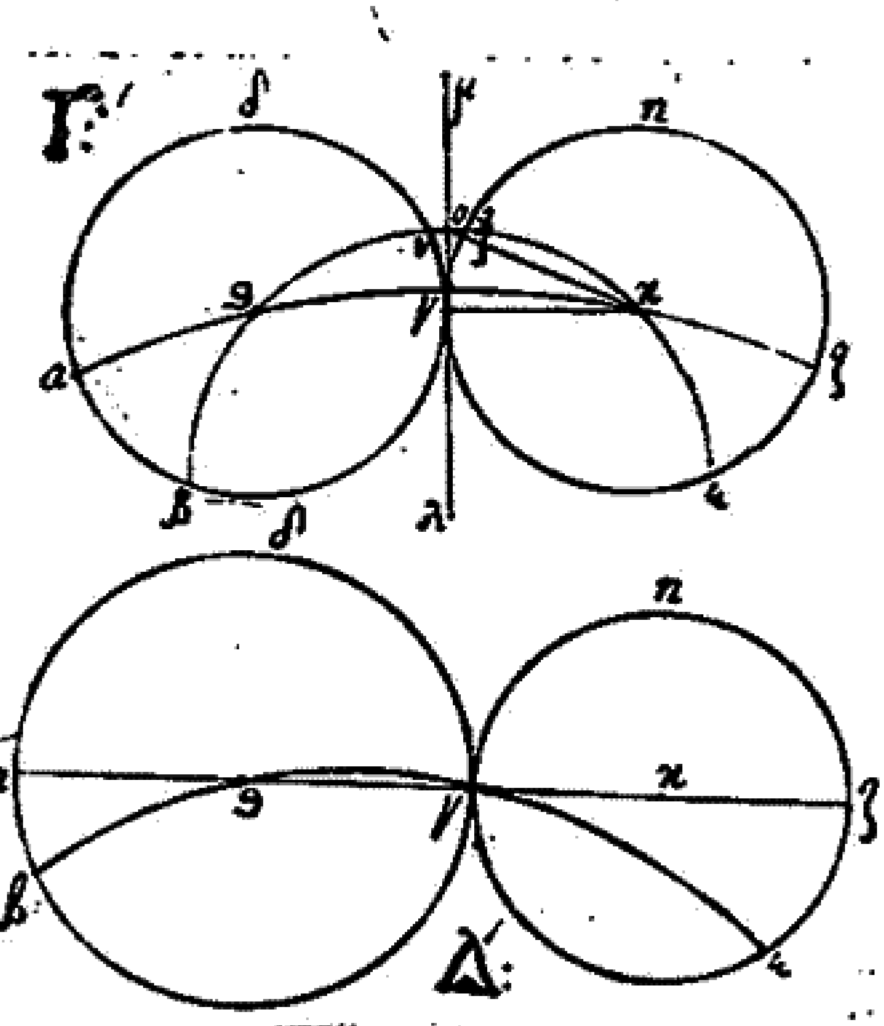
εἰ γὰρ μή, διελθέτω εἰ δυνατόν, ἐκτὸς τοῦ γ, ὡς ὁ βθκε, τέμνων τὸν μὲν αβγδ, κατὰ τὸ λ, τὸν δὲ γεζη, κατὰ τὸ μ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θμ, γραφήτω κύκλος ὁ μνξο. καὶ ἐπεὶ ὁ αβγδ, ἅπτεται τοῦ γεζη, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὁ μνξο, πάντως γε τέμνει αὐτόν, ὡς μείζονι γραφόμενος διαστήματι. ἀλλ᾽ ἐπεὶ πάλιν οἱ μνξο, γεζη, κύκλοι συνέπεσον τῷ μ, σημείῳ, τοῦ βθκε, μεγίστου κύκλου διὰ τῶν πόλων αὐτῶν θ, καὶ κ, διερχομένου κατὰ τὴν ἐναντίαν ὑπόθεσιν, ἄρα κατὰ τὴν αὐωτέρω οἱ μνξο, γεζη, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων, ἀλλὰ καὶ τέμνονται, ὡς δέδεικται, ἄρα ἄτοπον, ὥστε καὶ τὸ ἐξ οὗ ἕπεται. ἄρα ὁ διὰ τῶν πόλων διερχόμενος μέγιστος κύκλος ἁπτομένων δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλων καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῶν διέρχεται, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως. Ἁπτέσθωσαν οἱ αβγδ, γεζη, κύκλοι ἀλλήλων κατὰ τὸ γ. Λέγω, ὅτι ὁ διὰ τῶν θ, καὶ κ, πόλων αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῆς γ, ἁφῆς, ὡς ὁ αγζ. εἰ γὰρ μή, διελθέτω ἐκτὸς τῆς ἁφῆς, ὡς ὁ βθκε, τέμνων τὸν μὲν αβγδ, κατὰ τὸ ν, τὸν δὲ γεζη, κατὰ τὸ ξ. καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν αβγδ, καὶ γεζη, ἡ λγμ, εὐθεῖα, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ κ, κέντρου τοῦ γεζη, κύκλου ἡ κο, συμβάλλουσα τῇ λγμ, κοινῇ τομῇ κατὰ τὸ ο, (δύναται γὰρ τὸ κ, σημεῖον καὶ ἀντὶ πόλου, καὶ ἀντὶ κέντρου τοῦ αὐτοῦ γεζη, κύκλου ληφθῆναι, συμπίπτουσι γὰρ οἱ πόλοι τῷ κέντρῳ ἐπὶ τῆς ἐν ἐπιπέδῳ ὅλο-

κλή-

κλήρου καταγραφῆς τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων.) ἐπιζεύχθω δ' ἔτι καὶ ἡ κγ, καὶ ἐπεὶ ὁ βθκε, μέγιστός ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν αβγδ, γεζη, κύκλων διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α': τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν, ἑκάτερος τῶν αβγδ, γεζη, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βθκε, μεγίστου κύκλου ἐπίπεδον, καὶ κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ια': τοῦ στοιχειωτοῦ ἡ λγμ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βθκε, ἐπίπεδον, ὡς κοινὴ τομὴ τῶν αβγδ, γεζη, κύκλων, καὶ ἔτι πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας ἡ αὐτὴ λγμ, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ κο, καὶ ἔστιν ἐν τῷ τοῦ βθκε, ἐπιπέδῳ, ὡς ἐπιζευγνύουσα τὰ κ, καὶ ο, σημεῖα τοῦ αὐτοῦ βθκε, κύκλου, καὶ οὖσα κοινὴ τομὴ τοῦ τε βθκε, καὶ γεζη, κύκλου. ἄρα ἡ λγμ, κατὰ τὸν ῥηθέντα γ': ὅρον ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς κο, ἡ ἄρα ὑπὸ κογ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἀλλ' ἡ λγμ, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὴν γκ, κατὰ τὸ πόρ: τῆς ιϛ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τοῦ γκο, τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ διὰ τῶν θ, καὶ κ, διερχόμενος μέγιστος κύκλος ἐκτὸς τῆς γ, διέρχεται ἁφῆς. Ἐὰν ἄρα δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῶν διέρχεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 3




## Πρότ: Δ': Θεώρ:

**Ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἁπτόμενοι ἀλλήλων, καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑνὸς καὶ κοινῆς αὐτῶν ἁφῆς μέγιστος διέλθῃ κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑτέρου.**

Ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐν σφαίρᾳ οἱ αβγδ, γεζη, κύκλοι. Λέγω, ὅτι ἐὰν μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑνὸς, δὸς εἰπεῖν τοῦ αβγδ, καὶ τῆς γ, κοι-

νῆς

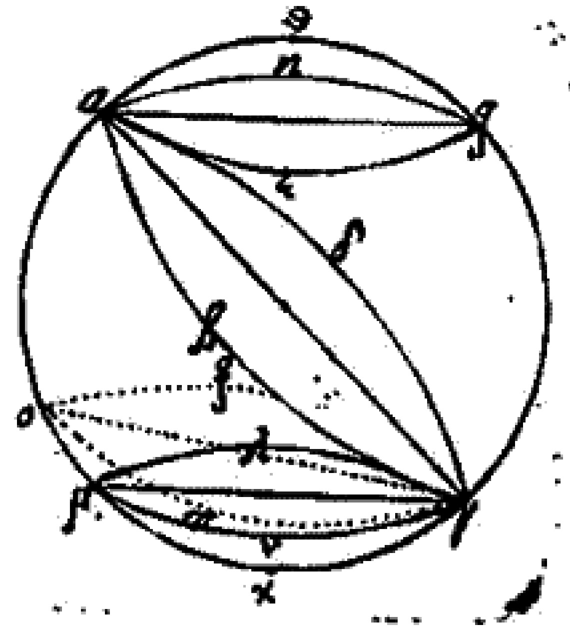
νῆς ἁφῆς διέλθῃ, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ γ ε ζ η. εἰ γὰρ μόνον διὰ τοῦ θ, πόλου τοῦ α β γ δ, καὶ τῆς γ, ἁφῆς διέλθῃ, ὡς ὁ β θ γ ε, γραφήτω ἕτερος κύκλος μέγιστος διὰ τῶν θ, καὶ κ, πόλων τῶν α β γ δ, γ ε ζ η, κύκλων κατὰ τὴν ι ς': τοῦ α: τοῦ παρόντος, ὡς ὁ α θ κ ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ αὐτὸς α θ κ ζ, μέγιστός ἐστι, καὶ διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν α β γ δ, γ ε ζ η, διέρχεται κύκλων, πάντως γε κατὰ τὴν α. γωνίαν καὶ διὰ τῆς γ, ἁφῆς αὐτῶν διέρχεται, ἀλλὰ καὶ ὁ β θ γ ε, μέγιστος ὢν διὰ τῶν θ, καὶ γ, διέρχεται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα οἱ α θ γ κ ζ, καὶ β θ γ ε, μέγιστοι κύκλοι τέμνονται ἀλλήλοις κατὰ τὰ θ, καὶ γ, σημεῖα. ὥστε καὶ δίχα κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τοῦ παρόντος, τὸ θ γ, ἄρα ἡμικύκλιόν ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον, τὸ γὰρ θ γ, διάστημα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, παντὸς γὰρ κύκλου οἱ πόλοι ἡμικυκλίῳ ἀφίστανται, τὸ δὲ ἀφ' ἑκατέρου τῶν πόλων μέχρι τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἔλαττόν ἐστι τεταρτημορίου. ἐὰν ἄρα ὦσιν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἁπτόμενοι ἀλλήλων, καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑνὸς καὶ τῆς κοινῆς ἁφῆς μέγιστος διέλθῃ κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑτέρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις Ε': Θεώρημα.

**Ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἅπτηται ἐλάσσονος ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλου, δυνάται ὁ αὐτὸς καὶ ἑτέρου ἅπτεσθαι κύκλου ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ προτέρῳ.**

Ἁπτέσθω ὁ α β γ δ, μέγιστος κύκλος τοῦ α ε ζ η, ἐλάσσονος κατὰ τὸ α. Λέγω, ὅτι ὁ α β γ δ, μέγιστος δυνάται καὶ ἑτέρου ἅπτεσθαι κύκλου ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ α ε ζ η. Ἔστωσαν γὰρ πόλοι τοῦ α ε ζ η, κύκλου τὰ θ, καὶ κ, σημεῖα, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, πόλου διαστήματι τῷ κ γ, γραφήτω κύκλος ὁ γ λ μ ν, διὰ δὲ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν α β γ δ, α ε ζ η, διελθέτω ὁ θ α μ κ γ ζ, μέγιστος κύκλος. καὶ ἐπεὶ ὁ γ λ μ ν, ἀπὸ τοῦ κ, σημείου, ὡς ἀπὸ πόλου καταγέγραπται, δῆλον, ὅτι τὰ κ, καὶ θ, σημεῖα πόλοι αὐτοῦ εἰσιν, ἀλλὰ τὰ θ, καὶ κ, πόλοι εἰσὶ καὶ τοῦ α ε ζ η, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος οἱ α ε ζ η, γ λ μ ν, παράλληλοί εἰσιν. Διέρχεται δὲ ὁ α μ γ ζ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν, ἄρα κατὰ τὴν ι β': τοῦ α: τοῦ παρόντος, δίχα αὐτοὺς τέμνει, εἰσὶ δὲ κοιναὶ τομαὶ αἱ α ζ, γ μ, ἄρα ἡ μὲν α ζ, διάμετρός ἐστι τοῦ α ε ζ η, ἡ δὲ γ μ, τοῦ γ λ μ ν. Αὖθις ἐπεὶ οἱ α β γ δ, α μ γ ζ, μέγιστοι κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ εἰσι σφαίρᾳ, δῆλον, ὅτι δίχα ἀλλήλους τέμνονται κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τοῦ παρόντος. ἄρα τὸ α ζ γ, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἀλλὰ καὶ τὸ θ ζ γ κ, ἡμικύκλιόν ἐστιν, οἱ

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 4.



γὰρ πόλοι παντὸς κύκλου κατὰ διάμετρον ἀλλήλων ἀφίστανται, ἄρα τὰ αζγ, θζγκ, τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ θζγ, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ αθ, γκ. ὥστε καὶ τὰ τούτων διπλάσια αθζ, γκμ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. καὶ ὁπομοίως καὶ αἱ αζ, γμ, ὑποτείνουσαι ὁμοίως ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν κθ: τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ. ἀλλ' ἡ μὲν αζ, διάμετρός ἐστι τοῦ αεζη, ἡ δὲ γμ, τοῦ γλμν, ἄρα οἱ αεζη, γλμν, κύκλοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. ἐπεὶ δὲ πάλιν οἱ αβγδ, γλμν, κύκλοι τῷ γ, συμπίπτουσι σημείῳ τοῦ αμγζ, κύκλου μεγίστου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου διερχομένου, δῆλον, ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος ἅπτεται τοῦ γλμν, κύκλου κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος, ἀλλ' ὁ γλμν, ἰσός ἐστι καὶ παράλληλος τῷ αεζη, ἄρα ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ αεζη, ἅπτεται καὶ τοῦ γλμν, ἴσου τε καὶ παραλλήλου ὄντος τῷ αεζη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅτι δὲ ὁ αμγζ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τῶν τε αβγδ, καὶ γλμν, διέρχεται, δῆλον, κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν διέρχεται διὰ τῶν πόλων τοῦ αεζη, καὶ αβγδ. ἀλλ' οἱ πόλοι τοῦ αεζη, εἰσὶν ἔτι πόλοι καὶ τοῦ γλμν, ὡς δέδεικται, ἄρα ὁ αμγζ, διὰ τῶν πόλων τῶν τε αβγδ, καὶ γλμν, διέρχεται.

### Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Α': Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἅπτεται ἑκατέρωθεν δύο ἐλαττόνων κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων, τὰ τῆς ἁφῆς σημεῖα κατὰ διάμετρον ἀντίκεινται.

### Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Β': Ἔτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐλαττόνων δύο ἅπτεται κύκλων, οἱ ἐλάττονες κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

## Πρότασις ς': Θεώρημα.

**Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐλάσσονες ἴσοι τε καὶ παράλληλοι, ὁ τοῦ ἑνὸς ἁπτόμενος μέγιστος κύκλος καὶ τοῦ ἑτέρου ἅπτεται.**

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι ἐλάττονες οἱ αεζη, γλμν, ἴσοι τε καὶ παράλληλοι, καὶ ἁπτέσθω τοῦ αεζη, ὁ αβγδ, κατὰ τὸ α. Λέγω, ὅτι ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος ἅπτεται καὶ τοῦ γλμν, εἰ γὰρ μὴ, ἅψεται πάντως ἑτέρου τινὸς μείζονος, ἢ ἐλάττονος τοῦ γλμν. ἁπτέσθω δὲ τοῦ γξοπ, μείζονος, καὶ ἐπεὶ ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος ἅπτεται τῶν αεζη, γξοπ, ἐλαττόνων, πάντως γε κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ἀνωτέρω οἱ αεζη, γξοπ, ἴσοι εἰσιν, ὑπετέθη δὲ καὶ ὁ γλμν, ἴσος τῷ αεζη, ἄρα ὁ γξοπ, ἰσός ἐστι τῷ γλμν, ἀλλὰ καὶ μείζων κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄτοπον ἄρα, ὁ αβγδ, ἄρα οὐχ ἅπτεται μείζονος τοῦ γλμν. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται μὴ ἅπτεσθαι μηδ' ἐλάττονος, τὸ αὐτὸ γὰρ ἄτοπον ἕψεται, ὁ ἄρα αβγδ, μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ αεζη, ἅπτεται πάντως καὶ τοῦ γλμν, ἴσου τε καὶ παραλλήλου ἐκείνῳ ὄντος.

ΠΟ-

### ΠΟΡΙΣΜΑ.

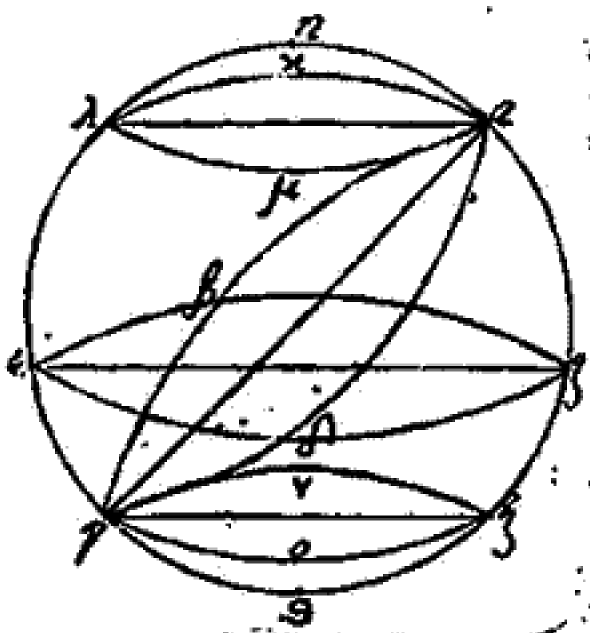
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οὐ δυνάνται ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πλείονες, ἢ δύο ἐλάσσονες κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοι εἶναι.

## Πρότασις Ζ΄. Θεώρημα.

**Ἐὰν κύκλος μέγιστος κύκλον τινὰ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πλαγίως τέμνῃ, δυνάται ὁ αὐτὸς δύο κύκλων ἅπτεσθαι ἴσων τε ἀλλήλοις καὶ παραλλήλων τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ.**

Κύκλος μέγιστος ὁ α β γ δ, τεμνέτω κύκλον τὸν ε β ζ δ, πλαγίως. Λέγω, ὅτι ὁ α β γ δ, κύκλος δυνάται δύο τινῶν ἅπτεσθαι κύκλων, ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῷ ε β ζ δ, κύκλῳ. Ἔστωσαν γὰρ πόλοι τοῦ ε β ζ δ, τὰ η, καὶ θ, σημεῖα, καὶ διὰ τῶν η, καὶ θ, σημείων γραφήτω κύκλος ὁ η ε θ ζ. ἀπὸ δὲ τῶν η, καὶ θ, σημείων ὡς ἀπὸ κέντρων, διαστήματι τῷ η α, ἢ θ γ, γραφήτωσαν οἱ α κ λ μ, γ ν ξ ο, κύκλοι. καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ δ, η ε θ ζ, μέγιστοί εἰσι, πάντως γε κατὰ τὴν ια: τοῦ α: τοῦ παρόντος, δίχα ἀλλήλους τέμνονται. ὥστε τὸ α ζ γ, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἀλλὰ καὶ τὸ η ζ θ, ἡμικύκλιόν ἐστι, διὰ τὸ τοὺς πόλους παντὸς κύκλου ἐν σφαίρᾳ ἡμικυκλίῳ ἀφίστασθαι ἀλλήλων, ἄρα τὰ α ζ γ, η ζ θ, τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ α ζ θ, ἐναπολείπονται τὰ η α, θ γ, τόξα ἴσα, ἄρα οἱ α κ λ μ, γ ν ξ ο, κύκλοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. ἔχουσι δὲ καὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους η, θ, οὓς καὶ ὁ ε β ζ δ, κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος, παράλληλοί εἰσι τῷ ε β ζ δ. ἀλλ' ἑκάτερος τῶν α κ λ μ, γ ν ξ ο, συμπίπτει μετὰ τοῦ α β γ δ, μεγίστου κύκλου τῷ αὐτῷ σημείῳ, τοῦ η ε θ ζ, μεγίστου ὄντος καὶ αὐτοῦ, καὶ διὰ τῶν πόλων τῶν α β γ δ, α κ λ μ, γ ν ξ ο, διερχομένου, ἄρα κατὰ τὴν β: τοῦ παρόντος, ὁ α β γ δ, ἑκατέρου τῶν α κ λ μ, γ ν ξ ο, κύκλων ἅπτεται. οἱ δὲ α κ λ μ, γ ν ξ ο, κύκλοι ἴσοι τε ἀλλήλοις εἰσὶ καὶ παράλληλοι τῷ ε β ζ δ, ὡς δέδεικται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 5.



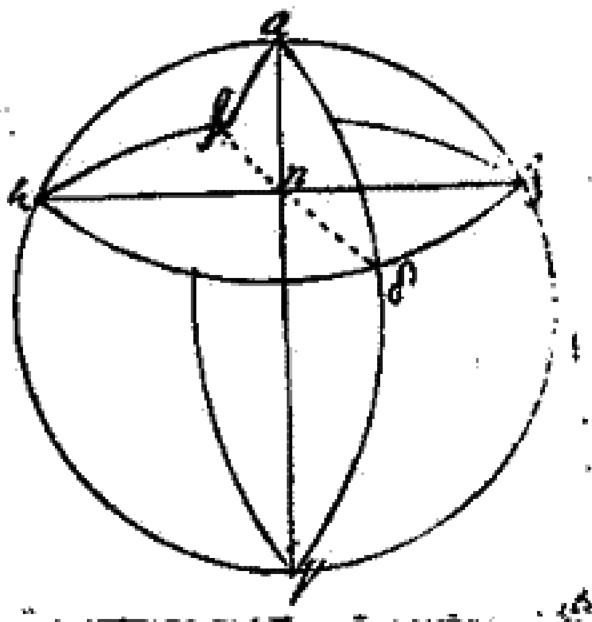

### ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ τῷ αὐτῷ κύκλῳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶ παράλληλοι, οἱ γὰρ α κ λ μ, γ ν ξ ο, παράλληλοι ὄντες τῷ ε β ζ δ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶ παράλληλοι, ὅτι γε τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους.

## Πρότασις Η΄. Θεώρημα.

**Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλων ἀλλήλους τεμνομένων διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου κύκλος μέγιστος διέλθῃ, δίχα τὰ τμήματα ἑκατέρου τῶν αὐτῶν κύκλων τέμνει.**

Τεμνέτωσαν ἀλλήλους ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ αβγδ, εβζδ, κύκλοι, κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα, καὶ διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου διερχέσθω ὁ αεγζ, μέγιστος κύκλος. Λέγω, ὅτι ὁ αεγζ, μέγιστος κύκλος δίχα τέμνει τὰ βαδ, βγδ, βεδ, βζδ, τμήματα ἑκατέρου τῶν αβγδ, εβζδ, κύκλων. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ κοιναὶ τομαὶ αγ, εζ, βδ. καὶ ἐπεὶ κύκλος ὁ αεγζ, διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν αβγδ, εβζδ, διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει, ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ἑκάτερος δηλαδὴ τῶν αβγδ, εβζδ, κύκλων ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αεγζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ κατὰ τὴν ιθ΄: τοῦ ια΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ ἡ βδ, κοινὴ αὐτῶν τομὴ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αεγζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ αεγζ, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας, κατὰ τὸν γ΄: ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ἅπτεται δὲ τῆς βδ, ἡ αγ, ὡς ὀψόμεθα, ἡ βδ, ἄρα ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς αγ, καὶ ἀνάπαλιν, αἱ




Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 6.

ἄρα βηα, δηα, γωνίαι ὀρθαί εἰσι, καὶ ἑπομένως ἴσαι, ἀλλ᾽ ἡ αγ, διάμετρός ἐστι τοῦ αβγδ, κύκλου διὰ τὸ δίχα τέμνεσθαι τοὺς αβγδ, αεγζ, μεγίστους κύκλους, κατὰ τὴν ι΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὴν βδ, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν γ΄: τοῦ γ΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ δίχα τέμνει ἡ αγ, τὴν βδ, ἴση ἄρα ἡ βη, τῇ ηδ, κοινὴ δὲ ἡ αη, δύο δὴ αἱ βη, ηα, δυσὶ ταῖς δη, ηα, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἔστι δὲ ἡ βηα, τῇ δηα, γωνίᾳ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ βάσις ἡ αβ, βάσει τῇ αδ, ἴση ἐστίν, καὶ ἑπομένως τὰ αβ, αδ, τόξα ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν κη΄: τοῦ γ΄: τοῦ στοιχειωτοῦ. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸ μὲν βγ, τόξον τῷ γδ, ἴσον, τὸ δὲ βε, τῷ εδ, καὶ τὸ βζ, τῷ ζδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅτι δὲ ἡ αγ, ἅπτεται τῆς βδ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἡ αγ, κοινή ἐστι τομὴ τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων, πάντως γε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τοῦ αεγζ, ἔστι δὲ ὁ αβγδ, κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸ τοῦ αεγζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ ἡ βδ, ἄρα οὖσα ἐν τῷ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αεγζ, ἐπίπεδον, ὥστε κατὰ τὸν δ΄: ὅρον τοῦ ια΄: τοῦ στοιχ: ἡ βδ, ἐπὶ τῆς αγ, πίπτει, ἅπτεται ἄρα ἡ αγ, τῆς βδ.

Ἀλ-

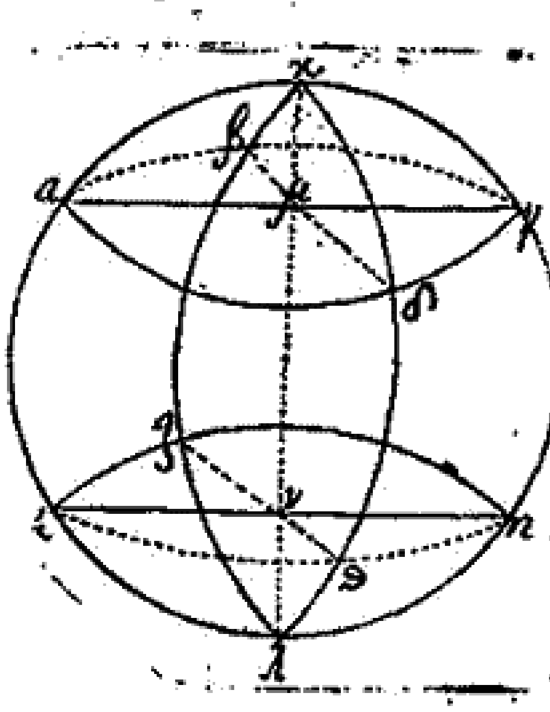
Ἄλλως. Ἐπεὶ ὁ εβζδ, κύκλος δίχα τέμνεται ὑφ' ἑκατέρου τῶν αβγδ, αεγζ, μεγίστων κύκλων κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, πάντως γε αἱ βδ, εζ, διάμετροι αὐτοῦ εἰσιν, ὥστε τὸ η, σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ εβζδ, κύκλου. ἀλλ' ὁ αβγδ, κύκλος κατὰ τὴν αὐτὴν ιβ': δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὸν εβζδ, κύκλον, ἄρα καὶ ἡ αγ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ εβζδ, κύκλου ἐπίπεδον, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ια': τοῦ στοιχ: ἔστι δὲ ἡ αγ, διάμετρος, διὰ τὸ κοινὴν εἶναι τομὴν τῶν αβγδ, αεγζ, μεγίστων κύκλων, ἄρα διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, καὶ κατὰ τὸ πόρ: τῆς ς': τοῦ α': τοῦ παρ: διέρχεται ἔτι καὶ διὰ τοῦ η, κέντρου τοῦ εβζδ. ἀλλὰ καὶ ἡ βδ, διὰ τοῦ η, διέρχεται, ἅπτονται ἄρα ἀλλήλων κατὰ τὸ η.

## Πρότασις Θ': Θεώρημα.

**Ἐὰν κύκλοι μέγιστοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων παραλλήλων κύκλων διέλθωσι, τὰ μὲν τῶν παραλλήλων τόξα τὰ ὑπὸ τῶν μεγίστων περιλαμβανόμενα κύκλων, ὅμοιά εἰσι, τὰ δὲ τῶν μεγίστων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἴσα εἰσί.**

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι οἱ αβγδ, εζηθ, πόλοι δὲ τῶν αὐτῶν τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα. διὰ δὲ τῶν κ, καὶ λ, σημείων διερχέσθωσαν οἱ κζλδ, κελγ, μέγιστοι κύκλοι. Λέγω, ὅτι τὰ μὲν αβ, εζ, καὶ αδ, εθ, τόξα τῶν αβγδ, εζηθ, παραλλήλων ὅμοιά εἰσι, τὰ δὲ αε, βζ, ἴσα. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βδ, εη, ζθ, καὶ ἐπεὶ οἱ κελγ, κζλδ, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων διέρχονται τῶν αβγδ, εζηθ, παραλλήλων κύκλων, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, οἱ αβγδ, εζηθ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ὑπ' αὐτῶν τέμνονται, διάμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ αγ, βδ, εη, ζθ, κοιναὶ τομαί, καὶ τὰ μ, ν, σημεῖα κέντρα τῶν κύκλων. Αὖθις ἐπεὶ οἱ αβγδ, εζηθ, κύκλοι παράλληλοί εἰσι, καὶ ὑπὸ τῶν κελγ, κζλδ, μεγίστων κύκλων τέμνονται, πάντως γε καὶ αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν ις': τοῦ ια': τοῦ στοιχειωτοῦ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν αμ, τῇ εν, ἡ δὲ βμ, τῇ ζν, καὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ αὐτοῦ, αἱ ὑπὸ αμβ, ενζ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ πρὸς τοῖς κέντροις, καὶ αἱ πρὸς τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ὁμοίων βεβήκασι περιφερειῶν, ὡς δεξόμεθα, ἄρα τὰ αβ, εζ, τόξα ὅμοιά εἰσι, τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται ὅμοια καὶ τὰ αδ, εθ, καὶ βγ, ζη, καὶ γδ, ηθ, ὅπερ ἔδει τὸ α'. Ὅτι δὲ καὶ τὰ αε, βζ, ἴσα εἰσί, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ πόλος ἐστὶ τῶν αβγδ, εζηθ, τὸ κ, σημεῖον, πάντως γε κατὰ τὸν ε': ὅρον τοῦ α': τοῦ παρόντος αἱ κα, κβ,

Theod. Sf. Lib.2. Fig.7.

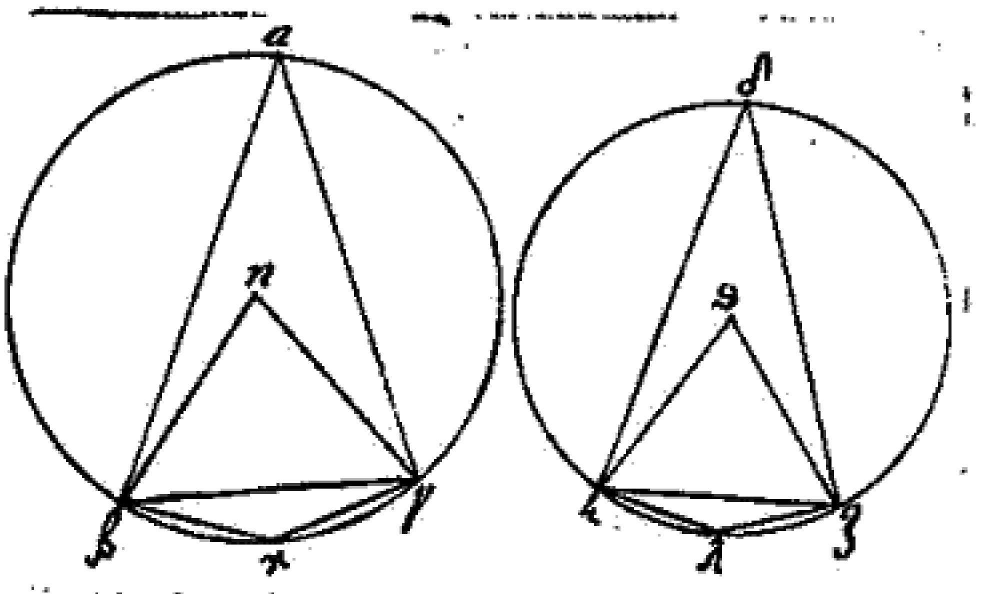



καὶ

καὶ κε, κζ διαστάσεις ἴσαι εἰσιν, ὥστε καὶ αἱ κα, κβ, καὶ κε, κζ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσι κατὰ τὴν κη': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν κα, κβ ἴσων ἀπὸ τῶν κε, κζ, ἴσων καὶ αὐτῶν ἴσων, ὡς δέδεικται, ἐγκαταλείπονται δηλαδὴ ἴσαι αἱ αε, βζ. ὅπερ ἔδει τὸ β':

Ὁμοίως δειχθήσεται ἴσα καὶ τὰ δθ, γη. Ὅτι δὲ αἱ πρὸς τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ὁμοίων βεβήκασι περιφερειῶν, δῆλον. Ἔστωσαν γὰρ κύκλοι ἄνισοι οἱ αβγ, δεζ, καὶ συνεστάθωσαν πρὸς τοῖς η, καὶ θ, κέντροις αὐτῶν ἴσαι γωνίαι αἱ ὑπὸ βηγ, εθζ. Λέγω, ὅτι αἱ βκγ, ελζ, περιφέρειαι, ἐφ' ὧν βεβήκασιν αἱ ῥηθεῖσαι γωνίαι ὅμοιαί εἰσιν.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 8.




Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ βγ, εζ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς α, καὶ δ, συσταθεῖσαι αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ, γωνίαι, πρὸς δὲ τοῖς κ, καὶ λ, αἱ ὑπὸ βκγ, ελζ, καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βηγ, εθζ, γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ἔστι δὲ ἡ μὲν ὑπὸ βηγ, διπλασία τῆς ὑπὸ βαγ, ἡ δὲ ὑπὸ εθζ, τῆς ὑπὸ εδζ, κατὰ τὴν κ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, πάντως γε αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ, ἴσαι εἰσιν. Αὖθις ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν αβκγ, δελζ, τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι αἱ ὑπὸ βαγ, βκγ, καὶ εδζ, ελζ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσι κατὰ τὴν κβ': τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε αἱ ὑπὸ βαγ, βκγ, ἴσαι εἰσι ταῖς ὑπὸ εδζ, ελζ, ἔστι δὲ ἡ μὲν ὑπὸ βαγ, ἴση τῇ ὑπὸ εδζ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ βκγ, ελζ, ἴσαι εἰσι, καὶ κατὰ τὸν ι': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, τὰ βκγ, ελζ, τμήματα ὅμοιά εἰσιν, αἱ ἄρα βκγ, ελζ, περιφέρειαι ὅμοιαί εἰσιν, ὅπερ ἔδει τὸ ὑποτεθέν.

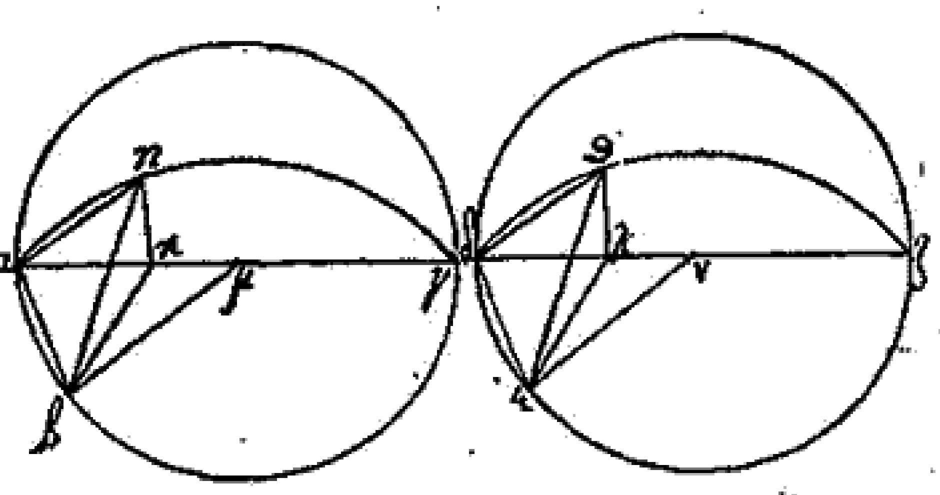
## Πρότασις Ι': Θεώρημα.

**Ἐὰν ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἴσων κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων ἐπισταθῶσιν, ὥστε ὀρθὰ εἶναι πρὸς τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεθῇ τόξα ἴσα ἀλλήλοις ὑπερέχοντα, ἢ ἐλλείποντα τοῦ ἡμίσεος τῶν τμημάτων, ἀπὸ δὲ τῶν τομῶν εὐθεῖαι ἴσαι ἐπὶ τὰς τῶν κύκλων περιφερείας ἀχθῶσι, τὰ ἐναπολαμβανόμενα τῶν κύκλων τόξα μεταξὺ τῶν διαμέτρων, καὶ τῶν ἀγομένων εὐθειῶν ἴσα ἔσονται.**

Ἔστωσαν κύκλοι ἴσοι οἱ αβγ, δεζ, καὶ συσταθήτωσαν ἐπὶ τῶν αγ, δζ, διαμέτρων τῶν αὐτῶν κύκλων, τμήματα κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τὰ αηγ, δθζ.

ἔστωσαν δὲ ἔτι καὶ ὀρθὰ πρὸς τὰ τῶν αβγ, δεζ, κύκλων ἐπίπεδα, καὶ ἀφαιρεθήτωσαν ἀπὸ τῶν αηγ, δθζ, τμημάτων ἴσα τόξα τὰ αη, δθ, ἐλλείποντα τοῦ ἡμίσεως τῶν αηγ, δθζ, τόξων, ἀπὸ δὲ τῶν τομῶν η, καὶ θ, ἀχθήτωσαν ἐπὶ τὰς τῶν αβγ, δεζ, κύκλων περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ηβ, θε. Λέγω, ὅτι τὰ αβ, δε, ἐναπολαμβανόμενα τόξα μεταξὺ τῶν αγ, δζ, διαμέτρων, καὶ ηβ, θε, ἀγομένων εὐθειῶν ἴσα ἐστί. Πιπτέτωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν η, καὶ θ, κάθετοι πρὸς τὰ τῶν αβγ, δεζ, κύκλων ἐπίπεδα αἱ ηκ, θλ, αἵγε κατὰ τὸν δ΄: ὅρον τοῦ ια: τοῦ στοιχειωτοῦ ἐπὶ τῶν αγ, δζ, πεσοῦνται. ἐπεὶ δὲ αἱ ἀπὸ τῶν τομῶν η, καὶ θ, κάθετοι ἢ ἐντὸς πίπτουσι τῆς περιφερείας, ἢ ἐκτός, ἢ γοῦν ἐπ᾿ αὐτῆς, πιπτέτωσαν α΄: ἐντός, καὶ συμβαλλέτωσαν ταῖς αγ, δζ, διαμέτροις κατὰ τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, ηβ, βκ, βα, βμ, καὶ δθ, θε, δε, ελ, εν. καὶ ἐπεὶ τὰ αηγ, δθζ, ἴσα εἰσί, καὶ τούτων ἀφῄρηται ἴσα τὰ αη, δθ, πάντως γε καὶ τὰ ἐναπολειπόμενα ηγ, θζ, ἴσα εἰσίν, ὥστε αἱ ὑπὸ ηαγ, θδζ, γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασι, καὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν κζ΄: τοῦ γ΄: στοιχειωτοῦ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ακη, δλθ, ἴσαι, ὀρθαὶ γὰρ ἑκατέρα, τὰ ἄρα ακη, δλθ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ηακ, ακη, δυσὶ ταῖς ὑπὸ θδλ, δλθ, ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχουσι δ᾿ ἔτι καὶ μίαν πλευρὰν τὴν αη, μιᾷ πλευρᾷ τῇ δθ, ἴσην κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ γ΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, τὴν ὑποτείνουσαν δηλ: ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν. ἄρα κατὰ τὴν κς΄: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔχουσιν, ἴση ἄρα ἡ μὲν ακ, τῇ δλ, ἡ δὲ ηκ, τῇ θλ. ἀλλ᾿ ἐπεὶ τὰ ηκβ, θλε, τρίγωνα ὀρθὰς ἔχουσι τὰς ὑπὸ ηκβ, θλε, γωνίας κατὰ τὸν γ΄: ὅρον τοῦ ια: τοῦ στοιχειωτοῦ, πάντως γε κατὰ τὴν μζ΄: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ηβ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ηκ, κβ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θε, τοῖς ἀπὸ τῶν θλ, λε. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ηβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς θε, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς ηβ, θε, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ηκ, κβ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θλ, λε. ὥστε ἀφαιρουμένων τῶν ἀπὸ τῶν ηκ, θλ, ἴσων ἐναπολείπονται τὰ ἀπὸ τῶν κβ, λε, ἴσα, καὶ ἑπομένως αἱ κβ, λε, ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ αμ, δν, ἡμιδιάμετροι τῶν ἴσων κύκλων, ἴσαι εἰσίν, ἀφαιρουμένων τῶν ακ, δλ, ἴσων, ἐναπολείπονται πάντως καὶ αἱ κμ, λν, ἴσαι, εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ βμ, εν, ἡμιδιάμετροι, ἄρα τὰ βκμ, ελν, ἰσόπλευρά ἐστιν, ὥστε καὶ ἰσογώνια, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αμβ, γωνία τῇ ὑπὸ δνε, καὶ ἔστιν ἑκατέρα

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 9.

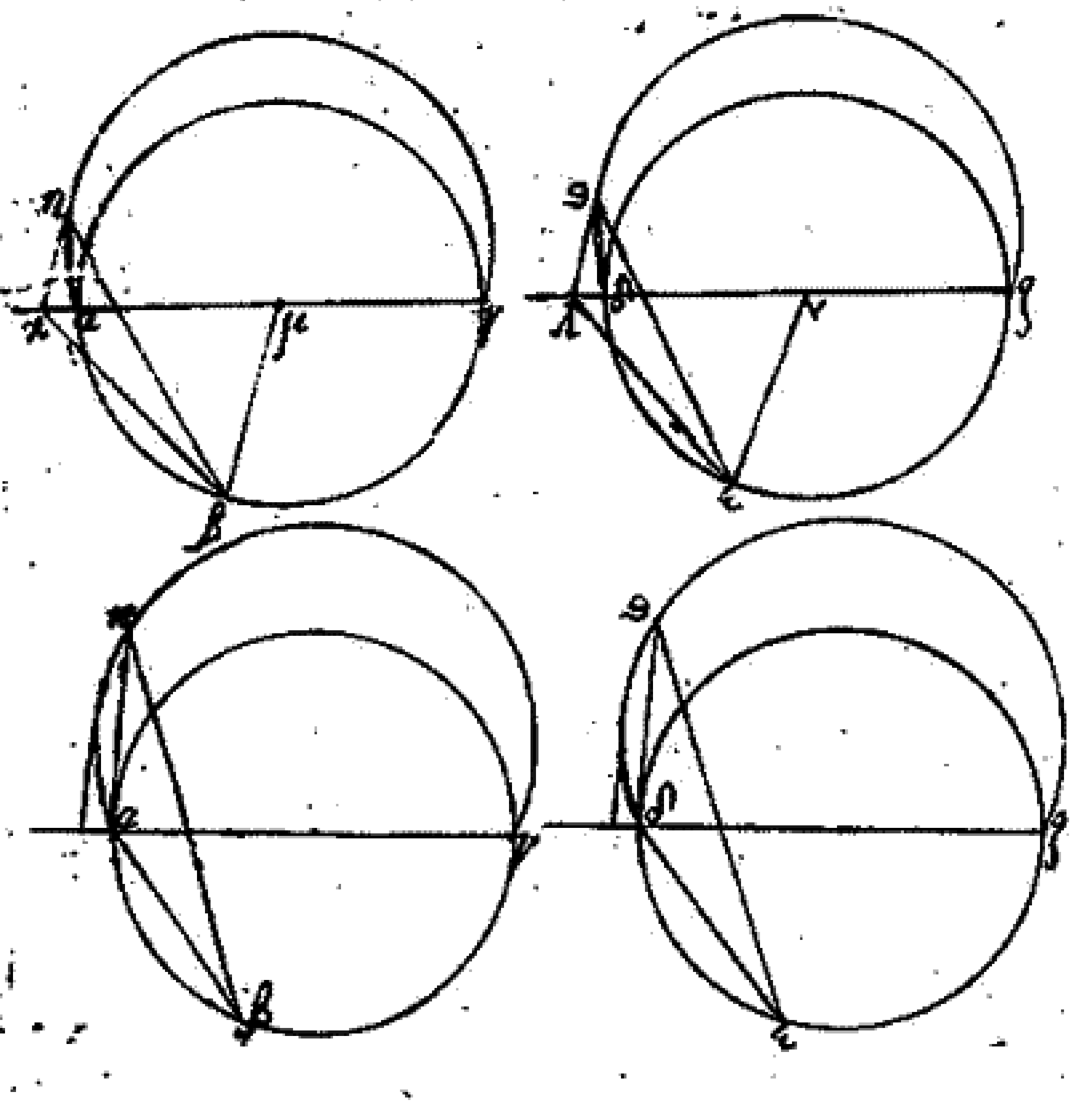



πρὸς

πρὸς τῷ κέντρῳ, ἄρα κατὰ τὴν κϛ΄: τοῦ γ΄: τοῦ στοιχειωτοῦ αἱ αβ, δε, περιφέρειαι ἴσαι εἰσί.

Πιπτέτωσαν β΄: αἱ ηκ, λθ, κάθετοι ἐκτὸς τῆς περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηα, κβ, βμ, καὶ θδ, λε, εν, καὶ ἐπεὶ τὰ αηγ, δθζ, τμήματα ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι, καὶ ἀφῃρέθησαν τὰ αη, δθ, τόξα ἴσα, πάντως γε καὶ τὰ ἐναπολειπόμενα ηγ, θζ, ἴσα ἐστιν. αἱ ἄρα ὑπὸ γαη, ζδθ, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν κζ΄: τοῦ γ΄: τοῦ στοιχειωτοῦ. ὥστε καὶ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ ηακ, θδλ, ὡς παραπληρώματα τῶν ὑπὸ γαη, ζδθ, ἴσαι ὁμοίως εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ηκα, θλδ, ὀρθή, ἄρα τῶν ακη, δθλ, τριγώνων αἱ δύο γωνίαι ταῖς δυσὶν ἴσαι εἰσιν, ἀλλὰ καὶ αἱ ηα, θδ, πλευραὶ εἰσὶν ἴσαι κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ αὐτοῦ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς ηα, θδ, περιφερείας, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ηκ, τῇ θλ, ἡ δὲ κα, τῇ λδ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ αμ, δν, ἡμιδιάμετροι ἴσαι, προστιθεμένων ἄρα τῶν κα, λδ, ἴσων ταῖς αμ, δν, ἴσαις, ἴσαι ἔσονται αἱ κμ, λν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ ηκ, θλ, ὀρθαί εἰσι πρὸς τὰς κβ, λε, κατὰ τὸν γ΄: ὅρον τοῦ ια΄: τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ηβ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ηκ, κβ, τετραγώνοις, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θε, τοῖς ἀπὸ τῶν θλ, λε. ἀλλ᾽ αἱ ηβ, θε, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ηκ, κβ, ἴσα εἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θλ, λε. ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ηκ, θλ, ἴσων, ἴση γὰρ ἡ ηκ, τῇ θλ, ὡς δέδεικται, ἐναπολείπονται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν κβ, λε, ἴσα, ὥστε καὶ αἱ κβ, λε, ἴσαι εἰσιν. εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ κμ, λν, ὡς δέδεικται, ἔτι δὲ καὶ αἱ μβ, νε, ἡμιδιάμετροι, ἄρα τῶν κμβ, λνε, τριγώνων αἱ ὑπὸ κμβ, λνε, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν η΄: τοῦ α΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, ὥστε καὶ αἱ αβ, δε, περιφέρειαι, ἐφ᾽ ὧν βεβήκασιν, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κϛ΄: τοῦ γ΄: τοῦ αὐτοῦ.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 10.



Πιπτέτωσαν τελευταῖον αἱ ηα, θδ, κάθετοι ἐπὶ τῆς περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, δε, καὶ ἐπεὶ αἱ ηα, θδ, ὀρθαί εἰσιν ἐπὶ τῶν αβ, δε, κατὰ τὸν γ΄: ὅρον τοῦ ια΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, πάντως γε τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ηβ, τετράγωνον ἴσον

ἐστὶ

ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν η α, α β, τετραγώνοις, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θ ε, τοῖς ἀπὸ τῶν θ δ, δ ε, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν η β, θ ε, ἴσα ἐστι, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς η β, θ ε, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν η α, α β, ἴσα ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν θ δ, δ ε, συναμφότερα συναμφοτέροις, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν η α, θ δ, ἴσα ἐστιν, ἴσαι γὰρ αἱ η α, θ δ, κατὰ τὴν κ θ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ. ἄρα ἀφαιρεμένων τῶν ἀπὸ τῶν η α, θ δ, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν α β, δ ε. ὥστε καὶ αἱ α β, δ ε, ἴσαι εἰσι, καὶ κατὰ κη': τοῦ αὐτοῦ αἱ α β, δ ε, περιφέρειαι ἴσαι εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

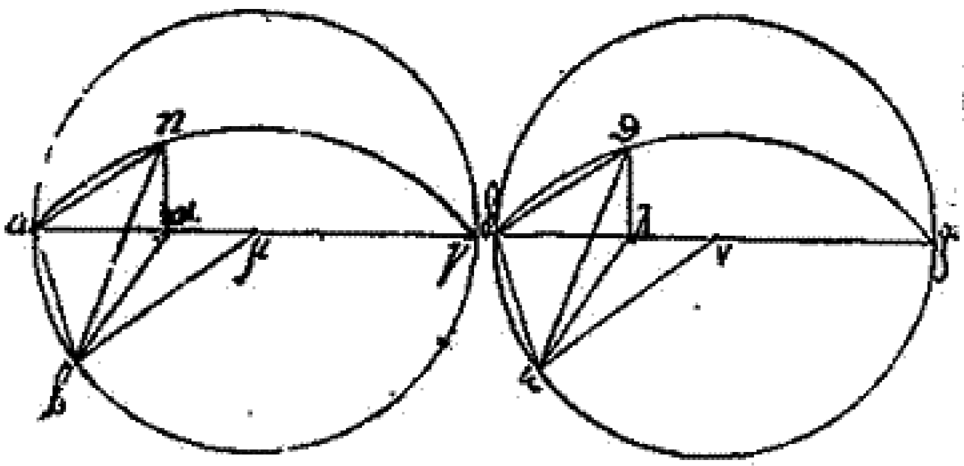
Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται ἴσα εἶναι τὰ α β, δ ε, τόξα, κἂν τὰ ἀφαιρεθέντα α η, δ θ, ὑπερέχωσι τοῦ ἡμίσεως τῶν α η γ, δ θ ζ, τόξων.

## Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

**Ἐὰν ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἴσων κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων ἐπισταθῶσιν, ὥστε ὀρθὰ εἶναι πρὸς τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα, ἀπὸ δὲ τῶν τμημάτων τε καὶ κύκλων ἴσα τόξα ἀφαιρεθῇ, αἱ τὰς τομὰς τῶν τόξων ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.**

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ α β γ, δ ε ζ, καὶ συνεστάθήτωσαν ἐπὶ τῶν α γ, δ ζ, διαμέτρων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ α η γ, δ θ ζ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν α η γ, δ θ ζ, τμημάτων ἀφαιρεθήτωσαν ἴσα τόξα τὰ α η, δ θ, ἀπὸ δὲ τῶν κύκλων α β γ, δ ε ζ, τὰ α β, δ ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ η β, θ ε. Λέγω τὰς η β, θ ε, ἴσας εἶναι, τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὰ α β, δ ε, τόξα ἐπὶ τῶν σχημάτων δῆλον:

Theod. Sf. Lib.2. Fig. 11.



τῆς α': δείξεως τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, ἴσα ἐστι, πάντως γε αἱ α β, δ ε, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσι κατὰ τὴν κ θ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ α κ, δ λ, ἴσαι, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω, ἄρα τῶν β α κ, ε δ λ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ β α, α κ, ε δ, δ λ, ἴσαι εἰσιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, εἰσὶ δὲ καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ β α κ, ε δ λ, ἴσαι, ὡς ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν β γ, ε ζ, βεβηκυῖαι, κατὰ τὴν κζ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ βάσεις αἱ ὑπὸ β κ, ε λ, ἴσαι εἰσιν. εἰσὶ δ' ἔτι ἴσαι καὶ αἱ η κ, θ λ, κάθετοι, ὥσπερ καὶ αἱ ὑπὸ β κ η, ε λ θ, γωνίαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ὡς ἐν τῇ ἀνωτέρω δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ αἱ β η, ε θ, ἴσαι εἰσιν. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποτεθέν.

Ἐπὶ δὲ τῶν σχημάτων τῆς β': δείξεως, ἐπεὶ αἱ κ μ, μ β, ἴσαι εἰσι ταῖς λν, κε, ὡς δέδεικται ἐν τῷ ἀνωτέρω, εἰσὶ δ' ἔτι καὶ αἱ ὑπὸ κμβ, λνε, γωνίαι ἴσαι, διὰ τὸ ἴσας ὑποτίθεσθαι τὰς αβ, δε, περιφερείας, ἐφ' ὧν αὗται βεβήκασιν, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ': αἱ κβ, λε, ἴσαι εἰσι. δέδεικται δὲ καὶ ἡ μὲν ηκ, κάθετος τῇ θλ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ηκβ, γωνία τῇ ὑπὸ θλε, ἄρα κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ ἡ ηβ, τῇ θε, ἴση ἐστίν.

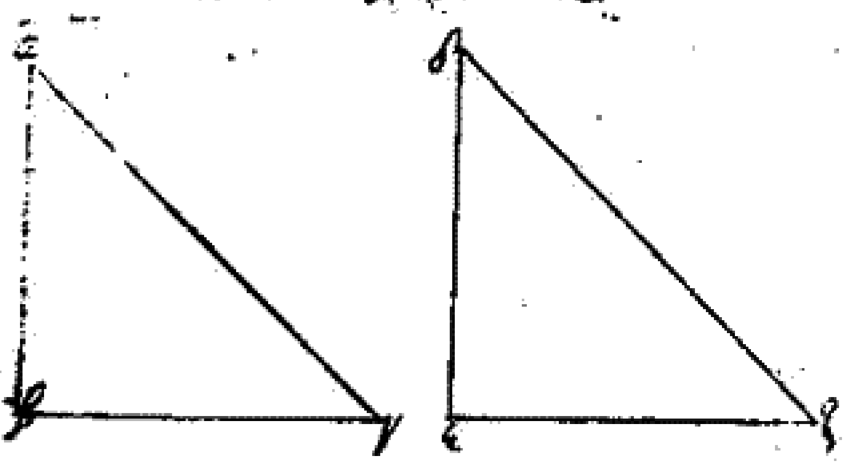
Ἐπὶ δὲ τῶν σχημάτων τῆς γ': δείξεως ὁμοίως, ἐπεὶ αἱ ηα, θδ, καὶ αβ, δε, ἴσαι εἰσι, δέδεικται δὲ ἐν τῷ ἀνωτέρω καὶ ἡ ὑπὸ ηαβ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ θδε, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ': καὶ αἱ ηβ, θε, ἴσαι εἰσιν. ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἴσων κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα. καὶ τὰ ἑξῆς.

## ΛΗΜΜΑ.

**Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν ὁποιανδήποτε γωνίᾳ ὁποιᾳδήποτε ἴσην, καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ τῇ λοιπῇ ἴση ἔσται, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.**

Ἐχέτωσαν τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς αγ, γβ, δυσὶ ταῖς δζ, ζε, ἴσας, τὴν μὲν αγ, τῇ δζ, τὴν δὲ γβ, τῇ ζε, καὶ τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, ἴσην. Λέγω, ὅτι καὶ τὴν αβ, τῇ δε, ἴσην ἔχει, καὶ ὅλον τὸ αβγ, τρίγωνον ὅλῳ τῷ δεζ, τριγώνῳ ἴσον ἐστι, καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ γ, γωνία τῇ πρὸς τῷ ζ, ἡ δὲ πρὸς τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ, ὁμοίως ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν αγ, τῇ δζ, ἡ δὲ γβ, τῇ ζε, ἴση ἐστίν, πάντως γε ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν δζ, ἔστι καὶ ἡ γβ, πρὸς τὴν ζε, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἡ δζ, πρὸς τὴν ζε, κατὰ τὴν ις': τοῦ ἕκτου τῶν στοιχείων, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ ε, ἄρα κατὰ τὴν ζ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ, τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν. ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστίν. ὥστε κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ καὶ βάσις ἡ αβ, βάσει τῇ δε, ἴση ἐστί, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποσχεθέν.

Theod. Sph. Lib. 2. Fig. 12.




Πρό-