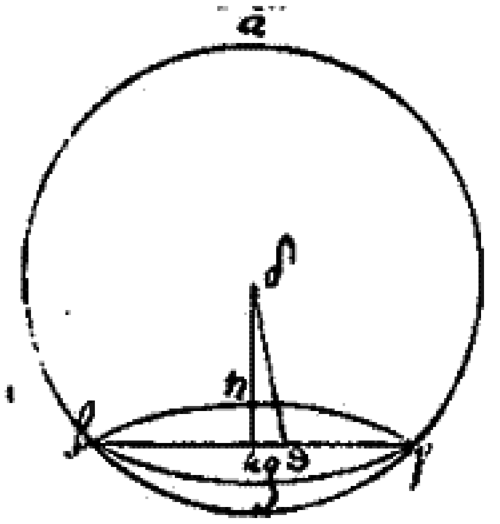
θετος ἔσαι, καὶ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἐπὶ τὸ η κ, ἐπίπεδον, ὑπεκέθη δὲ καὶ ἡ ε γ, ἄτοπον ἄρα καὶ τὴν ι γ': τοῦ ι α:

Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸν κέντρον τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων γραμμὴ ἀχθῇ, ὀρθὴ ἔσαι ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον.

Ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς α β γ, σφαίρας ἐπὶ τὸ ε, κέντρον τοῦ β ζ γ η κύκλου ἐλάσσονος ἡ δ ε. Λέγω τὴν δ ε, κάθετον εἶναι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ζ γ η, κύκλου, εἰ γὰρ μὴ, πιπτέτω ἡ δ θ. καὶ ἐπεὶ ἡ δ θ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ζ γ η, κύκλου ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς σφαίρας ἠγμένη, δῆλον, ὅτι τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ β ζ γ η, κύκλου, καὶ τὸ β': πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος, ἀλλ' ὑπετέθη τὸ ε, κέντρον εἶναι τοῦ β ζ θ η, κύκλου, ἄτοπον ἄρα. ὥστε ἡ δ θ, οὐκ ἔστι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ζ γ η, κύκλου ἐλάσσονος. ὁμοίως δὲ οὐδ' ἄλλη τις, ἡ δ ε, ἄρα ἡ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύουσα τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β ζ γ η, κύκλου ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 5.



ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ἀχθῇ, διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διέρχεται.

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

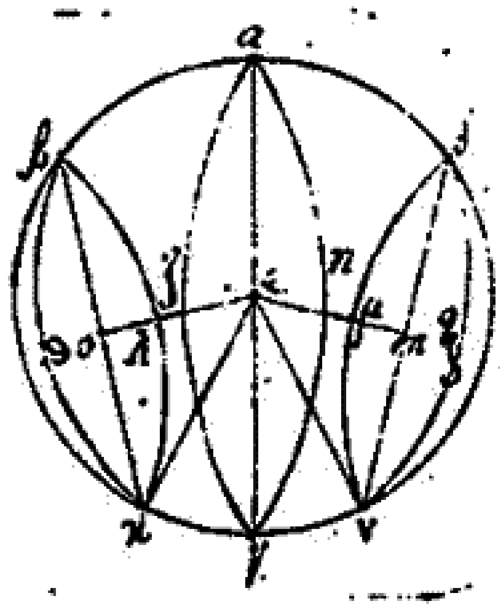
Τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου, διερχόμενοι τῆς σφαίρας μέγιστοί εἰσι, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ μέγιστοι διὰ τοῦ κέντρου διέρχονται τῆς σφαίρας, οἱ δὲ ἐξ ἴσου ἀφιστάμενοι τοῦ κέντρου ἴσοι εἰσι, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ ἴσοι ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφίστανται, καὶ ἔτι οἱ ἀπώτερον τοῦ κέντρου τῶν ἐγγύτερον ἐλάσσονές εἰσι.

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ α β γ δ, ἧς κέντρον τὸ ε, κύκλοι οἱ α ζ γ η, β θ κ λ, δ μ ν ξ, ὧν ὁ μὲν α ζ γ η, διὰ τοῦ ε, κέντρου διερχέσθω τῆς σφαίρας, οἱ δὲ β θ κ λ, δ μ ν ξ, ἐκτὸς τοῦ κέντρου ἔστωσαν. Λέγω, ὅτι ὁ α ζ γ η, κύκλος μέγιστός ἐστιν. Ἔστωσαν γὰρ κέντρα τῶν β θ κ λ, δ μ ν ξ, κύκλων τὰ ο, π, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ο, ε π, ε κ, ε ν, ε γ. καὶ ἐπεὶ καὶ τὴν ἀμφοτέρω, ἑκατέρα τῶν ε ο, ε π, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, πάντως γε αἱ ὑπὸ ε ο κ, ε π ν, γωνίαι ὀρθαί εἰσιν, ὥστε ἡ μὲν ε κ, μείζων ἐστὶ τῆς κ ο, ἡ δὲ ε ν, τῆς ν π, κατὰ τὴν ι θ': τοῦ α': τοῦ

σοι.

στοιχειωτοῦ. ἀλλ' ἑκατέρα τῶν εκ, εν, ἴση ἐστὶ τῇ εγ, καὶ τὰ α: ὅρον, ἄρα καὶ ἡ εγ, μείζων ἐστὶ τῆς τε κο, καὶ νπ. ἔστι δὲ ἡ μὲν εγ, ἡμιδιάμετρος τοῦ αζγη, κύκλου, ἡ δὲ κο, τοῦ βθκλ, καὶ ἡ νπ, τοῦ δμνξ, ἄρα ὁ αζγη, κύκλος ὁ διὰ τοῦ ε, κέντρου διερχόμενος μείζων ἐστὶν ἑκατέρου τῶν βθκλ, δμνξ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὁ αὐτὸς αζγη, μείζων καὶ παντὸς ἄλλου, μέγιστος ἄρα ὁ διὰ τοῦ κέντρου. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ αζγη, κύκλος μέγιστος, λέγω ὅτι διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται. εἰ γὰρ μὴ, ὁ διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενος μείζων ἔσται τοῦ αζγη, κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἀλλ' ὑπετέθη καὶ μέγιστος, ἄτοπον ἄρα, οἱ μέγιστοι ἄρα κύκλοι διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχονται.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 6.



Ἔστωσαν δὲ αἱ εο, επ, ἴσαι, ὥστε τοὺς βθκλ, δμνξ, κύκλους ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφίστασθαι. Λέγω ὅτι οἱ βθκλ, δμνζ, κύκλοι ἴσοι εἰσι, κατὰ γὰρ τὴν μζ': τοῦ α: τοῦ στοιχειωτοῦ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν κο, οε, τετράγωνα ἴσά εἰσι τῷ ἀπὸ τῆς εκ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν νπ, πε, τῷ ἀπὸ τῆς εν, ἀλλ' αἱ εκ, εν, ἴσαι εἰσιν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν κο, οε, ἴσά εἰσι τοῖς ἀπὸ τῶν νπ, πε, ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν οε, πε, ἴσων τετραγώνων, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κο, νπ, καὶ ἑπομένως ἡ κο, τῇ νπ, ὁμοίως ἴση ἐστὶν, ἀλλ' ἡ μὲν κο, ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ βθκλ, κύκλου, ἡ δὲ νπ, τοῦ δμνξ, ἄρα οἱ βθκλ, δμνξ, κύκλοι ἴσοι εἰσιν. ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν, δῆλον, ἔστωσαν γὰρ ἴσοι οἱ βθκλ, δμνξ, κύκλοι. Λέγω, ὅτι ἑκάτερος ἐξ ἴσου τοῦ ε, κέντρου ἀφίσταται, τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μζ': τὰ ἀπὸ τῶν κο, οε, τετράγωνα ἴσά ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς εκ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν νπ, πε, τῷ ἀπὸ τῆς εν, αἱ δὲ εκ, εν, ἴσαι εἰσι, πάντως γε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν κο, οε, ἴσά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν νπ, πε. ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν κο, νπ, ἴσων, ἡμιδιάμετροι γὰρ ἴσων κύκλων, ἐναπολείπονται τὰ ἀπὸ τῶν οε, πε, τετράγωνα ἴσα, καὶ ἑπομένως αἱ οε, πε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἄρα κατὰ τὸν ς': ὅρον τοῦ παρόντος οἱ βθκλ, δμνξ, κύκλοι ἐξ ἴσου τοῦ ε, κέντρου ἀφίστανται.

Ἔστω τελευταῖον ὁ μὲν βηγθ, ἀπώτερον τοῦ ζ, κέντρου τῆς αβγδε, σφαίρας, ὁ δὲ ελδμ, ἐγγύτερον, ἤτοι ἔστω ἡ ζκ, μείζων τῆς ζν. Λέγω, ὅτι ὁ βηγθ, ἐλάττων ἐστὶ τοῦ ελδμ, κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν μζ': τὰ ἀπὸ τῶν γκ, κζ, τετράγωνα ἴσά ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς γζ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν δν, νζ, τῷ ἀπὸ τῆς ζδ, ἴσαι δὲ αἱ ζγ, ζδ, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γκ, κζ, ἴσά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν δν, νζ. ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν ζκ, ζν, ἀνίσων, ἐναπολείπεται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γκ, δν, ἄνισα, μείζων δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡ ζκ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζν, μεί-

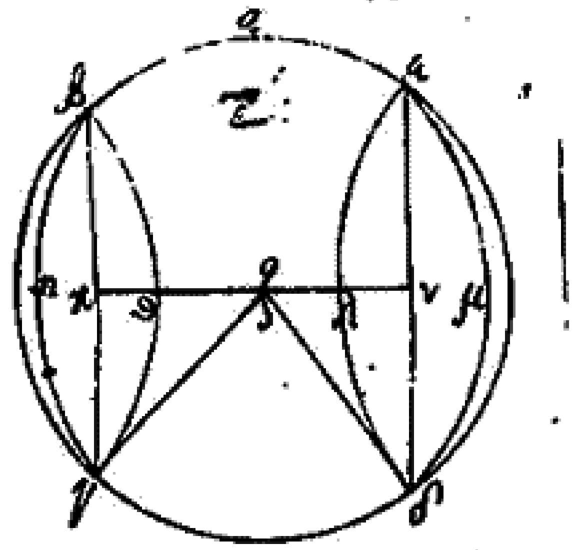
ζων

ζων ἄρα ἀντιπεπονθότως καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δν, τοῦ ἀπὸ τῆς γκ, καὶ ἑπομένως ἡ δν, τῆς γκ, μείζων ἐστίν. ἀλλ' ἡ μὲν δν, ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ ελδμ, ἡ δὲ γκ, βηγθ, ἄρα ὁ ελδμ, κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ βηγθ, τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἄρα κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενοι τῆς σφαίρας μέγιστοι κεῖνται, καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Α': Ἐκ τούτου ῥᾷστα συνάγεται, ὅτι πάντες οἱ ἐν τῇ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι ἴσοι εἰσιν, ἡ γὰρ τοῦ μεγίστου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλου ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ὡς δέδεικται. Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 7.

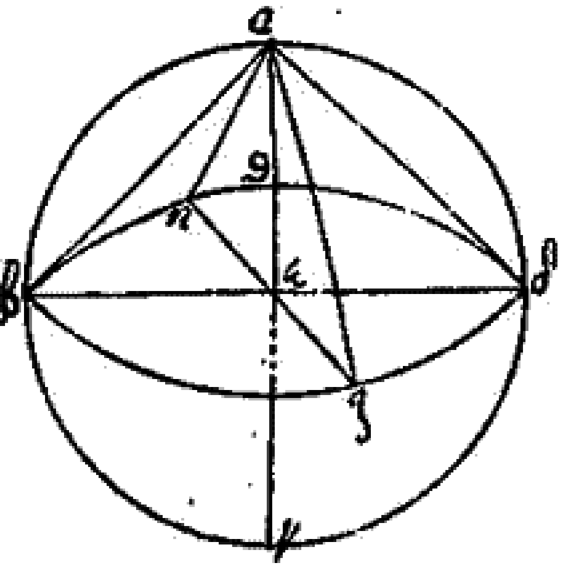
Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.



Β': Ἔτι ἑκατέρωθεν τοῦ οἱουδήποτε ἐν σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου οὐ πλείους, ἢ δύο μόνον ἴσους εἶναι τῶν ἐλασσόνων ἐν αὐτῇ κύκλων.

Πρότασις Η': Θεώρημα.

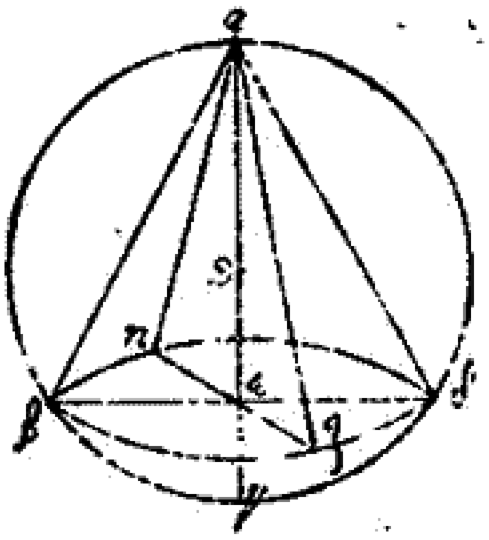
Ἐὰν παρὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐν αὐτῇ κύκλου κάθετος ἀχθῇ, διὰ τῶν πόλων τοῦ κύκλου διελεύσεται, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου τοῦ ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ κάθετος ἀχθῇ, διά τε τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διελεύσεται, καὶ τοῦ ἀπεναντίον πόλου τοῦ κύκλου.



Ἔστω σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, κύκλος δὲ ἐν αὐτῇ ὁ βζδη. ἐπεὶ δὲ οἱ κύκλοι ἐν τῇ σφαίρᾳ ἢ μέγιστοί εἰσιν, ἢ ἐλάσσονες, ἔστω α': ὁ βζδη, μέγιστος, ὃς καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ἀνεστάθω κάθετος πρὸς τὸ αὐτοῦ ἐπίπεδον ἡ εθ, Λέγω ὅτι ἡ εθ, ἑκατέρωθεν ἐκτεινομένη διὰ τῶν πόλων τοῦ βζδη, διελεύσεται κύκλου. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βδ, ηζ, διάμετροι τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ α, πόλου ἀχθήτωσαν αἱ αβ, αη, αδ, αζ, καὶ ἐπεὶ ἡ αε, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βζδη, κύκλου ἐπίπεδον, πάντως γε κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ια': τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ πρὸς τὰς βδ, ηζ, ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ βζδη, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ εβ, εζ, εδ, εη, ἴσαι, ἡμιδιάμετροι γὰρ τοῦ κύκλου εἰσί, καὶ κοινὴ ἡ αε, ἄρα τῶν αεβ, αεη, αεδ, αεζ, τριγώνων κατὰ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ στοιχειωτοῦ αἱ αβ, αη, αδ, αζ, ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσαι εἰσι, καὶ κατὰ τὸν ε': ὅρον τοῦ παρόντος τὸ α, πόα, πόλος ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου, τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸ γ, πόλος τοῦ αὐτοῦ εἶναι κύκλου.

Εἰ δὲ ὁ κύκλος ἐλάσσων εἴη, ἤχθω ἀπὸ τοῦ θ, κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ βζδη, κύκλου κάθετος ἡ θε. Λέγω ὅτι ἡ θε, ἐκβαλλομένη ἑκατέρωθεν, διὰ τῶν πόλων τοῦ κύκλου διέρχεται. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἡ αθε, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βζδη, κύκλου διέρχεται κατὰ τὸ β′: πόρισμα τῆς β′: τοῦ παρόντος, ἀδυσχερῶς δειχθήσεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω, αἱ αβ, αη, αδ, αζ, ἴσαι. ὥστε τὸ α, πόλος ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 8.



Ἀλλὰ δὴ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, πόλου τοῦ βζδη, κύκλου κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτοῦ ἐπίπεδον ἡ αε. Λέγω ὅτι ἡ αε, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, καὶ τοῦ ἀπεναντίον πόλου τοῦ αὐτοῦ κύκλου, τῶν γὰρ αβ, αη, αδ, αζ, ἀγομένων, καὶ τῶν βδ, εζ, ἐπιζευγνυμένων, ἐπεὶ ἡ αε, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῶν βε, ηε, δε, ζε, κατὰ τὸν ῥηθέντα γ′: ὅρον τοῦ ια′: τοῦ στοιχειωτοῦ. πάντως γε κατὰ τὴν μζ′: τοῦ α′: τοῦ αὐτοῦ, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βε, εα. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αη, τοῖς ἀπὸ τῶν ηε, εα. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αδ, τοῖς ἀπὸ τῶν δε, εα, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αζ, τοῖς ἀπὸ τῶν ζε, εα. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αη, αδ, αζ, ἴσα εἰσι, διὰ τὸ καὶ τὰς αβ, αη, αδ, αζ, ἴσας εἶναι κατὰ τὸν ε′: ὅρον τοῦ παρόντος, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν βε, εα, καὶ ηε, εα, καὶ δε, εα, καὶ ζε, εα, ἴσα εἰσι, κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς αε, λοιπὰ τὰ ἀπὸ τῶν βε, ηε, δε, ζε, ἴσα ἐστιν, ὥστε καὶ αἱ βε, ηε, δε, ζε, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσι, καὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου κατὰ τὸν ιε′: ὅρον τοῦ α′: τοῦ στοιχειωτοῦ. ἡ αὐτὴ δεῖξις ἐφαρμόζει ἐφ᾽ ἑκατέρου τῶν σχημάτων. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ α′: ἐπεὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου, ὁ δὲ κύκλος μέγιστός ἐστι, δῆλον, ὅτι τὸ ε, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς σφαίρας κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἐπὶ δὲ τοῦ β′: ἐπεὶ ἡ αε, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βζδη, κύκλου διέρχεται, καὶ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ αὐτοῦ ἐπίπεδον, πάντως γε τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς αε, ἐστὶ κατὰ τὸ α′: πόρισμα τῆς γ′: τοῦ παρόντος. Ὅτι δὲ ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ γ, ἑτέρου διέρχεται πόλου, δέδεικται μικρὸν πρόσθεν. Ἐὰν ἄρα παρὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐν αὐτῇ κύκλου κάθετος ἀχθῇ διὰ τῶν πόλων, καὶ τὰ ἑξῆς.

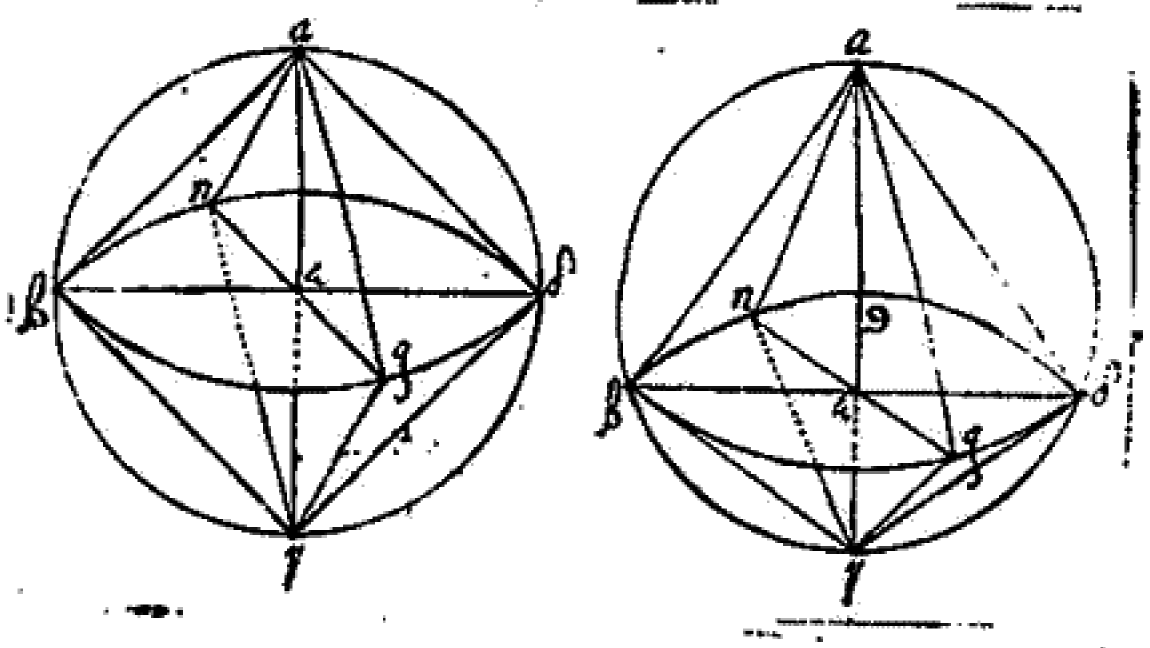
Πρό-

Πρότασις Θ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν διὰ τῶν πόλων τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων εὐθεῖα ἀχθῇ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ τῇ α β γ δ, κύκλος ὁ β ζ δ η, οὗ πόλοι τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, καὶ διήχθω διὰ τῶν α, καὶ γ, σημείων ἡ α γ. Λέγω ὅτι ἡ α γ, κάθετός ἐστι, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, σφαίρας διέρχεται.

Theod: Sf: Lib. 1. Fig. 9.



Συμβαλλέτω γὰρ ἡ α γ, τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ β ζ δ η, κύκλου κατὰ τὸ ε, καὶ διὰ τοῦ ε, διήχθωσαν αἱ β δ, η ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ὡς πρότερον αἱ α β, α η, α δ, α ζ, καὶ ἔτι αἱ γ β, γ ζ, γ δ, γ η· καὶ ἐπεὶ αἱ α β, α η, α δ, α ζ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν ε΄: ὅρον τοῦ παρόντος, εἰσὶ δὲ ἴσαι κατὰ τὸν αὐτὸν, καὶ αἱ γ β, γ ζ, γ δ, γ η, καὶ κοινὴ αἱ α γ· ἄρα κατὰ τὴν η΄: τοῦ α΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, τὰ α β γ, α η γ, α ζ γ, καὶ α δ γ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ, καὶ τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴσας ἔχουσιν, ὥστε αἱ ὑπὸ β α ε, η α ε, δ α ε, καὶ ζ α ε, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ α β, α η, α δ, καὶ α ζ, ἴσαι, ὡς δέδεικται, καὶ κοινὴ ἡ α ε, ἄρα κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, αἱ β ε, η ε, δ ε, ζ ε, ἴσαι εἰσι, καὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶ τοῦ β ζ δ η, κύκλου, κατὰ τὸν ιε΄: ὅρον τοῦ αὐτοῦ· ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω κάθετός ἐστιν ἡ α ε, πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ζ δ η, κύκλου, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς γ΄: τοῦ παρόντος, τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς α γ, ἐστὶν, καὶ εἰ μὲν ὁ β ζ δ η, μέγιστός ἐστι, τὸ ε, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ α΄: πόρισμα τῆς β΄: τοῦ παρόντος, εἰ δὲ ἐλάσσων εἴη, ἔσται δὸς εἰπεῖν, τὸ θ. ὡς ἐπὶ τοῦ β΄: σχήματος. Ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ πόλου τινὸς τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων εὐθεῖα ἀχθῇ, κάθετος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

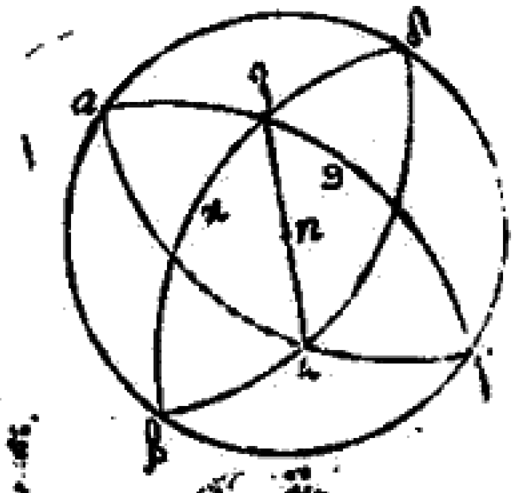
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου τινὸς κύκλου κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ἀχθῇ, ἐπὶ τοῦ κέντρου πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ ἀνάπαλιν.

Πρότασις Ι΄: Θεώρημα.

Οἱ μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι δίχα ἀλλήλους τέμνονται, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ δίχα ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλους τεμνόμενοι κύκλοι, μέγιστοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ α β γ δ, μέγιστοι κύκλοι οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ. Λέγω ὅτι οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, μέγιστοι κύκλοι τέμνονται ἀλλήλους, ἑκάτερος γὰρ κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ παρόντος διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, διέρχεται σφαίρας, ἀδύνατον ἄρα παράλληλον πρὸς ἀλλήλους τρεῖν θέσιν, καὶ μὴ τέμνεσθαι. Ὅτι δὲ καὶ δίχα, δῆλον.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 10.



διήχθω γὰρ διὰ τῶν ε, καὶ ζ, κοινῶν τομῶν ἡ ε ζ, ἥτις κατὰ τὴν γ΄: τοῦ ια΄: τοῦ στοιχειωτοῦ εὐθεῖά ἐστιν, καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ, κοινή ἐστι τομὴ τῶν α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλων, πάντως γε τὸ κέντρον ἑκατέρου τῶν κύκλων ἐπ' αὐτῆς ἐστιν. εἰ γὰρ μή, ἀλλ' ἐκτὸς εἴη τῆς ε ζ, ἐπεὶ οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, οὐδὲν ἄλλο κοινὸν ἔχουσιν, ἢ τὴν ε ζ, κοινὴν αὐτῶν τομήν· δῆλον, ὅτι οὐδὲ τὸ αὐτὸ ἔσται κέντρον ἑκατέρου τῶν αὐτῶν κύκλων, καὶ ἑπομένως οὐδὲ διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, σφαίρας διέρχονται, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ζ΄: τοῦ παρόντος. οὐκ ἄρα τὰ κέντρα τῶν α ε γ ζ, β ε δ ζ, ἐκτός εἰσι τῆς ε β, κοινῆς τομῆς, ἀλλ' ἐπ' αὐτῆς, καὶ κοινὸν ἑκατέρῳ. Ἔστω δὴ τοῦτο τὸ η, τὸ η, ἄρα ἔσται κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ τῶν α ε γ ζ, β ε δ ζ, μεγίστων κύκλων, καὶ ἡ ε ζ, διάμετρός ἐστιν ἑκατέρου, ὥστε δίχα ἀλλήλους τέμνονται, ὅπερ ἦν τὸ α΄:

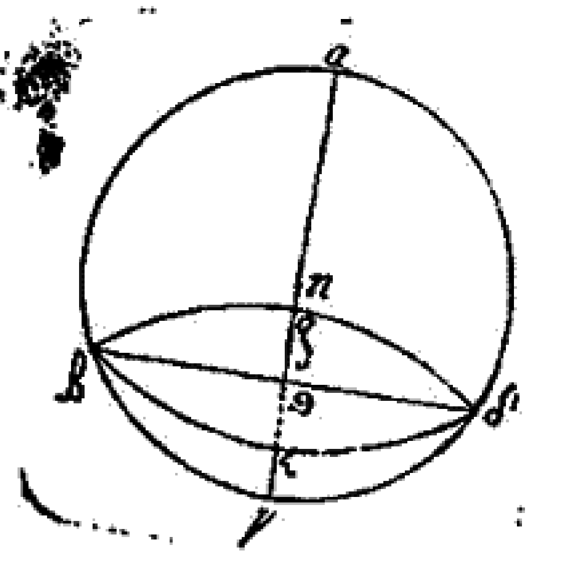
Ἀλλὰ δὴ τεμνέσθωσαν ἀλλήλους δίχα οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλοι. Λέγω, ὅτι μέγιστοί εἰσιν, ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, σφαίρας διέρχονται. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ε ζ, κοινὴ τομὴ αὐτῶν, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ η. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν δίχα ἀλλήλους οἱ κύκλοι τέμνονται, πάντως γε ἡ ε ζ, διάμετρός ἐστι, καὶ διὰ τοῦ κέντρου ἑκατέρου τῶν κύκλων διέρχεται. ὥστε τὸ η, κέντρον ἐστὶ τοῦ τε α ε γ ζ, καὶ β ε δ ζ, κύκλου, ἡμιδιάμετρος γὰρ ἑκατέρου ἐστὶν ἥ τε η ε, καὶ η ζ, ὡς δίχα τῆς ε ζ, διαμέτρου διαιρουμένης. Λέγω, ὅτι τὸ η, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς α β γ δ, σφαίρας. εἰ γὰρ μή, ἀνεστάθω ἡ μὲν η θ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ α ε γ ζ, κύκλου, ἡ δὲ η κ, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ε δ ζ, καὶ κατὰ τὸ β΄: πόρισμα τῆς β΄: τοῦ παρόντος ἑκατέρα τῶν η θ, η κ, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, τῆς ἄρα α β γ δ, σφαίρας τὸ κέντρον ἐπί τε τῆς η θ, καὶ η κ, ἐστὶν, ὅπερ ἄτοπον, τὸ η, ἄρα κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς α β γ δ, σφαίρας, καὶ κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ παρόντος οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλοι μέγιστοί εἰσιν, ὅπερ ἦν τὸ β΄:

Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιςος ἐν σφαίρᾳ κύκλον ἐλάσσονα πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνῃ, δίχα αὐτὸν τέμνει, καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δίχα αὐτὸν τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνει.

Τεμνέτω δὴ ὁ αβγδ, μέγιςος κύκλος τὸν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἐλάσσονα, τὸν βεδζ, πρὸς ὀρθὰς, τουτέςιν ἔςω τὸ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον. Λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὸν τέμνει. Ἔςω δὴ κοινὴ τομὴ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἡ βδ, διὰ δὲ τοῦ η, κέντρου τῆς σφαίρας διήχθω κάθετος ἐπὶ τῆς βδ, ἡ ηθ, περατουμένη ἐφ' ἑκατέρα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς περιφερείας τῆς σφαίρας, καὶ ἐπεὶ τὸ η, σημεῖον, κέντρον ἐςὶ τῆς σφαίρας, πάντως γε κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος τὸ αὐτὸ σημεῖόν ἐςι κέντρον καὶ τοῦ αβγδ, κύκλου. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ηθ, πρὸς ὀρθὰς πέπτωκεν ἐπὶ τῆς βδ, καὶ τὸ αβγδ, ἐπίπεδον πρὸς ὀρθάς ἐςιν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ βεδζ. δῆλον, ὅτι ἡ ηθ, πρὸς ὀρθάς ἐςι καὶ εἰς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ ια: τοῦ ςοιχειωτοῦ, καὶ κατὰ τὸ β': πορ: τῆς β': τοῦ παρόντος, τὸ θ, κέντρον ἐςὶ τοῦ βεδζ, κύκλου, ὥςε ἡ βδ, διάμετρός ἐςι. φανερὸν οὖν ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος δίχα τέμνει τὸν βεδζ. ὅπερ ἦν τὸ α: Ὅτι δὲ καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, δῆλον, κατὰ γὰρ τὴν η': τοῦ παρόντος ἡ αηθ, διὰ τῶν πόλων τοῦ βεδζ, κύκλου διέρχεται. ὥςε τὰ α, καὶ γ, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ βεδζ, κύκλου, ἀλλ' ὅλη ἡ αγ, ἐν τῷ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπιπέδῳ ἐςὶ κατὰ τὴν α: τοῦ ια: τοῦ ςοιχειωτοῦ, ἄρα ὁ αβγδ, κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ βεδζ, κύκλου διέρχεται, ὅπερ ἦν τὸ β':

Theod: Sf: Lib. 1. Fig. 11.



Ἀλλὰ δὴ τεμνέτω ὁ αβγδ, κύκλος τὸν βεδζ, δίχα κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ βδ, ἥτις διάμετρός ἐςι τοῦ βεδζ, κύκλου κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διέρχεται. ἔςω δὴ κέντρον τοῦ μὲν βεδζ, κύκλου τὸ θ, τῆς δὲ σφαίρας τὸ η, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ηθ, περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. καὶ ἐπεὶ ὁ αβγδ, μέγιςός ἐςι, δῆλον, ὅτι τὸ η, σημεῖον κέντρον ὂν τῆς σφαίρας, κέντρον ἐςὶ καὶ αὐτοῦ τοῦ αβγδ, κύκλου, κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, ἔςι δὲ καὶ τὸ θ, σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ αὐτοῦ αβγδ, κύκλου, ὅτι ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐςι τομῆς, ἄρα ὅλη ἡ ηθ, ἐν τῷ τοῦ αβγδ, ἐςὶν ἐπιπέδῳ. κατὰ δὲ τὴν ς': τοῦ παρόντος ἡ ηθ, ὀρθή ἐςι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπίπεδον. ἄρα κατὰ τὴν ιη: τοῦ ια: τοῦ ςοιχ: καὶ τὰ δι' αὐτῆς πάντα ἐπίπεδα ὀρθά ἐςι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον, ὥςε ὁ αβγδ,

ὡς

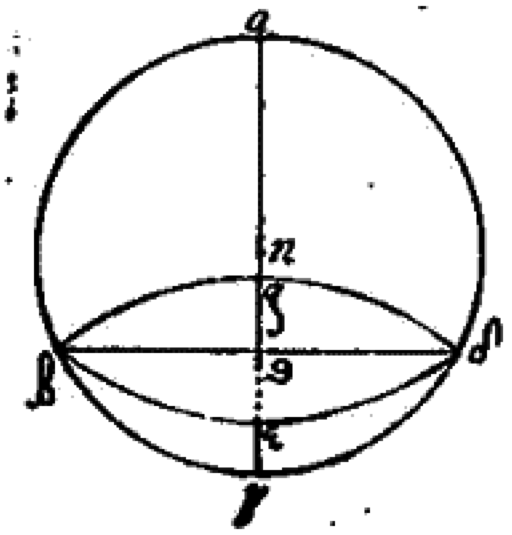
ὡς δι᾽ αὐτῆς διερχόμενος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον. ὅπερ ἦν τὸ ἐξ ἀρχῆς ὑποτεθέν.

Πρότασις ΙΒ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων ἑτέρου κύκλου διέρχεται, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει.

Διελθέτω ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν α, καὶ γ, πόλων τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ βεδζ, κύκλου. Λέγω, ὅτι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἥτε αγ, ἡ τοὺς πόλους συνδέουσα, συμβάλλουσα τῷ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ θ, σημεῖον, καὶ ἔτι ἡ βδ, κοινὴ αὐτῶν τομή. καὶ ἐπεὶ ἡ αγ, διὰ τῶν πόλων τοῦ βεδζ, διέρχεται κύκλου, πάντως γε κατὰ τὴν θ΄: τοῦ παρόντος κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ η, κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται. ὥστε κατὰ τὴν ιη΄: τοῦ ια΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ πάντα τὰ δι᾽ αὐτῆς ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπίπεδον. ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ αβγδ, κύκλος, πρὸς τὸν βεδζ, κατὰ τὴν αὐτήν. ἐπεὶ δὲ πάλιν κατὰ τὸ β΄: πόρισμα τῆς β΄: τοῦ παρόντος ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μὴ διὰ τοῦ κέντρου κύκλου, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου διέρχεται, δῆλον, ὅτι τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ βεδζ. καὶ ἑπομένως ἡ βδ, διάμετρος τοῦ αὐτοῦ, ἡ γὰρ αγ, κατὰ τὸν δ΄: ὅρον τοῦ ια΄: τοῦ στοιχ: ἐπὶ τῆς κοινῆς πίπτει τομῆς, ὥστε ὁ βεδζ, δίχα τέμνεται παρὰ τοῦ αβγδ, δέδεικται δὲ καὶ πρὸς ὀρθάς. ἄρα ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 12.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α΄: Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος διὰ τῶν πόλων μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ διέρχεται, κἀκεῖνος διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, καὶ ἑκάτερος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ἕτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

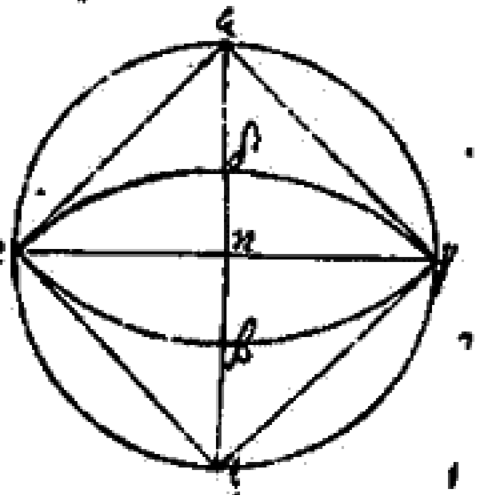
Β΄: Ἔτι κύκλος ἐν σφαίρᾳ δι᾽ ἑκατέρου τῶν πόλων ἑτέρου κύκλου διερχόμενος μέγιστός ἐστιν, ὅτι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνων, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται.

Πρότασις ΙΓʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου μεγίστου τινὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εὐθεῖα ἀχθῇ, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ τετραγώνου πλευρᾷ τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, κἂν ἡ ἀπὸ τοῦ πόλου τινὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ τετραγώνου πλευρᾷ, μέγιστός ἐστιν ἐκεῖνος.

Ἔστω κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ ὁ α β γ δ, οὗ πόλοι οἱ ε, ζ. καὶ ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ ε, πόλου ἐπὶ τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν εὐθεῖα ἡ ε α. Λέγω, ὅτι ἡ ε α, ἴση ἐστὶ πλευρᾷ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἐγγραφομένου τετραγώνου. Κείσθω γὰρ διέρχεσθαι διὰ τῶν ε, καὶ ζ, πόλων τοῦ α β γ δ, μεγίστου κύκλου τὸν α ζ γ ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε γ, α ζ, γ ζ, ε ζ, α γ. καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ, διὰ τῶν πόλων τοῦ α β γ δ, κύκλου διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν θʹ: τοῦ παρόντος ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ α β γ δ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται. ἀλλὰ καὶ ὁ μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, κατὰ τὴν ζʹ: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ η, σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ε ζ, τῷ τοῦ α β γ δ, κύκλου ἐπιπέδῳ, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ α β γ δ, κύκλου, καὶ ἑπομένως ἡ α γ, διάμετρός ἐστιν αὐτοῦ. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ε ζ, ὀρθή ἐστιν, ὡς δέδεικται, πρὸς τὸ τοῦ α β γ δ, κύκλου ἐπίπεδον. δῆλον, ὅτι καὶ πρὸς τὴν α γ, ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας κατὰ τὸν γʹ: ὅρον τοῦ ιαʹ: τῶν στοιχ: ὀρθὴ ἄρα ἥτε ὑπὸ α η ε, γ η ε, καὶ αἱ τούτων κατὰ κορυφήν, αἱ ἄρα α γ, ε ζ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τέμνονται, καὶ αἱ α ε, ε γ, γ ζ, ζ α, περιφέρειαι τεταρτημόρια εἰσί, καὶ ἑπομένως αἱ α ε, ε γ, γ ζ, ζ α, ὑποτείνουσαι ἴσαι, καὶ τὸ α ε γ ζ, τετράγωνόν ἐστιν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν α ε γ ζ, κύκλον, καὶ αἱ η α, η ε, η γ, η ζ, ἴσαι εἰσιν, ὡς δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμνομένων ἀλλήλαις τῶν α γ, ε ζ. ὥστε τὸ η, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ α ε γ ζ, κύκλου, μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ α ε γ ζ, κύκλος, καὶ ἴσος τῷ α β γ δ, κατὰ τὸ αʹ: πόρ: τῆς ζʹ: τοῦ παρόντος, ἄρα ἡ α ε, πλευρά ἐστι τετραγώνου ἐγγραφομένου εἰς μέγιστον κύκλον τὸν ἐν ᾗ καὶ ὁ α β γ δ, κύκλος σφαίρᾳ. ὅπερ ἔδει τὸ αʹ:

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 13.



Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ α ε, ἴση τῇ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ ἐγγραφομένου τετραγώνου πλευρᾷ. Λέγω ὅτι ὁ α β γ δ, κύκλος μέγιστός ἐστι. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ α ζ γ ε, κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ α β γ δ, διέρχεται, πάντως γε δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει κατὰ τὴν αλωπέρω, ἡ α γ, ἄρα κοινὴ τομὴ διάμετρός ἐστι

τοῦ

τοῦ α β γ δ, κύκλου, ἀλλ᾽ ἡ α ε, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ ἐν μεγίστῳ ἐγγραφομένου κύκλῳ, καὶ ταύτῃ ἴση ἐστὶν ἡ ε γ, κατὰ τὸν ι: ὅρον τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ α ε γ, ἡμικύκλιόν ἐστι., καὶ ἡ α γ, διάμετρος τοῦ α β γ δ, κύκλου, διάμετρος ἔτι ἐστὶ καὶ τοῦ α ε γ ζ. οἱ ἄρα α β γ δ, α ε γ ζ, κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ ὄντες σφαίρᾳ δίχα ἀλλήλους τέμνονται, καὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ παρόντος μέγιστοί εἰσι, μέγιστος ἄρα ὁ α β γ δ, κύκλος. ὅπερ ἔδει τὸ β′:

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

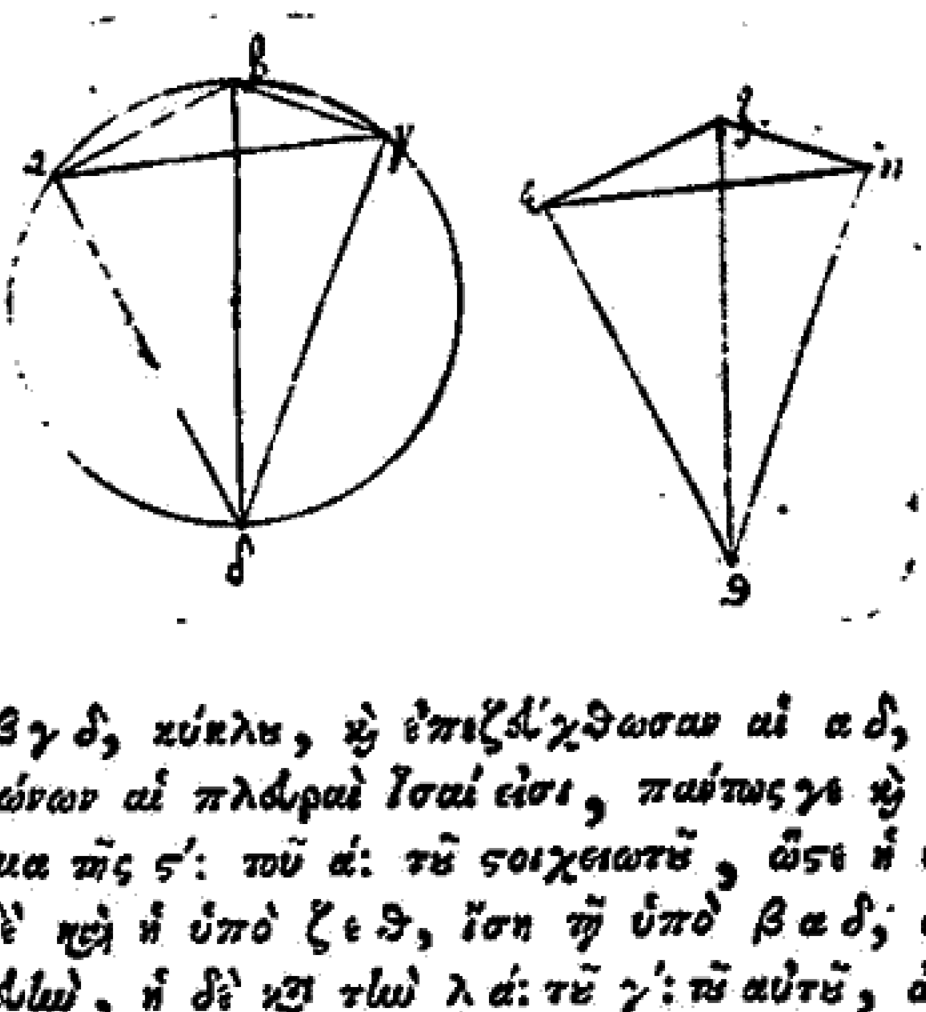
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οἱ μέγιστοι κύκλοι τεταρτημορίῳ ἀφίστανται τῶν ἰδίων πόλων, καὶ οἱ τεταρτημορίῳ ἀφιστάμενοι τῶν ἰδίων πόλων, μέγιστοί εἰσι.

Πρότασις ΙΔ′: Πρόβλημα.

Τῇ διαμέτρῳ παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν εὑρεῖν.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος τυχὼν ὁ α β γ δ. καὶ ζητείσθω εὐθεῖα ἴση τῇ αὐτοῦ διαμέτρῳ. Ληφθήτωσαν ἐπὶ τῆς τοῦ α β γ δ, κύκλου περιφερείας σημεῖα, ὡς ἔτυχε, τὰ α, β, γ, καὶ συνεστάσθω ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἳ εἰσὶν ἴσαι ταῖς τρισὶν διαστήμασιν α β, β γ, γ α, τρίγωνον τὸ ε ζ η. καὶ πρὸς μὲν τῷ ε, σημείῳ συνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς ε ζ, ἡ ε θ, πρὸς δὲ τῷ η, συνεστάθω ὁμοίως κάθετος ἐπὶ τῆς ζ η, ἡ η θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζ θ, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητουμένη. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἡ β δ, διάμετρος τοῦ α β γ δ, κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, γ δ, α γ. καὶ ἐπεὶ τῶν α β γ, ε ζ η, τριγώνων αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσι, πάντως γε καὶ αἱ γωνίαι ὁμοίως ἴσαι εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ς′: τοῦ α′: τοῦ στοιχειωτοῦ, ὥστε ἡ ὑπὸ ζ ε η, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β α γ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζ ε θ, ἴση τῇ ὑπὸ β α δ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα ἡ μὲν κατὰ τὴν κατασκευήν, ἡ δὲ κατὰ τὴν λ α′: τοῦ γ′: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ η ε θ, λοιπῇ τῇ γ α δ, ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ε η θ, τῇ ὑπὸ α γ δ, ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ ε η, πλευρὰ τῇ α γ, ἴση, ἄρα κατὰ τὴν κ ς′: τοῦ α′: τοῦ αὐτοῦ καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ε θ, θ η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς λοιπαῖς α δ, δ γ. ὥστε ὅλον τὸ ε θ η, τρίγωνον ὅλῳ τῷ α δ γ, τριγώνῳ ἰσόν ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ τὸ ε ζ η, ἴσον τῷ α β γ, τριγώνῳ, ὡς δέδεικται, ἄρα τὸ ε ζ η θ, τραπέζιον ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ δ, τραπεζίῳ, ἐφαρμοττομένης οὖν τῆς ε θ, ἐπὶ τῆς α δ, ἐφαρμοσθήσεται

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 14.



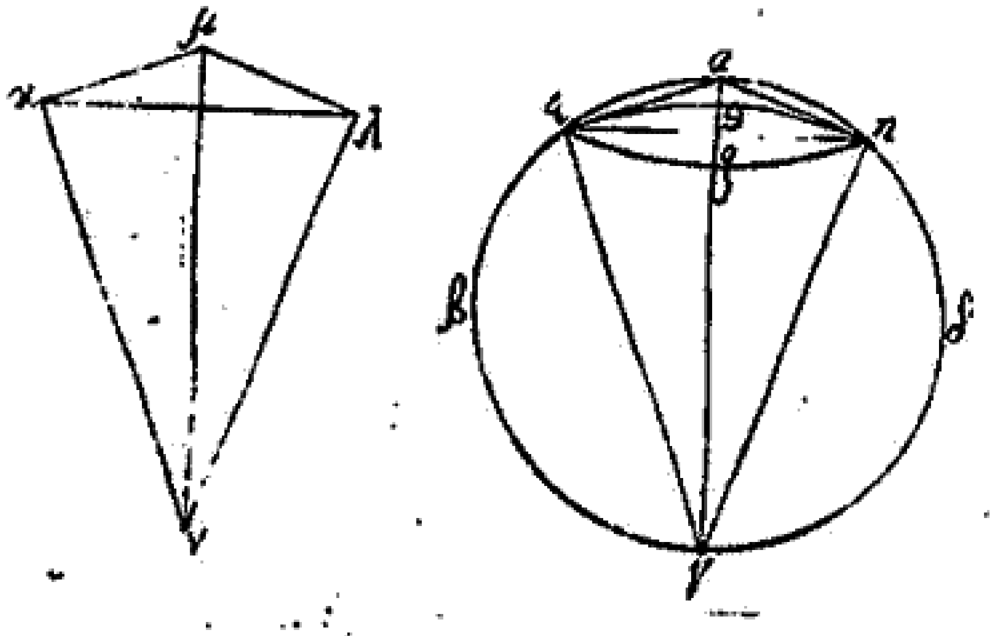
πάντως καὶ ἡ εζ, τῇ αβ, καὶ ἡ ζη, τῇ βγ, καὶ ἡ ηθ, τῇ γδ, ἴσα γάρ, καὶ τὰς πλευρὰς καὶ μίαν ἴσας ἔχουσιν, ὡς δέδεικται, ὥστε ἐφαρμοττομένων τῶν ζ, η, θ, σημείων τοῖς β, γ, δ, ἐφαρμοσθήσεται καὶ ἡ ζθ, τῇ βδ, ἡ ζθ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ αβγδ, κύκλου διαμέτρῳ. ὅπερ ἔδει τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΙΕ΄: Πρόβλημα.

Τῇ διαμέτρῳ τῆς δοθείσης σφαίρας ἴσην εὐθεῖαν εὑρεῖν.

Ἔστω σφαῖρα ἡ αβγδ, καὶ ζητείσθω ἡ ταύτης διάμετρος. Ληφθήτω δὴ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὡς εἰπεῖν τὸ α, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι γραφήτω κύκλος ὁ εζηθ· οὗτινος εὑρεθήτω διὰ τῆς ἀνωτέρω ἡ διάμετρος, καὶ ἔστω αὕτη ἡ κλ. ληφθέντων δὲ δύο τυχόντων σημείων, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ εζηθ, κύκλου φέρ᾽ εἰπεῖν, τὰ ζ, καὶ θ, διαιρεθήτω ἑκάτερον τῶν ζεθ, ζηθ, τόξων δίχα κατὰ τὰ ε, καὶ η, σημεῖα, καὶ διαιρεθήσεται ὁ εζηθ, δίχα. ὥστε τὴν τὰ ε, η, ἐπιζευγνύουσαν σημεῖα διάμετρον εἶναι. εἶτα συνεστάσθω ἐπὶ τῆς κλ, τρίγωνον τὸ κμλ. ὥστε τὴν μὲν κμ, ἴσην εἶναι τῇ εα, διαστήματι, τὴν δὲ μλ, τῇ αη, καὶ πρὸς μὲν τῷ κ, συνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς κμ, ἡ κν, πρὸς δὲ τῷ λ, ὁμοίως συνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς μλ, ἡ λν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μν, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητουμένη. Κείσθω γὰρ τὸν αβγδ, κύκλον, εἶναι τὸν διὰ τῶν ε, α, η, διερχόμενον σημείων τῆς δοθείσης σφαίρας, καὶ διήχθω διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἡ αγ. εἶτα ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, εη, εγ, ηγ. καὶ ἐπεὶ τὸ κμλν, τραπέζιον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ εαηγ, τραπεζίῳ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, συνέστη γὰρ τό, τε κμλ, τρίγωνον ἴσον καὶ ὅμοιον τῷ εαη, καὶ τὸ κλν, τῷ εηγ, πάντως γε ἡ μν, διάμετρός ἐστι τοῦ αβγδ, κύκλου, κατὰ τὴν αὐτήν, ἀλλ᾽ ὁ αβγδ, κύκλος μέγιστός ἐστι κατὰ τὸ β΄: πόρισμα τῆς ιβ΄: τοῦ παρόντος, ὅτι δίχα τέμνων τὸν εζηθ, κύκλον κατὰ τὰ ε, καὶ η, σημεῖα διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, ἡ δὲ τοῦ μεγίστου κύκλου διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ἄρα ἡ μν, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. ὅπερ ἔδει τὸ προσταχθέν.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 15.

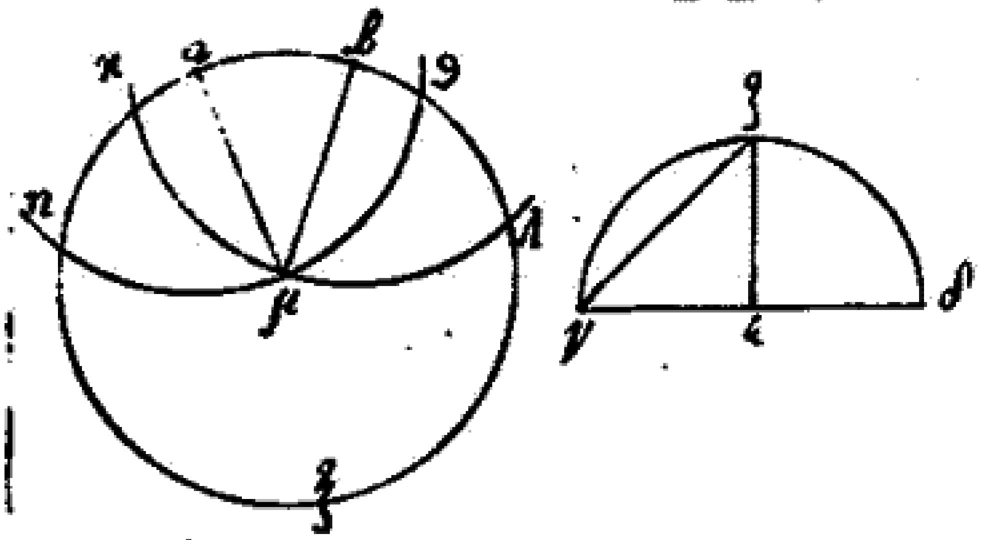


Πρότασις Ιϛ': Πρόβλημα.

Δύο, ὡς ἔτυχε, σημείων δοθέντων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸν δι' αὐτῶν διερχόμενον μέγιστον κύκλον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν ἐπὶ τῆς δοθείσης σφαίρας τυχόντα σημεῖα τὰ α, β, καὶ ζητείσθω ὁ δι' αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος. Εὑρέθητω δὴ κατὰ τὴν δευτέραν ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστω αὕτη ἡ γδ. διαιρεθείσης δὲ τῆς γδ, δίχα κατὰ τὸ ε, σημεῖον, ἀνεστάσθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ εζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ. ἔπειτα κέντροις τοῖς α, καὶ β, δοθεῖσι σημείοις, καὶ διαστήματι τῇ γζ, γραφήτωσαν τόξα τὰ ηθ, κλ, τεμνόμενα ἀλλήλοις κατὰ τὸ μ, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῇ μα, ἢ μβ, γραφήτω κύκλος, κἀκεῖνος ἔσται ὁ ζητούμενος. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αμ, βμ, καὶ ἐπεὶ τὰ ηθ, κλ, τόξα ἴσῳ κατεγράφησαν διαστήματι, πάντως γε αἱ αμ, βμ, ἴσαι εἰσίν. ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ μ, διαστήματι δὲ τῇ μα, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β. ἐπεὶ δὲ ἑκατέρα τῶν αμ, βμ, ἴση ἐστὶ τῇ γζ, ἡ δὲ γζ, ἴση τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ ἐν μεγίστῳ ἐγγραφομένου κύκλῳ. ὁ ἄρα αβξ, κύκλος ἀφίσταται τοῦ μ, αὐτοῦ πόλου διαστήματι ἴσῳ τῇ πλευρᾷ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ ἐγγραφομένου τετραγώνου, καὶ ἑπομένως μέγιστός ἐστι κατὰ τὴν ιγ': τοῦ παρόντος. δύο ἄρα, ὡς ἔτυχε, δοθέντων σημείων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εὕρηται ὁ δι' αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 16.



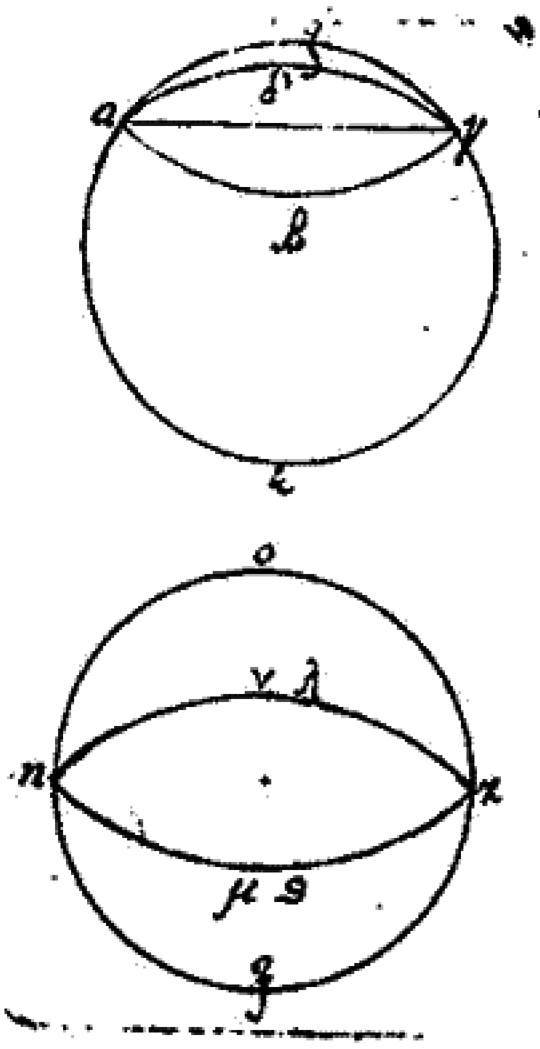
Πρότασις ΙΖ': Πρόβλημα.

Παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου τοὺς πόλους εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ κύκλος ἐν τῇ τυχούσῃ σφαίρᾳ ὁ αβγδ, ἐλάσσων, καὶ ζητείσθωσαν οἱ τούτου πόλοι. Ληφθήτωσαν δὴ τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῆς τοῦ αβγδ, δοθέντος κύκλου περιφερείας τὰ β, δὸς εἰπεῖν, καὶ δ. τῶν δὲ βαδ, βγδ, τόξων δίχα διαιρουμένων κατὰ τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, εὑρέθητω διὰ τῆς δευτέρας ὁ διὰ τῶν α, καὶ γ, διερχόμενος κύκλος, καὶ ἔστω οὗτος ὁ αεγζ, τῶν δὲ αεγ, αζγ, τόξων διαιρουμένων δίχα κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, τὰ αὐτὰ σημεῖα ε, καὶ ζ, πόλοι ἔσονται τοῦ αβγδ, κύ-

κύκλου. ἐπεὶ γὰρ τὰ αβ, αδ, τόξα ἴσα ἐστὶν, ὥσπερ καὶ τὰ γβ, γδ, πάντως γε κατὰ τὸ β΄: ἀξίωμα, τὰ αδγ, αβγ, ἴσα ἐστὶν, καὶ ὁ αεγζ, κύκλος δίχα τὸν αβγδ, τέμνει κύκλον. ὥστε κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ παρόντος ὁ αεγζ, διὰ τῶν πόλων τοῦ αβγδ, διέρχεται κύκλου. ἀλλὰ τὰ ζ, καὶ ε, ἐξ ἴσου τῶν α, καὶ γ, ἀφίστανται, ἐπεὶ τὰ αζ, ζγ, διαστήματα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ὥσπερ καὶ τὰ αε, εγ. τὰ ζ, ἄρα καὶ ε, πόλοι εἰσὶ τοῦ αβγδ, κύκλου, κατὰ τὸν ε΄: ὅρον τοῦ παρόντος. Theod. Sf. Lib. I. Fig. 17.

Ἔστω β΄: κύκλος ἐν σφαίρᾳ μέγιστος ὁ ηθκλ, καὶ ζητηθήτωσαν οἱ τούτου πόλοι. Ληφθήτωσαν, ὡς καὶ πρότερον, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ηθκλ, κύκλου δύο τυχόντα σημεῖα, φέρ᾽ εἰπεῖν, τὰ θ, καὶ λ, τῶν δὲ θηλ, θκλ, δίχα τεμνομένων, τοῦ μὲν κατὰ τὸ η, τοῦ δὲ κατὰ τὸ κ. δῆλον, ὅτι τὰ ηθκ, ηλκ, ἡμικύκλιά ἐστιν, ὧν ἑκάτερον δίχα τμηθήτω τὸ μὲν κατὰ τὸ μ, τὸ δὲ κατὰ τὸ ν. εἶτα κέντρῳ τῷ μ, ἢ τῷ ν, καὶ διαστήματι τῷ μη, ἢ μκ, ἴσα γάρ, γραφήτω ὁ ηξκο, οὗτινος ἑκάτερον τῶν ηξκ, ηοκ, τόξων δίχα τμηθήτω κατὰ τὰ ξ, καὶ ο, σημεῖα, καὶ τὰ ξ, ο, σημεῖα, πόλοι ἔσονται τοῦ αθκλ, κύκλου. ἐπεὶ γὰρ ὁ ηξκο, κύκλος, ὡς ἀπὸ κέντρου τοῦ μ, γέγραπται, πάντως γε τὸ μ, πόλος αὐτοῦ ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ο, διὰ τὰ αὐτὰ πόλος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ. ἀλλὰ τὸ μη, τεταρτημόριόν ἐστιν, ὥσπερ καὶ τὸ μκ, ἄρα ὁ ηξκο, κύκλος τεταρτημορίῳ ἀφίσταται τοῦ ἰδίου πόλου, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιγ΄: τοῦ παρόντος, μέγιστός ἐστιν. ἀλλ᾽ ὁ ηθκλ, κύκλος διὰ τῶν μ, καὶ ν, πόλων τοῦ ηξκο, κύκλου διέρχεται, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ παρόντος, καὶ ὁ ηξκο, διὰ τῶν πόλων τοῦ ηθκλ, διέρχεται. ἑκάτερον δὲ τῶν ζ, καὶ ο, ἐξ ἴσου τῶν η, καὶ κ, ἀφίσταται, ἄρα τὰ ξ, καὶ ο, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ ηθκλ, μεγίστου κύκλου, τοῦ δοθέντος ἄρα ἐν σφαίρᾳ κύκλου οἱ πόλοι εὕρηνται.

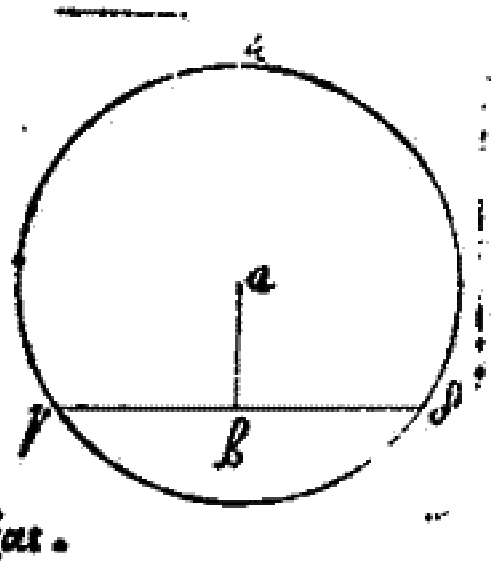


Πρότασις ΙΗ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ τῇ τυχούσῃ, ἧς κέντρον τὸ α, εὐθεῖα διὰ μὲν τοῦ κέντρου ἡ αβ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου δὲ ἡ γδ. καὶ τεμνέτω ἡ αβ, τὴν γδ, δίχα κατὰ τὸ β. λέγω, γω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. Ἐκβεβλήσθω γὰρ τὸ διὰ τῶν αβ, γδ, ἐπίπεδον, καὶ κοινὴν ποιήσει τομὴν μετὰ τῆς σφαίρας τὸν γδε, κύκλον κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος, καὶ ἐπεὶ ὁ γδε, κύκλος διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, μέγιστός ἐστι, καὶ τὸ α, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ γδε, κύκλου. Αὖθις ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, εὐθειῶν ἐν τῷ τοῦ γδε, κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ, καὶ ἡ μὲν αβ, διὰ τοῦ α, κέντρου τοῦ γδε, κύκλου διερχομένη τέμνει δίχα τὴν μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι τὴν γδ, δῆλον, ὅτι ἡ αβ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὴν αὐτὴν γδ. καὶ ἀνάπαλιν, κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ. Ἐὰν ἄρα ἐν σφαίρᾳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου, εὐθεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib.1. Fig. 18.



Τέλος τοῦ Πρώτου τῶν κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικῶν.