ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

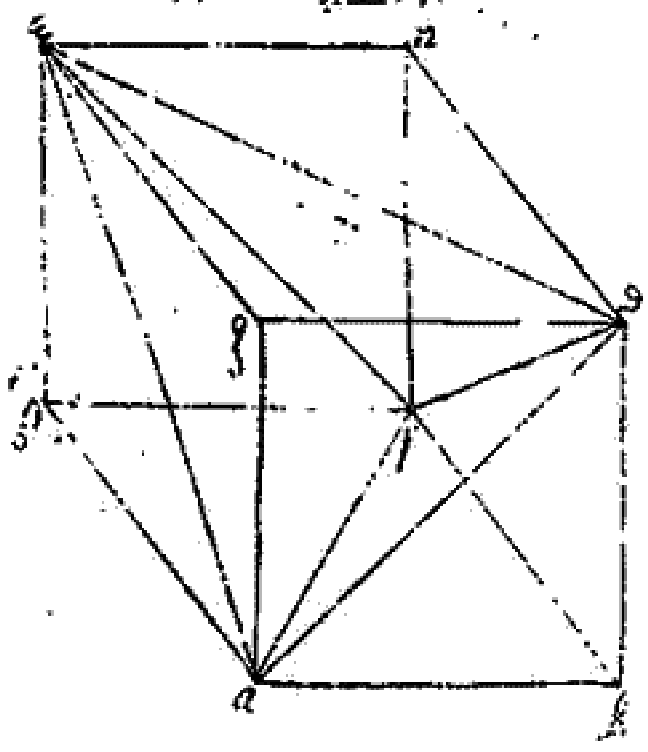
ΤΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΤΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ,

ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ,

Ὥς τισι δοκεῖ, ὡς δ' ἄλλοις, Ὑψικλέους Ἀλεξανδρέως περὶ τῶν πέντε σωμάτων δεύτερον.

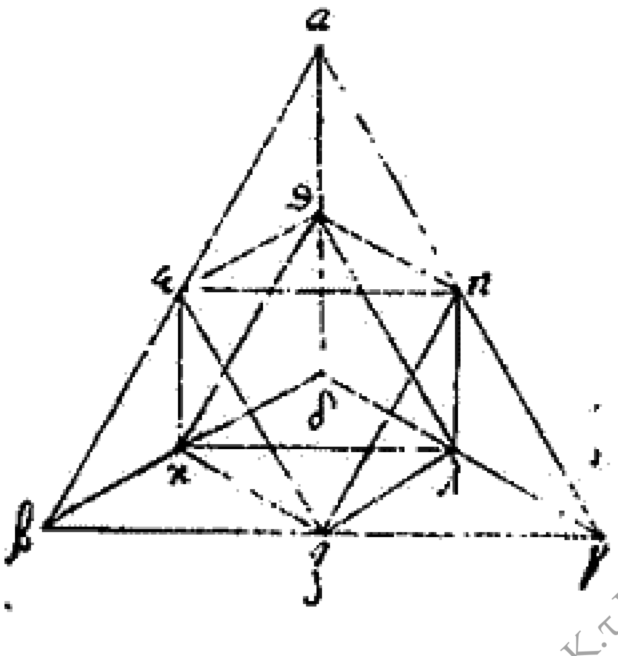
Eucl. lib. 15. Fig. 1.



Πρότασις Α': Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύβον πυραμίδα ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ αβγδεζηθ, εἰς ὃν δεῖ πυραμίδα ἐγγράψαι. Ἐπιζεύχθωσαν αἱ αγ, γε, αθ, εθ, θγ, φανερὸν δή, ὅτι τὰ αεγ, αθε, αθγ, γθε, τρίγωνα ἰσόπλευρά ἐστι, τετραγώνων γάρ εἰσι διάμετροι αἱ πλευραί, πυραμὶς ἄρα ἐστὶν ἡ αεγθ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα κύβον.



Πρότασις Β': Πρόβλημα.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

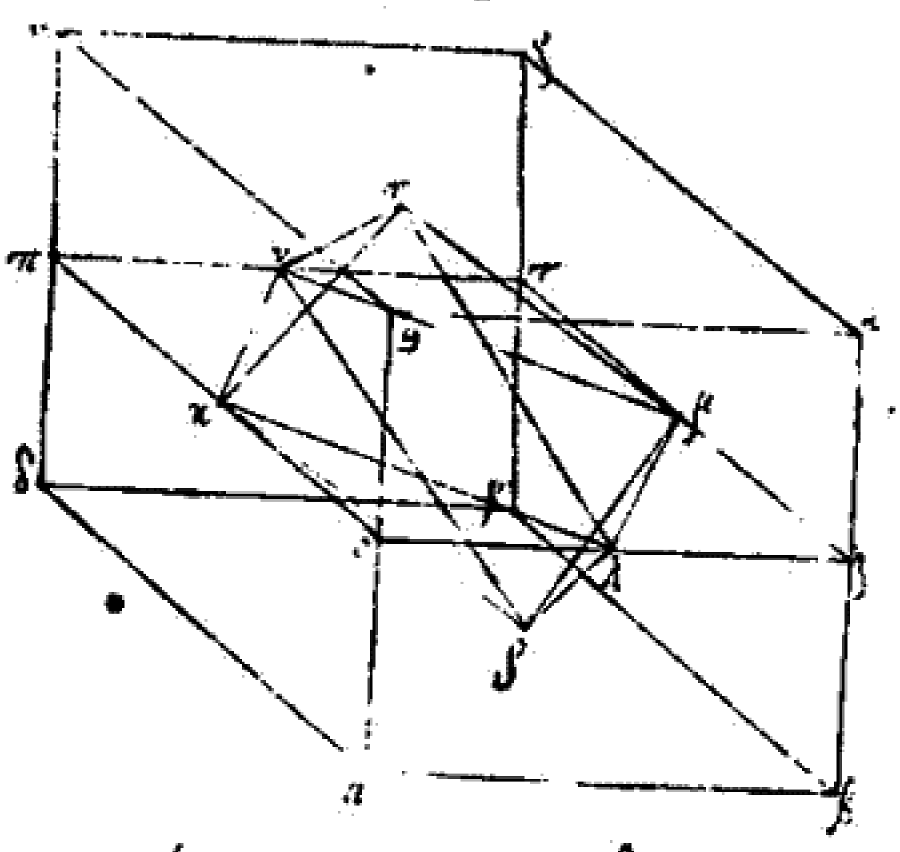
Ἔστω ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ἡ αβγδ, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκάστη τῶν αὐτῆς πλευρῶν τοῖς ε, ζ, η, θ, κ, λ, σημείοις, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ θκ, θλ, εζ, ζη, καὶ αἱ λοιπαί, καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, διπλῆ ἐστιν ἑκατέρας τῶν θκ, ηζ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ θκ, τῇ ηζ, καὶ παράλληλος. ὁμοίως καὶ ἡ θη, τῇ ζκ, ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ θκζη. Λέγω, καὶ ὀρθογώνιον, ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς κλ, κάθετοι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ εβζη, ζγεη, εζαη, θκζη. ὁμοίως δείξομεν καὶ τὰ παρὰ τὸ θκζη, τετράγωνα ἰσόπλευρα εἶναι, καὶ ὀρθογώνια.

Πρότασις Γ': Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύβον ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ αβγδεζηθ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν ἐφεστώτων τετραγώνων τὰ κ, λ, μ, ν. Λέγω, ὅτι τὸ κλμν, τετράγωνόν ἐστιν. Ἤχθω διὰ τῶν κ, λ, μ, ν, παραλληλόγραμμον τὸ ξοπτ· ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν, ἡ μὲν πο, τῆς κο, ἡ δὲ ξο, τῆς ολ, ἴση ἐστὶν ἡ οπ, τῇ ξο, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ οκ, τῇ ολ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κλ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ολ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς μλ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κλ, τῷ ἀπὸ τῆς μλ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ κν, νμ, τῆς πν, ντ, διπλάσιαι, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ κλμν, καὶ φανερὸν ὅτι καὶ ὀρθογώνιον, εἰλήφθω τῶν βδ, εη, δύο τετραγώνων τὰ κέντρα, τὰ ρ, σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ρλ, ρμ, ρκ, ρν, σκ, σλ, σμ, σν, καὶ φανερὸν, ὅτι ἰσόπλευρά ἐστι τὰ ποιοῦντα τὸ ὀκτάεδρον τρίγωνα, τῷ γὰρ αὐτῷ λόγῳ ἀποδείξομεν καὶ ταῦτα.

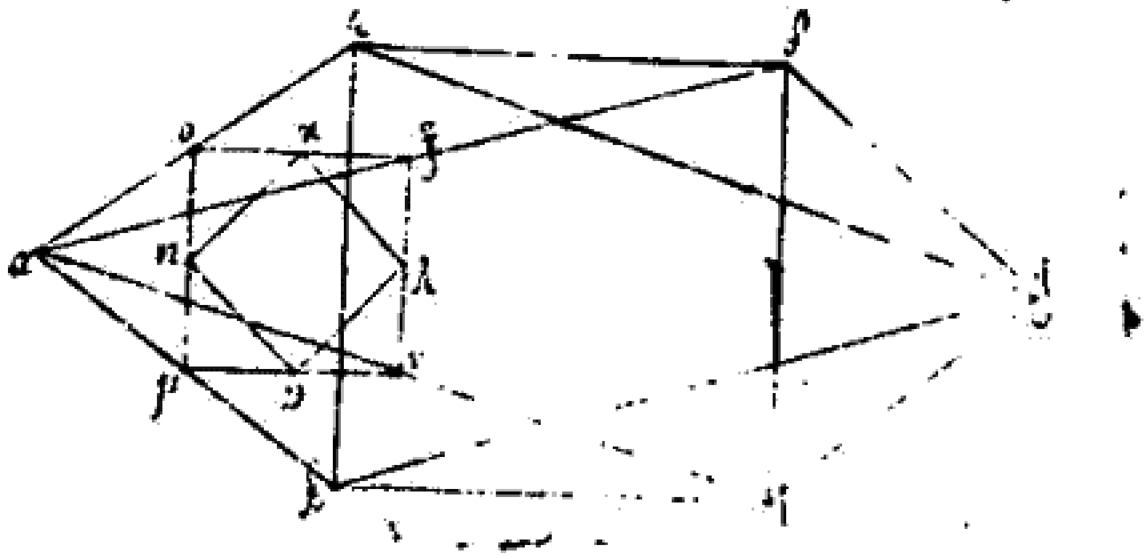
Eucl. Lib. 15. Fig. 2.



Πρότ: Δ': Πρόβ:

Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι.

Εἰλήφθω τῶν περὶ τὰ αβγ, αγδ, αβε, αδε, τρίγωνα κύκλων τὰ κέντρα τὰ η, θ, κ, λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηθ, ηκ, λκ, λθ. Λέγω, ὅτι τὸ ηθκλ, τετράγωνόν ἐστιν. Ἤχθωσαν διὰ τῶν η, θ, κ, λ, ταῖς βγ, βε, γδ, δε, παράλληλοι αἱ μν, νξ, ξο, ομ. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ αβγ, τρίγωνον, ἡ ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ θ, κέντρον τοῦ περὶ τὸ αβγ, τρίγωνον κύκλου, δίχα τέμνει τὴν πρὸς τῷ α, τοῦ αβγ, τριγώνου, ἴση ἄρα ἡ θν, τῇ μθ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ ἡ



μη,

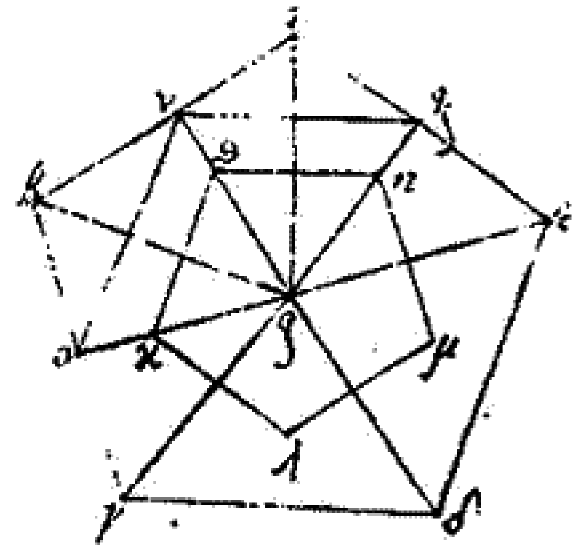
μὴ, τῇ ηο, ἐπειδὴ δὲ ἡ μν, τῇ μο, καὶ τῇ οξ, ἐστὶν ἴση. ἴση ἄρα καὶ ἡ νθ, τῇ μη, καὶ ἡ θμ, τῇ ηο, καὶ ἡ μη, τῇ οκ, αἱ δὲ ὑπὸ θμη, καὶ ηοκ, ὀρθαί, ἐξ οὖν φανερὸν, ὅτι ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ ηκ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ λοιπαί. Ἐπεὶ οὖν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ηθκλ, ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἐστὶ, καὶ ἐπεὶ ἥμισύ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ μηθ, οηκ, ὀρθῆς, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ θηκ, ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαί, τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ηθκλ. δυνατὸν δὲ τῷ ἐξ ἀρχῆς λαμβάνοντι τὰ ηθκλ, κέντρα, καὶ παραλλήλους ἀγαγόντι τὰς μν, νξ, ξο, ομ, ἐπιζεῦξαι τὰς ηθ, θλ, λκ, κη, καὶ εἰπεῖν τὸ ηθκλ, τετράγωνον. ἐὰν δὴ λάβωμεν καὶ τῶν λοιπῶν τριγώνων τὰ κέντρα, καὶ ἐπιζεύξωμεν καὶ αὐτὰ, δείξομεν τὰ λοιπὰ τετράγωνα, καὶ ἕξομεν εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Ε΄. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι.

Ἐκκείσθω πεντάγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου τὸ αβγδε, καὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν περὶ τὰ αζε, αζβ, βζγ, ζγδ, δζε, τρίγωνα, τὰ η, θ, κ, λ, μ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ηθ, θκ, κλ, λμ, μη, καὶ πάλιν ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ζη, ζθ, ζκ, ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ ξ, ν, ο, δίχα δὴ τμηθήσονται αἱ εα, αβ, βγ, τοῖς ξ, ν, ο, σημείοις, καὶ ὡς ἡ νξ, πρὸς τὴν νο, οὕτως ἡ ηθ, πρὸς τὴν θκ, ἴση ἄρα ἡ θν, κο. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ ηθκλμ, πενταγώνου πλευραὶ ἴσαι δειχθήσονται. Λέγω, ὅτι καὶ ἰσογώνια. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ νξ, νο, περὶ δύο τὰς ηθ, θκ. ἴσας γωνίας περιέχουσι, καὶ τὰ λοιπὰ φανερόν. Νενοήσθω ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὸ τοῦ αβγδεζ, πενταγώνου ἐπίπεδον κάθετος ἠγμένη, ἥτις πεσεῖται ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου. ἐὰν δὴ ἀπὸ τοῦ ν, σημείου, καθ᾽ ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ ζ, κάθετον ἐπιζεύξωμεν, καὶ διὰ τοῦ θ, παράλληλον αὐτῇ ἀγάγωμεν, φανερὸν ὅτι συμβάλλει τῇ ἀπὸ τοῦ ζ, καθέτῳ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ε, παράλληλος ὀρθὴν γωνίαν περιέξει, μετὰ τῆς ἀπὸ τοῦ ζ, καθέτου. Πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τῶν ζη, ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ αβγδε, πεντάγωνον κύκλου, καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ θ, τῇ ἀπὸ τοῦ η, ἐπιζευγνυμένη ὀρθὴ, ᾗ περιέξει μετὰ τῆς αὐτῆς, ἐξ οὖν φανερὸν, ὅτι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ηθκλμ, πεντάγωνον. Δεῖ εἰδέναι ἡμᾶς, ὅτι ἐάν τις ἐρῇ ἡμῖν, πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ εἰκοσάεδρον, φήσομεν οὕτως, φανερὸν, ὅτι ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιέχεται, καὶ ὅτι ἕκαστον τρίγωνον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται. δεῖ οὖν ἡμᾶς πολλαπλασιάσαι τὰ εἴκοσι τρίγωνα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώ-

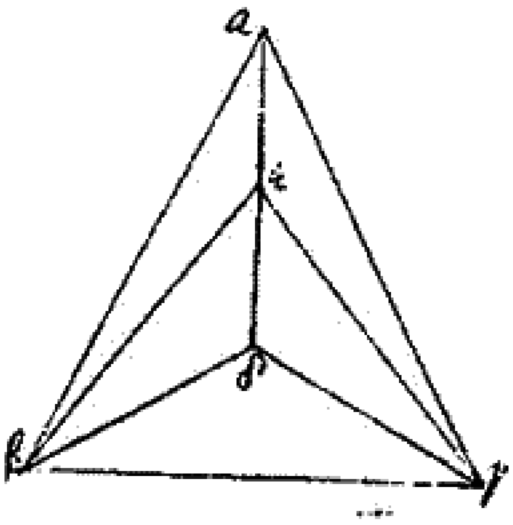
Eucl. Lib. 15. Fig. 3.



γώνου, γίνεται δὲ ἑξήκοντα, ὧν ἥμισυ γίγνεται τριάκοντα. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ τοῦ δωδεκαέδρου. Πάλιν ἐπεὶ δώδεκα πεντάγωνα περιέχουσι τὸ δωδεκάεδρον, πάλιν δὲ ἕκαστον πεντάγωνον ἔχει πέντε εὐθείας, ποιοῦμεν δωδεκάκις πέντε, γίνονται ἑξήκοντα. πάλιν τὸ ἥμισυ γίνεται τριάκοντα, διὰ τί δὲ τὸ ἥμισυ ποιοῦμεν; ἐπεὶ ἑκάστη πλευρὰ, κἄν τε ᾖ τρίγωνον, ἢ πεντάγωνον, ἢ τετράγωνον (ὡς ἐπὶ κύβου ἐκ δευτέρου λαμβάνεται.) ὁμοίως δὲ τῇ αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐπὶ κύβου, καὶ πυραμίδος, καὶ ὀκταέδρου τὰ αὐτὰ ποιήσας εὑρήσεις τὰς πλευράς. Εἰ δὲ βουληθείης πάλιν ἑκάστου τῶν πέντε σχημάτων εὑρεῖν τὰς γωνίας, πάλιν τὰ αὐτὰ ποιήσας, μέριζε παρὰ τὰ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα μίαν γωνίαν τοῦ στερεοῦ. οἷον ἐπεὶ τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου γωνίαν περιέχουσι πέντε τρίγωνα, μέριζε παρὰ τὰ πέντε, γίνονται δώδεκα γωνίαι τοῦ εἰκοσαέδρου, ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου τρία πεντάγωνα περιέχουσι τὴν γωνίαν, μέρισον παρὰ τὰ τρία, καὶ ἕξεις εἴκοσι γωνίας ὅσας τοῦ δωδεκαέδρου. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εὑρήσεις τὰς γωνίας. ἐζητήθη πῶς ἑκάστου τῶν πέντε στερεῶν σχημάτων ἑνὸς ἐπιπέδου τῶν περιεχόντων ὁποιουοῦν δοθέντος, εὑρητέα καὶ ἡ κλίσις, ἐν ᾗ κέκλιται πρὸς ἄλληλα τὰ περιέχοντα ἐπίπεδα ἕκαστον τῶν σχημάτων. Ἡ δὲ εὕρεσις ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον. Ὅτι μὲν ἐπὶ τοῦ κύβου κατ᾽ ὀρθὴν τέμνει τὴν γωνίαν τὰ περιέχοντα αὐτὸν ἐπίπεδα ἄλληλα, φανερόν. ἐπὶ δὲ τῆς πυραμίδος ἐκτεθέντος ἑνὸς τριγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν καθέτῳ ἀγομένῃ, περιφέρειαι γραφεῖσαι, τεμνέτωσαν ἀλλήλας, καὶ αἱ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα ἐπιπέδων, ἐπὶ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος τετραγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς διαγωνίου, διαστήματι δ᾽ ὁμοίως τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γεγράφθωσαν περιφέρειαι, καὶ πάλιν αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως, ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπιζεύχθω ἡ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσα εὐθεῖα, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γραφεισῶν περιφερειῶν, αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι περιέξουσι τὴν λείπουσαν, ὁμοίως εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. Ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, ἐκτεθέντος ἑνὸς πενταγώνου ἐπιζευχθείσης, ὁμοίως τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης εὐθείας, κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀγομένῃ καθέτῳ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου γεγράφθωσαν περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι, ὁμοίως περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων τοῦ δωδεκαέδρου. Οὕτω μὲν οὖν ὁ εἰρημένος εὐκλεέστατος ἀνὴρ τὸν περὶ τῶν εἰρημένων ἀποδέδωκε λόγον, σαφῶς ἐφ᾽ ἑκάστῳ φαινομέ.

νομένης αὐτῷ τῆς ἀποδείξεως, ἐπὶ δὲ τὸ πρόδηλον γενέσθαι τὴν ἐν αὐτοῖς ἀποδεικτικὴν θεωρίαν, τὸν λόγον ἐφ' ἑκάστου σαφηνιστέον, καὶ πρότερον ἐπὶ τῆς πυραμίδος. Νοείσθω πυραμὶς ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχομένη, ἡ αβγδ, τοῦ αβγ, βάσεως νοουμένου, κορυφῆς δὲ τοῦ δ. καὶ τμηθείσης τῆς αδ, πλευρᾶς δίχα κατὰ τὸ ε, ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε, εγ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρά ἐστι τὰ αδβ, αδγ, τρίγωνα, καὶ δίχα τέτμηται ἡ αδ, αἱ βε, γε, ἄρα κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὴν αδ. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ βεγ, γωνία ὀξεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς αε, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αε, εγ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δε, λόγον ἔχει, ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, καὶ ἔστιν ἴση ἡ γε, τῇ εβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βγ, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν βε, εγ, ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ βεγ. Ἐπεὶ οὖν δύο ἐπιπέδων τῶν αβδ, αδγ, κοινὴ τομή ἐστιν ἡ αδ, καὶ ταύτῃ εἰσὶ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαι ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμέναι αἱ βε, εγ, καὶ ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν, ἡ ὑπὸ βεγ, ἄρα γωνία ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ἐστί, καὶ ἔστι δεδομένη, δέδοται γὰρ ἡ βγ, πλευρὰ οὖσα τοῦ τριγώνου, καὶ ἑκατέρα τῶν εβ, εγ, κάθετος οὖσα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, κέντροις τοίνυν τοῖς βγ, τουτέστι τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γραφόμεναι περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ ε, σημεῖον, καὶ αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ βγ, ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. τοῦτο δ' ἦν τὸ εἰρημένον. καὶ ὅτι μὲν κέντροις τοῖς βγ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφόμενοι κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους, φανερόν, ἑκατέρα γὰρ τῶν βε, εγ, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς βγ, οἱ δὲ κέντροις τοῖς βγ, διαστήματι δὲ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βγ, γραφόμενοι κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, εἰδ' ἐλάττων ᾖ, οὐδὲ ἐφάπτονται, οὐδὲ τέμνουσιν, εἰδὲ μείζων πάντως τέμνουσι, καὶ οὕτως ὁ περὶ τῆς πυραμίδος σαφής τε καὶ ἀκόλουθος ταῖς ἀποδείξεσι φαίνεται λόγος.

Eucl. Lib. 15. Fig. 4.

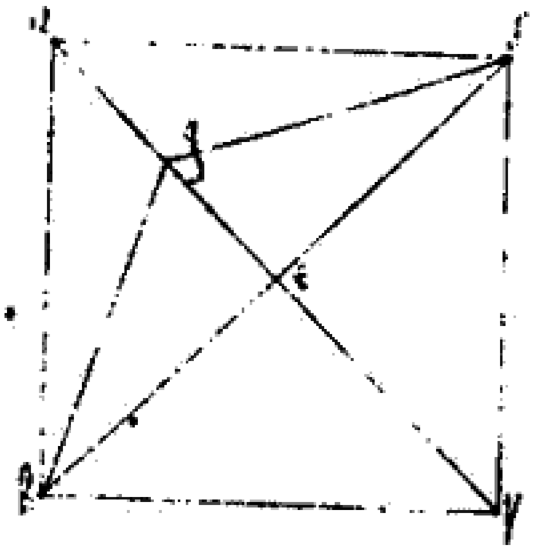


Συνεστάτω πάλιν ἐπὶ τετραγώνου τοῦ αβγδ, πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ ε, καὶ τὰ περιέχοντα αὐτὴν δίχα τῆς βάσεως τρίγωνα ἰσόπλευρα. ἔσται δὲ ἡ αβγδε, πυραμὶς ἥμισυ ὀκταέδρου. Τετμήσθω μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ αε, δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ, δζ, ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ βζ, δζ, καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν αε. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ βζδ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστιν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βδ, καὶ ἐπεὶ τετράγωνόν ἐστι τὸ αγ, διάμετρος δὲ ἡ βδ, τὸ ἀπὸ τῆς βδ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ, λόγον ἔχει, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου εἴρηται, ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βδ, ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ, λόγον ἔχει, ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία, ἴση δὲ ἡ δζ, τῇ ζβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δβ, τῶν ἀπὸ τῶν βζ, ζδ, μεῖζόν ἐστιν, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ

βζδ,

βζδ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπιπέδων τῶν αβε, αδε, τεμνόντων ἄλληλα, κοινὴ τομή ἐστιν ἡ αε, πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμέναι εἰσὶν, αἱ δὲ βζ, ζδ, περιέχουσαι ἀμβλεῖαν, ἡ ὑπὸ βζδ, ἄρα γωνία λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν αβε, αδε, ἐπιπέδων. ἐὰν ἄρα δοθῇ ἡ ὑπὸ βζδ, δέδοται καὶ ἡ εἰρημένη κλίσις. Ἐπεὶ οὖν δέδοται τὸ τρίγωνον τοῦ ὀκταέδρου, καὶ μία πλευρά ἐστι τοῦ ὀκταέδρου ἡ αδ, καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀναγέγραπται τὸ αγ, δέδοται καὶ ἡ βδ, διάμετρος οὖσα τοῦ τετραγώνου, ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ βζ, ζδ, κάθετος τοῦ τριγώνου. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βζε, γωνία δέδοται. ἀναγραφέντος ἄρα τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, ὡς τοῦ αγ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς διαμέτρου, ὡς τῆς βδ, ἐὰν κέντροις τοῖς βδ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλους ἐγγράψωμεν, τέμνουσιν ἀλλήλους κατὰ τὸ ζ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέχουσι τὴν κλίσιν τὴν ὑπὸ βζδ, ἥτις ἐστὶν ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. καὶ ἐνταῦθα δὲ σαφὲς μὲν, ὡς ἑκατέρα τῶν βζ, ζδ, ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς βδ, μείζων, καὶ διὰ τοῦτο ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀνάγκη τέμνειν τοὺς κύκλους ἀλλήλους. καὶ ἐκ τῆς ἀποδείξεως δὲ δῆλον γέγονεν, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δζ, δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία, τῆς δὲ ἡμισείας τῆς βδ, δυνάμει τετραπλασία ἐστὶν, ὥστε διὰ τοῦτο μείζονα γίνεσθαι ἑκατέραν τῶν βζ, ζδ, τῆς ἡμισείας τῆς βδ, καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ ὀκταέδρου.

Eucl. Lib. 15. Fig. 5.

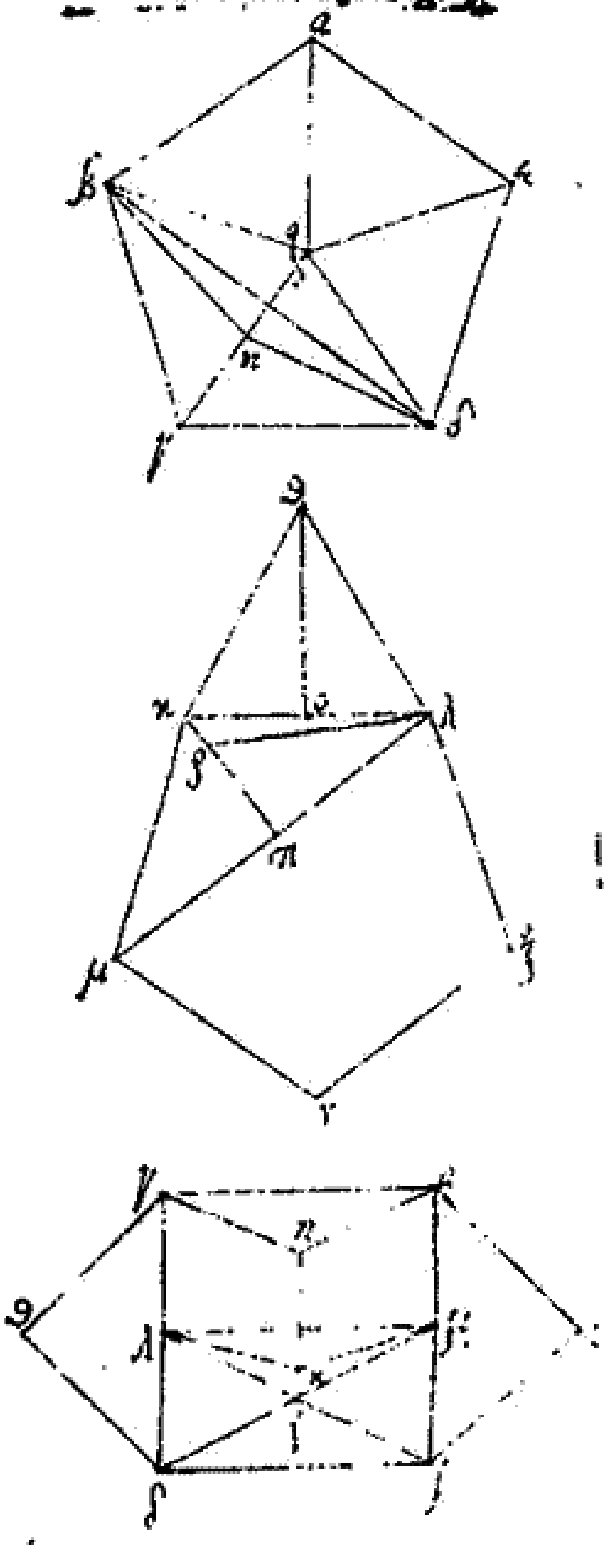


Ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου νενοήσθω πεντάγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβγδε, ἐπὶ δὲ τούτου πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ ζ, ὥστε τὰ περιέχοντα αὐτὴν τρίγωνα ἰσόπλευρα εἶναι. ἔστω δὴ ἡ αβγδεζ, πυραμὶς μὲν εἰκοσαέδρου σχήματος, τετμήσθω δὲ μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ ζγ, δίχα κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βη, ηδ, ἴσαι τε οὖσαι καὶ κάθετοι γινόμεναι ἐπὶ τὴν ζγ. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ βηδ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτόθι φανερόν. Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ βδ, ἀμβλεῖαν μὲν ὑποτείνει τὴν ὑπὸ βγδ, τοῦ πενταγώνου γωνίαν, ταύτης δὲ μείζων ἡ ὑπὸ βηδ, ἐλάττονες γὰρ αἱ βη, δη, τῶν βγ, γδ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρὸ τούτου, ὅτι ἡ ὑπὸ βηδ, γωνία ἡ λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο τῆς κλίσεως τῶν βζγ, γζδ, τριγώνων, ταύτης δοθείσης δεδομένη ἔσται καὶ ἡ κλίσις τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. ἀπὸ γὰρ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς τῆς βδ, δεδομένης. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν βη, ηδ, καθέτων, τῶν τριγώνων, δέδοται καὶ ἡ ὑπὸ βηδ. εἰ γὰρ κέντροις τοῖς πέρασι τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου, ὡς τῆς βδ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, κύκλοι γραφῶσι, τέμνουσιν ἀλλήλους, ὡς κατὰ τὸ η, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ η, ἐπὶ

τὰ

τὰ β δ, ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως, καὶ ἐνταῦθα δὲ ἐκ μὲν τῆς καταγραφῆς δῆλόν ἐστιν, ὅτι ἑκατέρα τῶν β η, η δ, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς β δ, εἶναι δὲ, καὶ ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀποδειχθῆναι. Νενοήσθω χωρὶς ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲν τὸ θ κ λ, ἀπὸ δὲ τῆς κ λ, πεντάγωνον ἀναγεγράφθω τὸ κ μ ν ξ λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μ λ, καὶ ἤχθω κάθετος τοῦ θ κ λ, τριγώνου ἡ θ ο. Λέγω, ὅτι ἡ θ ο, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μ λ, ὑποτεινούσης τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. Ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ κ, ἐπὶ τὴν μ λ, καθέτου τῆς κ π. Ἐπεὶ ἡ ὑπὸ κ λ π, μείζων ἐστὶ τρίτου ὀρθῆς, τουτέστι τῆς ὑπὸ κ θ ο. Συνεστάτω τῇ ὑπὸ κ θ ο, ἴση ἡ ὑπὸ π λ ρ, ἡ ἄρα π λ, κάθετός ἐστιν ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ ρ λ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ρ λ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λ π, λόγον ἔχει, ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, μείζων δὲ ἡ κ λ, τῆς λ ρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κ λ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λ π, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὁ τέσσαρα πρὸς τὸν τρία, ἔχει δὲ καὶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ ο, ὃν ὁ τέσσαρα πρὸς τὸν τρία, ἡ ἄρα κ λ, πρὸς τὴν λ π, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν θ ο, μείζων ἄρα ἡ θ ο, τῆς λ π.

Eucl. lib. 13. Fig. 6.



Ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου οὕτω. Νενοήσθω ἐν τετράγωνον τοῦ κύβου, ἀφ' οὗ τὸ δωδεκάεδρον ἀναγράφεται, τὸ α β γ δ, καὶ δύο ἐπίπεδα τοῦ δωδεκαέδρου, τὰ α ε β ζ η, η γ θ δ ζ. Λέγω δὴ ἐνταῦθα δεδομένην εἶναι τὴν κλίσιν τῶν δύο πενταγώνων. Τετμήσθω ἡ ζ η, δίχα κατὰ τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, τῇ ζ η, πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων αἱ κ λ, κ μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μ λ. Λέγω δὴ πρῶτον, ὅτι ἡ ὑπὸ μ κ λ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστι, δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ιγ': βιβλίῳ τῶν στοιχείων, ἤτοι τῆς στάσεως τοῦ δωδεκαέδρου, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κ, κάθετος ἀγομένη, ἐπὶ τὸ α β γ δ, τετράγωνον ἡμίσειά ἐστι τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου. ὥστε ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μ λ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ὑπὸ μ κ λ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. συναποδέδεικται δὲ ἐν τῷ αὐτῷ θεωρήματι, ὅτι καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς κ λ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας

τῆς

τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, καὶ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου· ὥστε τὴν αὐτὴν κλ, καὶ τὴν κμ, ἴσας οὔσας, μείζονας εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς μλ, τῆς ἄρα ὑπὸ μκλ, γωνίας δοθείσης ἡ λείπουσα εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἔγκλισις ἔσται τῶν ἐπιπέδων, δηλονότι δεδομένη. Ἐπεὶ οὖν ἡ πλευρὰ τοῦ αβγδ, πέρας: ὑποτείνουσά ἐστι τὰς δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου, δέδοται δὲ τὸ πεντάγωνον, δέδοται ἄρα ἡ μλ, δέδοται δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν μκ καὶ κλ, κάθετοι γάρ εἰσιν ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς αβ, ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης, ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου, ὡς τὴν ζη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ λκμ, ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως· καλῶς ἄρα ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς εἶπεν, ὡς χρὴ δοθέντος τοῦ πενταγώνου, ἐπιζεῦξαι τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ δύο πλευράς, ἥτις ἴση γίνεται τῇ πλευρᾷ τοῦ κύβου, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς διχοτομίας ἀγομένῃ καθέτῳ, ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πενταγώνου πλευράν, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, αἱ κλ, κμ, γραφεῖσαι περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ τῆς συμβολῆς τῶν περιφερειῶν σημείου, ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζεῦξαι εὐθείας περιεχούσας τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων, ὅτι γὰρ ἡ κλ, κάθετος μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μλ, εἴρηται, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις συναποδέδεικται τοῦτο.

Τέλος τοῦ Δεκάτου πέμπτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΣΥ'ΝΤΟΜΟΣ ἙΡΜΗΝΕΙ'Α

ΠΕΡΙ' ΣΦΑΙΡΙΚΩ'Ν ΖΗΤΗΜΑ'ΤΩΝ

ΚΑΤΑ' ΘΕΟΔΟ'ΣΙΟΝ ΤΟ'Ν ΤΡΙΠΟΛΙ'ΤΗΝ.

ΒΙΒΛΙ'ΟΝ ΠΡΩ'ΤΟΝ

ΠΡΟΟΙ'ΜΙΟΝ.

Ἐπείπερ δύο τῆς Ἐπιφανείας τὰ εἴδη, ἐπίπεδός φημι καὶ σφαιρική, ὡς ἐν τῇ τῶν ὅρων Ἑρμηνείᾳ τοῦ α΄: τῶν τοῦ στοιχειωτοῦ εἴρηται βιβλίων, καὶ ἡ μὲν ἐπίπεδος βάσις ἐστὶ καὶ ὑποκείμενον τῶν ἐπιπέδων πάντων σχημάτων, ἧς ἄνευ οὐδὲν τῶν τοιούτων ὑφίστασθαι δύναται, καὶ τῇ αἰσθήσει ὑποπίπτειν, ἡ δὲ σφαιρικὴ τῶν σφαιρικῶν. πρὸς γνῶσιν μὲν τῶν ἐν ἐπιπέδοις προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων ἱκανά εἰσι τὰ τοῦ Εὐκλ: ἓξ βιβλία, ὡς εἰς λόγον στοιχείων τούτοις ὅτι μάλιστα συμβάλλοντα, καὶ τὰ ἐν τῷ α΄: τμήματι τῆς Γεωμετρίας. πρὸς δὲ τὴν τῶν σφαιρικῶν κατάληψιν, εἰ καὶ πολλοὶ τῶν πάλαι Ἑλλήνων ἐμμεθόδως στοιχειωδῆ τινα θεωρήματα καὶ προβλήματα ἐξέθεντο, καὶ πληρεστάτην περὶ αὐτῶν πεποιήκασιν Ἑρμηνείαν, ὧν εἷς καὶ Θεοδόσιος ὁ φιλόσοφος. Ὁ μακρὸς μέντοι χρόνος, καὶ αἱ τῶν πραγμάτων μέγισται μεταβολαί, καὶ αὕτη ἡ τοῦ γένους τοιαύτη κατάπτωσις, καὶ ταῦτα πάντα σὺν τοῖς ἄλλοις, κατηναλώσαντό τε καὶ ἐξηφάνισαν, ὡς μηδ᾽ εἰ ὅλως ποτὲ γεγόνασι πιστεύεσθαι. Ἀνὴρ δέ τις τῶν ἐλλογίμων, καὶ τοῦ ἱεροῦ τῶν καθ᾽ ἡμᾶς καταλόγου ἐκ τῆς αὐτῆς ὁρμώμενος, ἐκ γε καὶ τὴν Ἑλλάδα φωνὴν ἐξέμαθεν, εἰς Ἑνετίας παρεγένετο, κἀκεῖ διὰ τῆς λατινίδος ἀκριβῶς τὴν μαθηματικὴν ἐκδιδαχθεὶς ἐπιστήμην, καὶ πολλὴν περὶ αὐτὴν τὴν σπουδὴν καταβαλλόμενος, πρὸς τοῖς ἄλλοις αὐτοῦ φιλοπονήμασι, καὶ τὰ παρὰ Θεοδοσίου περὶ σφαιρικῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων τρία βιβλία ἐκ τῆς Λατινίδος εἰς τὴν Ἑλλάδα μετήνεγκεν, ἐξ ἀλλοτρίων τὰ οἰκεῖα ἐρανισάμενος. Ἐπεὶ δὲ μεγίστης ἔχεται δυσχερείας καὶ ἀσαφείᾳ πολλῇ ἐπισκιάζεται, ἔδοξέ μοι καὶ ταῦτα ἀνακαλύψαι τε καὶ εἰς φῶς ἀγαγεῖν, ὥσπερ δὴ καὶ τ᾽ ἄλλα τῶν αὐτοῦ φιλοπονημάτων, καὶ τοῦτο γέ τοι πρὸς χάριν τῶν φιλομαθῶν, καὶ γνησίων τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἐραστῶν. Τῇ γὰρ Ἀστρονομίᾳ, καὶ ἄλλοις τισί, περί τε τῆς οὐρανίου καὶ ἐπιγείου καταγινομένοις σφαίρας, ἡ τούτων προθεωρία οὐχ ἧττον ἀναγκαία, ἢ τοῖς ἄλλοις τὰ τοῦ Εὐκλ: στοιχεῖα,

χεῖα. ἡμεῖς οὖν καὶ περὶ τούτων τὸ δυνατὸν προβαλλόμεθα πόνον πρὸς ἀκριβῆ ἑκάστου τῶν ἐν αὐτοῖς προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων ἀνάπτυξιν, τὴν ὑπεροχὴν ἑκατέρου, τοῦ τε γρυφώδους τρόπου, καὶ οἱονεὶ συνεσφιγμένου, καὶ αἰνιγματώδους συντομίας χάριν, καὶ τοῦ λίαν ἀνειμένου τε καὶ ἐφαπλωμένου ἀποφεύγοντες, καὶ μέσην τινὰ τὴν ὁδὸν βαδίζοντες. ὅσοι δὲ τούτων ἐρασταὶ ἀσμενέως καὶ ταῦτα ὀφείλουσιν ἀποδέχεσθαι, καὶ τὴν δυνατὴν περὶ αὐτῶν καταβάλλεσθαι σπουδήν, ὁ γὰρ ἐν αὐτοῖς ἀκριβῶς προγυμνασθεὶς, εὐχερέστερον δυνήσεται τῶν ἄλλων ἀντιλαμβάνεσθαι, ὅσα τῶν ἐν σφαίρᾳ ἁπλῶς θεωρουμένων προβάλλονται.

Οἱ Ὅροι.

Α'. Σφαῖρά ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἅπασαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τῆς σφαίρας κειμένων ἴσαι εἰσί.

Β'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας, τὸ αὐτὸ σημεῖον καλεῖται.

Γ'. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἠγμένη, καὶ περατουμένη, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περὶ ἣν ἠρεμοῦσαν ἡ σφαῖρα περιφέρεσθαι δύναται.

Δ'. Πόλοι δὲ τῆς σφαίρας εἰσὶ τὰ τοῦ ἄξονος πέρατα.

Ε'. Πόλοι δὲ κύκλου ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κείμενον τῆς σφαίρας, ἀφ' οὗ πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ϛ'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένοι ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφίστανται, ὅτε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι.

Ζ'. Κύκλοι μέγιστοί εἰσιν ἐν σφαίρᾳ, οἱ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχόμενοι καὶ δίχα τὴν σφαῖραν τέμνοντες.

Η'. Κύκλοι ἐλάσσονές εἰσιν, οἱ μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενοι τῆς σφαίρας, καὶ εἰς δύο ἄνισα τὴν σφαῖραν τέμνοντες.

Θ'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἐξ ἴσου τῶν οἰκείων ἀφιστάμενοι πόλων, καὶ ὧν ἐπὶ τῆς περιφερείας αἱ ἀπὸ τοῦ πόλου ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσί, μείζων δὲ ὁ μᾶλλον τοῦ οἰκείου ἀφιστάμενος πόλου.

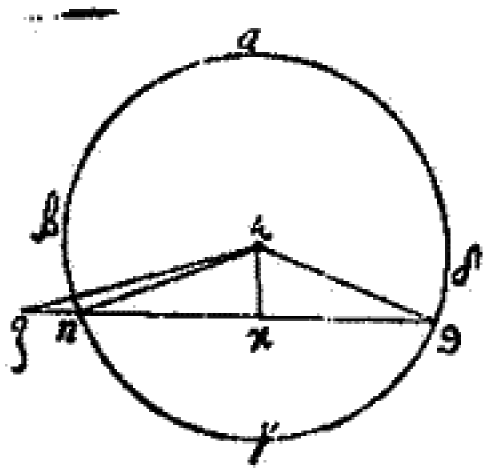
Πρό-

Πρότασις Α′: Θεώρημα.

Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένῳ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀχθῇ, ἐντὸς πεσεῖται τῆς σφαίρας.

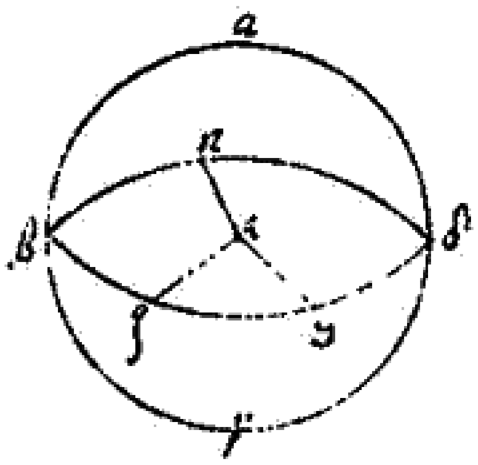
Τμηθήτω σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, τῷ τυχόντι ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένη κάθετος ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας. εἰ γὰρ μὴ, πιπτέτω ἐκτὸς, ὡς ἡ εζ, συμβάλλουσα τῷ τέμνοντι τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ ζ. διήχθω γὰρ διὰ τοῦ ζ, ἡ ζηθ, εὐθεῖα τέμνουσα τὴν σφαῖραν κατὰ τὰ η, καὶ θ. καὶ τῆς ηθ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ κ, ἐπεζεύχθω ἡ ηε, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸν α: ὅρον τοῦ παρ: αἱ εη, εθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ηκ, τῇ κθ, ἴση κατὰ τὴν κατασκευὴν, τῶν ἄρα εηκ, εθκ, τριγώνων αἱ εη, ηκ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς εθ, θκ, κοινὴ δὲ ἡ εκ, πάντως γε καὶ αἱ γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι κατὰ τὴν η: τοῦ α: τοῦ στοιχειωτοῦ, ὥστε ἡ ὑπὸ εκη, ἴση ἐστι τῇ ὑπὸ εκθ, ἔστι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ ἡ ὑπὸ εζκ, ὀρθὴ, ἄρα αἱ δύο τοῦ εζκ, τριγ: γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν ιζ: τοῦ αὐτοῦ, οὐκ ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται, ἀλλ' ἐντὸς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 1.

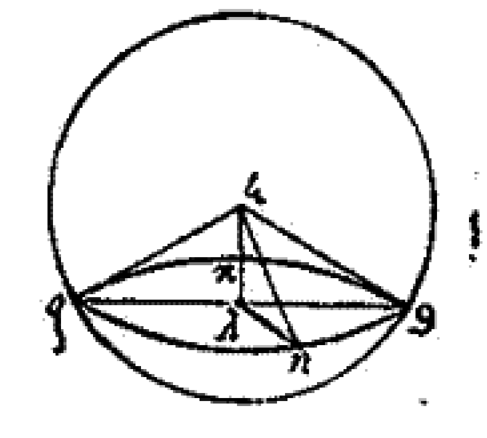


Πρότασις Β′: Θεώρημα.

Ἐὰν σφαῖρα οἱῳδήποτε τμηθῇ ἐπιπέδῳ, ἡ κοινὴ τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου κύκλος ἐστί.



Τμηθήτω σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, ἐπιπέδῳ τῷ τυχόντι, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῆς τε αβγδ, σφαίρας καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου τὸ βζδη, σχῆμα. Λέγω δὴ τὸ βζδη, κύκλον εἶναι. ἐπεὶ δὲ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἢ διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται τῆς σφαίρας, ἢ ἐκτὸς τοῦ κέντρου, κείσθω α: διὰ τοῦ κέντρου διέρχεσθαι, ὡς τὸ βζδη. ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ε, ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι ἐπὶ τῆς βζδη, κοινῆς τομῆς, αἱ εζ, εθ, εη, κατὰ γοῦν τὸν α: ὅρον τοῦ παρόντος αἱ εζ, εη, εθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥστε κατὰ τὸν ιε: ὅρον τοῦ α: τοῦ στοιχ: καὶ τὴν θ′: τοῦ γ′: τοῦ αὐτοῦ ἡ βζδη, κοινὴ τομὴ, κύκλος ἐστι.



Κείσθω β′: διέρχεσθαι τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω κοινὴ αὐτῆ τε καὶ τῆς σφαίρας τομὴ τὸ ζηθκ, σχῆμα, λέγω τοῦτο, κύκλον εἶναι. πιπτέτω γὰρ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου κάθετος ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἥτις κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας, ἔστω δὴ αὕτη ἡ ελ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ εζ, εη, εθ, λζ, λη, λθ. καὶ ἐπεὶ ἡ ελ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας κατὰ τὸν γʹ: ὅρον τοῦ ιαʹ: τοῦ στοιχ: ἅπτονται δὲ αὐτῆς, αἱ λζ, λη, λθ, ἄρα ἑκάστη τῶν ὑπὸ ελζ, ελη, ελθ, γωνιῶν ὀρθή ἐστι, καὶ κατὰ τὴν μζʹ: τοῦ αʹ: τοῦ αὐτοῦ, τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ελ, λζ, τετράγ: ἴσα εἰσὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγ: τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ελ, λη, τῷ ἀπὸ τῆς εη, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ελ, λθ, τῷ ἀπὸ τῆς εθ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν εζ, εη, εθ, τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, διὰ τὸ καὶ τὰς εζ, εη, εθ, ἴσας εἶναι κατὰ τὸν αʹ: ὅρον τοῦ παρόντος, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ελ, λζ, ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ελ, λη, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ελ, λθ, χωρὶς, κοινοῦ ἄρα ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς ελ, ἐναπολείπονται τὰ ἀπὸ τῶν λζ, λη, λθ, ἴσα, ὥστε καὶ αἱ λζ, λη, λθ, ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὸν ῥηθέντα ιεʹ: ὅρον ἡ ζηθκ, κοινὴ τομὴ τῆς τε αβγδ, σφαίρας, καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου κύκλος ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

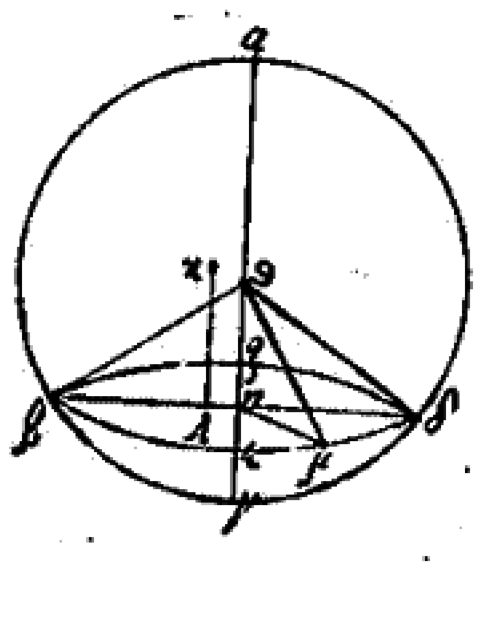
Αʹ: Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου, τοῦ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένου, ὡς ἐπὶ τοῦ αʹ: δέδεικται σχήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Βʹ: Ἔτι ἐὰν ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, τοῦ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένου, ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου πίπτει, ὡς ἐπὶ τοῦ βʹ: σχήματος.

Πρότασις Γʹ: Πρόβλημα.

Τῆς δοθείσης σφαίρας τὸ κέντρον εὑρεῖν. *Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 2.*



Ζητείσθω τὸ κέντρον τῆς αβγδ, δοθείσης σφαίρας, εἰς εὕρεσιν δὲ τούτου τμηθείτω ἡ αβγδ, σφαῖρα ἐπιπέδῳ τινί. καὶ ἐπεὶ ἡ κοινὴ τομὴ τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου, κύκλος ἐστί, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, πάντως γε κατὰ τὴν αὐτήν, καὶ ἡ βεδζ, κοινὴ τομὴ τῆς τε αβγδ, δοθείσης σφαίρας, καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου κύκλος ἐστίν. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὴν αʹ: τοῦ γʹ: τοῦ στοιχ: τὸ κέντρον τοῦ βεζδ, κύκλου, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ η, ἀφ' οὗ ἀνεστάθω κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βεδζ, κύκλου ἡ ηα, περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ α, καὶ γ. εἶτα τμηθείτω ἡ αγ, δίχα κατὰ τὸ θ, καὶ τὸ θ, στησημεῖον, ἔσται κέντρον τῆς αβγδ, σφαίρας. οὐ γὰρ ἐκτός ἐστι τῆς αγ. εἰ δὲ δυνατόν, ἔσω τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἡ κλ, καὶ κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, τὸ λ, ἐστὶ κέντρον τοῦ βεδζ, κύκλου, ὅπερ ἄτοπον, εὕρηται γὰρ τὸ η, οὐκ ἄρα ἐκτὸς τῆς αγ, τὸ κέντρον ἐστὶ τῆς αβγδ, σφαίρας, ὅτι δὲ τὸ θ, δῆλον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ θβ, θδ, θμ, ημ. καὶ ἐπεὶ ἡ θη, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βεδζ, κύκλου, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ια': τοῦ στοιχειωτοῦ, αἱ ἄρα ὑπὸ θηβ, θηδ, θημ, ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ ἡ ηβ, ηδ, ημ, ἴσαι, ἄρα τῶν θηβ, θηδ, θημ, τριγώνων αἱ θη, ηβ, θη, ηδ, θη, ημ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν. ἄρα κατὰ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ στοιχειωτοῦ αἱ θβ, θδ, θμ, ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὸν α': ὅρον τοῦ παρόντος, τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τῆς αβγδ, σφαίρας. ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος ἐν αὐτῇ κύκλου ἀγομένης καθέτου ἐστί.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

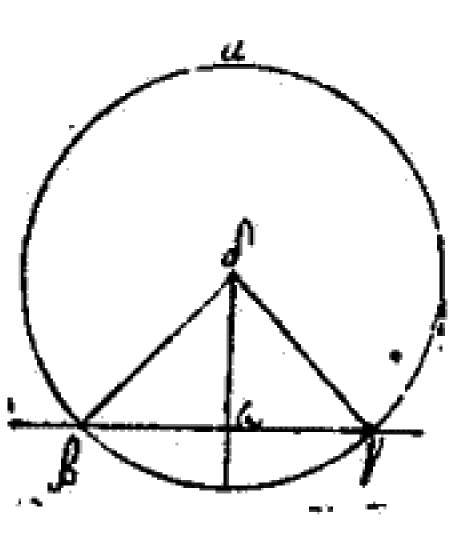
Β': Ἐὰν ἡ τομὴ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, δὸς εἰπεῖν τῆς αγ, συμπέσῃ τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου, τὸ αὐτὸ ἔσται κέντρον τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου.

Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Ἡ σφαῖρα οὐχ ἅπτεται τοῦ ἐπιπέδου κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἕν.

Σφαῖρα ἡ αβγ, ἁπτέσθω τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου. Λέγω, ὅτι ἅπτεται τούτου καθ' ἓν μόνον σημεῖον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἁπτέσθω κατὰ δύο τὰ β, καὶ γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς σφαίρας πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς βγ, ἡ δε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δβ, δγ, καὶ ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν δεβ, δεγ, τριγώνων ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ ε, πάντως γε ἡ εδ, ἐλάττων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν δβ, δγ, κατὰ γὰρ τὴν ιθ': τοῦ α': τοῦ στοιχειωτοῦ παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ὥστε ἡ δε, ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας, ἀλλ' ἡ βγ, ἐν τῷ ἁπτομένῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ κατὰ τὴν α': τοῦ ια': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὸ ἁπτόμενον ἐπίπεδον ἐντὸς τῆς σφαίρας πίπτει, ὥστε τέμνει τὴν σφαῖραν, καὶ οὐχ ἅπτεται, ὑπετέθη δὲ ἅπτεσθαι ταύτης, ἄτοπον ἄρα. ὥστε δῆλον, ὅτι οὐ κατὰ πλείονα, ἢ ἓν σημεῖον ἡ σφαῖρα τοῦ ἐπιπέδου ἅπτεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 3.



ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ.

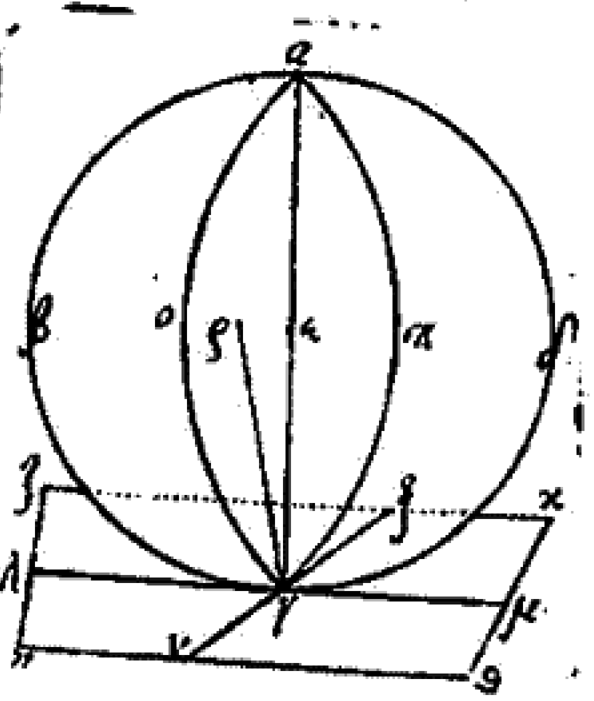
Δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι ἡ δύο τινὰ σημεῖα τῆς σφαίρας ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ἔνδον ὅλη τῆς σφαίρας πίπτει.

Πρότασις Ε΄: Θεώρημα.

Ἐὰν σφαῖρα ἅπτηται ἐπιπέδου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ἀφὴν εὐθεῖα ἀχθῇ, κάθετος ἔσται ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ ἁπτόμενον ἐπίπεδον.

Ἁπτέσθω ἡ αβγδ, σφαῖρα, ἧς κέντρον τὸ ε, τοῦ ζηθκ, ἐπιπέδου κατὰ τὸ γ, σημεῖον, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, κέντρου ἀχθήτω ἐπὶ τὸ γ, ἡ εγ. Λέγω, ὅτι ἡ εγ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ηκ, ἐπίπεδον. Τμηθήτω ἡ σφαῖρα δυσὶν ἐπιπέδοις διὰ τῆς εγ, διερχομένοις, ὥστε τὴν αγ, κοινὴν αὐτῶν εἶναι τομήν, μετὰ δὲ τοῦ ἁπτομένου ἐπιπέδου κοινὰς εἶναι τομὰς τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων τὰς λμ, νξ. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν β΄: τοῦ παρόντος ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου τὴν σφαῖραν, καὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλος ἐστὶ, πάντως γε τό, τε αβγδ, καὶ αογπ, σχῆμα κύκλος ἐστίν. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἑκάτερος τῶν αβγδ, αογπ, κύκλων διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, δῆλον, ὅτι τὸ ε, κέντρον τῆς σφαίρας, κέντρον ἐστὶ τούτων αβγδ, καὶ αογπ, κύκλων κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς β΄: τοῦ παρόντος, καὶ ἡ εγ, ἡμιδιάμετρός ἐστιν ἑκατέρου, ἅπτεται δὲ ἡ σφαῖρα τοῦ ηκ, ἐπιπέδου κατὰ τὸ γ, καὶ διὰ τοῦ γ, διέρχονται αἱ λμ, νξ, κοιναὶ τομαὶ τούτου ἁπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας, καὶ τῶν τεμνόντων αὐτήν, ἄρα ἡ μὲν λμ, ἅπτεται τοῦ αβγδ, κύκλου, ἡ δὲ νξ, τοῦ αογπ. εἰ γὰρ μὴ ἅπτονται, ἀλλὰ τέμνουσι τοὺς κύκλους, ἐντὸς πίπτουσι τῆς σφαίρας κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, καὶ ἑπομένως οὐδὲ τὸ ηκ, ἐπίπεδον ἅπτεται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἐναντίον ἐστὶ τῆς ὑποθέσεως. ἅπτονται ἄρα ἡ μὲν λμ, τοῦ αβγδ, κύκλου, ἡ δὲ νξ, τοῦ αογπ. καὶ κατὰ τὴν ιη: τοῦ γ΄: τῶν στοιχειωτῶν, ἡ εγ, κάθετός ἐστιν ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν λμ, νξ. ὥστε κατὰ τὴν δ΄: τοῦ ια: τῶν αὐτῶν ἡ εγ, κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ζηθκ, ἁπτόμενον ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 4.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δηλονότι ἀπὸ τῆς ἀφῆς τοῦ ἁπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας κάθετος πρὸς τὸ αὐτὸ ἀνασταθῇ ἐπίπεδον ἔνδον τῆς σφαίρας ὡς ἡ γα, τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς ἀνασταθείσης ἔσται καθέτου. εἰ γὰρ μὴ, ἀλλ᾽ ἐκτὸς εἴη ταύτης, ὥσπερ τὸ ρ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ ργ, κα-

θετος

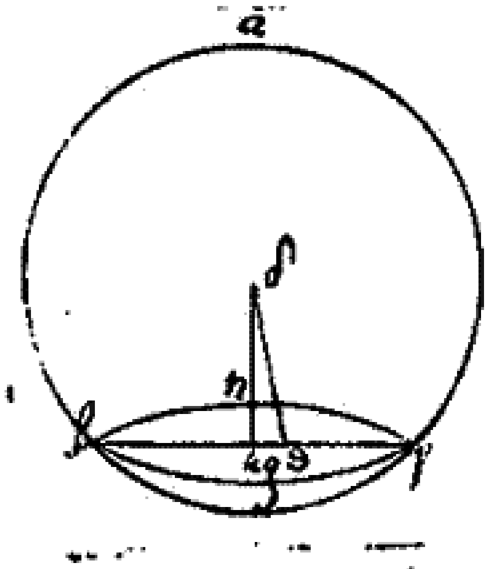
θετος ἔσται, καὶ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἐπὶ τὸ η κ, ἐπίπεδον, ὑποκέσθω δὲ καὶ ἡ ε γ, ἄτοπον ἄρα καὶ τὴν ι γ΄: τοῦ ι α΄:

Πρότασις ϛ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸν κέντρον τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων γραμμὴ ἀχθῇ, ὀρθὴ ἔσται ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον.

Ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς α β γ, σφαίρας ἐπὶ τὸ ε, κέντρον τοῦ β ζ γ η κύκλου ἐλάσσονος ἡ δ ε. Λέγω τὴν δ ε, κάθετον εἶναι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ζ γ η, κύκλου, εἰ γὰρ μὴ, πιπτέτω ἡ δ θ. καὶ ἐπεὶ ἡ δ θ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ζ γ η, κύκλου ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς σφαίρας ἠγμένη, δῆλον, ὅτι τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ β ζ γ η, κύκλου, καὶ τὸ β΄: πόρισμα τῆς β΄: τοῦ παρόντος, ἀλλ᾽ ὑπετέθη τὸ ε, κέντρον εἶναι τοῦ β ζ θ η, κύκλου, ἄτοπον ἄρα. ὥστε ἡ δ θ, οὐκ ἔστι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ζ γ η, κύκλου ἐλάσσονος. ὁμοίως δὲ οὐδ᾽ ἄλλη τις, ἡ δ ε, ἄρα ἡ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύουσα τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β ζ γ η, κύκλου ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 5.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ἀχθῇ, διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διέρχεται.

Πρότασις Ζ΄: Θεώρημα.

Τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου, διερχόμενοι τῆς σφαίρας μέγιστοί εἰσι, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ μέγιστοι διὰ τοῦ κέντρου διέρχονται τῆς σφαίρας, οἱ δὲ ἐξ ἴσου ἀφιστάμενοι τοῦ κέντρου ἴσοι εἰσι, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ ἴσοι ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφίστανται, καὶ ἔτι οἱ ἀπώτερον τοῦ κέντρου τῶν ἐγγύτερον ἐλάσσονές εἰσι.

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ α β γ δ, ἧς κέντρον τὸ ε, κύκλοι οἱ α ζ γ η, β θ κ λ, δ μ ν ξ, ὧν ὁ μὲν α ζ γ η, διὰ τοῦ ε, κέντρου διερχέσθω τῆς σφαίρας, οἱ δὲ β θ κ λ, δ μ ν ξ, ἐκτὸς τοῦ κέντρου ἔστωσαν. Λέγω, ὅτι ὁ α ζ γ η, κύκλος μέγιστός ἐστιν. Ἔστωσαν γὰρ κέντρα τῶν β θ κ λ, δ μ ν ξ, κύκλων τὰ ο, π, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ο, ε π, ε κ, ε ν, ε γ. καὶ ἐπεὶ καὶ τὴν αὐτῶν, ἑκατέρα τῶν ε ο, ε π, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, πάντως γε αἱ ὑπὸ ε ο κ, ε π ν, γωνίαι ὀρθαί εἰσιν, ὥστε ἡ μὲν ε κ, μείζων ἐστὶ τῆς κ ο, ἡ δὲ ε ν, τῆς ν π, κατὰ τὴν ι θ΄: τοῦ α΄: τοῦ

στοι-