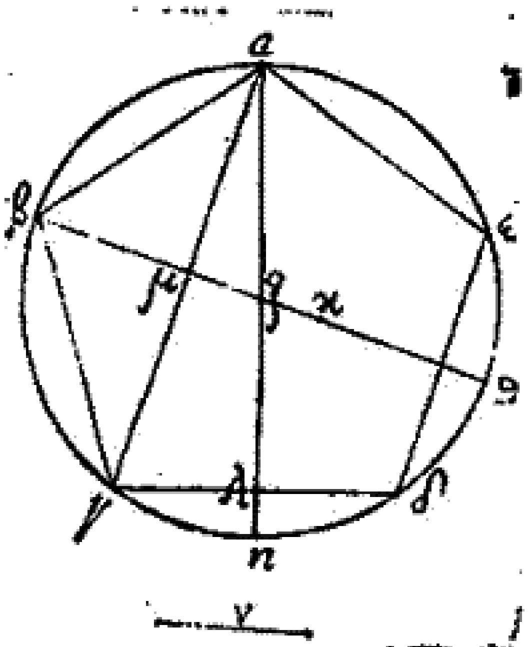
Πρότασις ΙΑ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν α β γ δ ε, ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον, πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ α β γ δ ε. Λέγω, ὅτι ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἡ α β, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ζ, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ζ, ζ β, καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ η, θ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α γ, καὶ κείσθω τῆς α ζ, τέταρτον μέρος ἡ ζ κ, ῥητὴ δὲ ἡ α ζ, ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ζ κ, ἔστι δὲ καὶ ἡ β ζ, ῥητὴ, ὅλη ἄρα ἡ β κ, ῥητή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α γ η, περιφέρεια τῇ α δ η, περιφερείᾳ, ὧν ἡ α β γ, τῇ α ε δ, ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ γ η, λοιπῇ τῇ η δ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν α δ, συνάγονται ὀρθαὶ, καὶ τὸ α: πόρισμ: τῆς γ΄: τοῦ γ΄: αἱ πρὸς τῷ λ, γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ γ δ, τῆς γ λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ μ, ὀρθαί εἰσι, καὶ διπλῆ ἡ α γ, τῆς γ μ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ α λ γ, γωνία τῇ ὑπὸ α μ ζ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ α λ γ, καὶ τοῦ α μ ζ, ἡ ὑπὸ λ α γ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ α γ λ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ μ ζ α, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα τὸ α γ λ, τρίγων: τῷ α μ ζ, τριγώνῳ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ λ γ, πρὸς τὴν α γ, οὕτως ἡ μ ζ, πρὸς τὴν ζ α, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ τῆς λ γ, διπλῆ πρὸς τὴν γ α, οὕτως ἡ τῆς μ ζ, διπλῆ πρὸς τὴν ζ α, ἀλλ᾽ ὡς ἡ τῆς μ ζ, διπλῆ πρὸς τὴν ζ α, οὕτως ἡ μ ζ, πρὸς τὴν



Eucl.Lib.13.Fig.10.

ἡμίσειαν τῆς ζ α, καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς λ γ, διπλῆ πρὸς τὴν γ α, οὕτως ἡ μ ζ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ζ α, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίση, ὡς ἄρα ἡ τῆς γ λ, διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς γ α, οὕτως ἡ μ ζ, πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ζ α, καὶ ἔστι τῆς μὲν λ γ, διπλῆ ἡ δ γ, τῆς δὲ γ α, ἡμίσεια ἡ γ μ, τῆς δὲ ζ α, τέταρτον μέρος ἡ ζ κ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ γ, πρὸς τὴν γ μ, οὕτως ἡ μ ζ, πρὸς τὴν ζ κ. συνθέντι, ἄρα καὶ ὡς συναμφότερος ἡ δ γ μ, πρὸς τὴν γ μ, οὕτως ἡ μ κ, πρὸς τὴν ζ κ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου δ γ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ μ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς μ κ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ ζ. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς α γ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῇ δ γ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης, κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος, πενταπλάσιον δύναται, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καὶ ἔστιν ὅλης τῆς α γ, ἡμίσεια ἡ γ μ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς

δ γ μ,

δγμ, ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γμ, ὡς δὴ τὸ ἀπὸ τῆς δγμ, ὡς μιᾶς, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γμ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς μκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ, πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς μκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κζ· ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς κζ, ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς μκ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ μκ, λόγον γὰρ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, τὸ ἀπὸ τῆς μκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ βζ, τῆς ζκ, πενταπλασία ἄρα ἡ βκ, τῆς κζ, εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζκ, πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς μκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κζ, πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κμ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κμ, λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ βκ, τῇ κμ, μήκει, καὶ ἐστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν, αἱ βκ, κμ, ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν, ἀποτομὴ ἄρα ἡ βμ· προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ μκ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τετάρτη, ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κμ, ἐκείνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ν, ἡ βκ, ἄρα τῆς κμ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ κζ, τῇ ζβ, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ κβ, τῇ ζβ. ἀλλ' ἡ βζ, τῇ βθ, σύμμετρός ἐστι μήκει, καὶ ἡ βκ, ἄρα τῇ βθ, σύμμετρός ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κμ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κμ, λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς ἕν, ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ν, λόγον ἔχει, ὃν ὁ πέντε πρὸς τὸν τέσσαρα, οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βκ, τῇ ν. ἡ βκ, ἄρα τῆς κμ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ βκ, τῆς προσαρμοζούσης μκ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ὅλη ἡ βκ, ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ βθ. ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ μβ, τὸ δὲ ἀπὸ ῥητῆς, καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐλάττων, δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν θβ, βμ, ἡ αβ, διὰ τὸ, ἐπιζευγνυμένης τῆς αθ, ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ αβθ, τρίγωνον τῷ αβμ, καὶ εἶναι ὡς τὴν θβ, πρὸς τὴν βα, οὕτω τὴν αβ, πρὸς τὴν βμ, ἡ ἄρα αβ, τοῦ πενταγώνου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

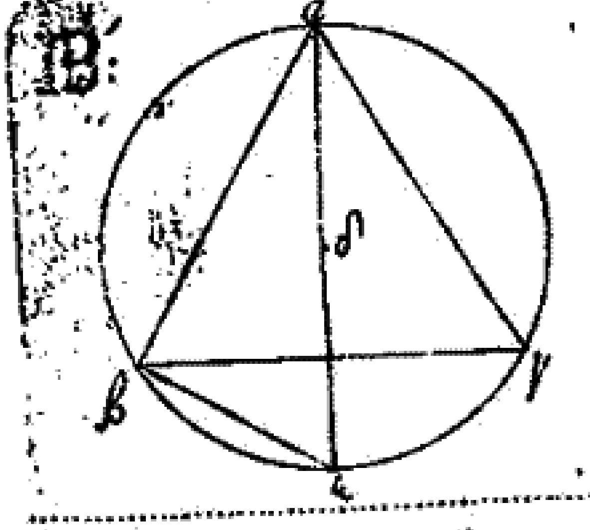
Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, τὸ αβγ. Λέγω, ὅτι ἡ τοῦ αβγ, τριγ: μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων καὶ τὰ ἑξῆς. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ αδ, διήχθω ἐπὶ

τὸ ε,

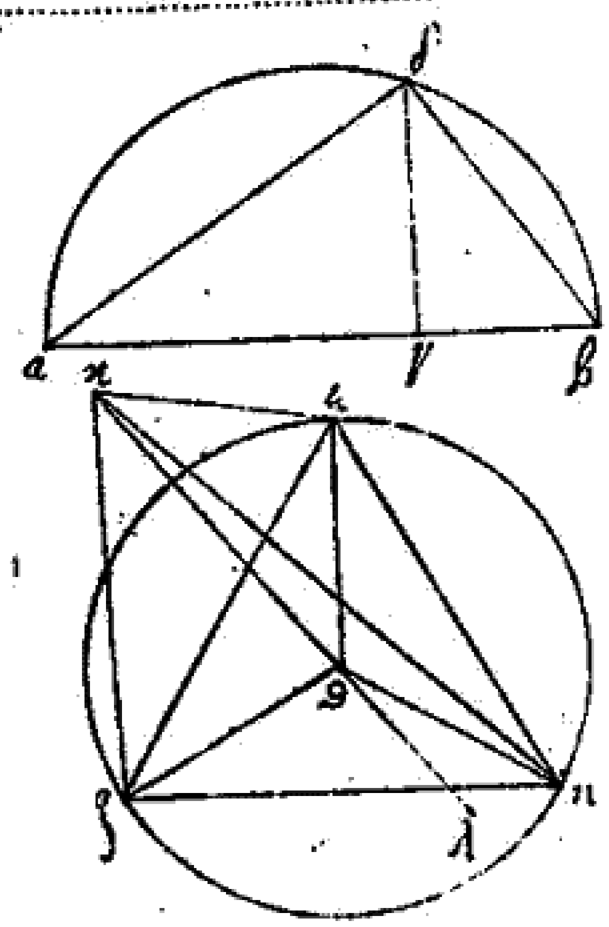
πὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βε, καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ αβγ, τρίγωνον· ἡ βεγ, ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ αβγ, κύκλου περιφερείας, ἡ ἄρα βε, περιφέρεια ἕκτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἑξαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ βε, εὐθεῖα, ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῇ δε. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αε, τῆς δε, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αε, τοῦ ἀπὸ τῆς δε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αε, τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βε, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βε, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, ἴση δὲ ἡ βε, τῇ δε, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δε, ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. [illegible] XI.



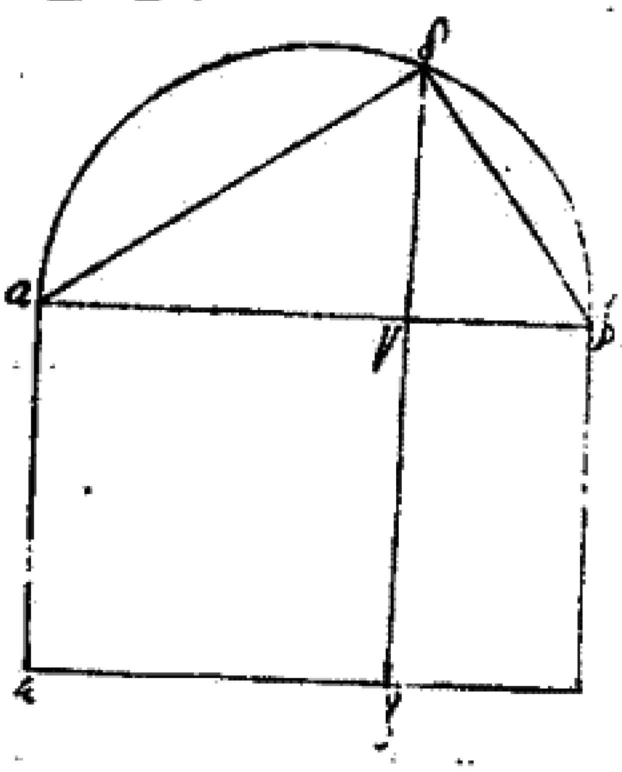
Πρότασις ΙΓ'· Πρόβλημα.

Πυραμίδα συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.



Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον. ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν αγ, τῆς βγ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, σημείου τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γδ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δα, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ηεζ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ δγ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εηζ, κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ εηζ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ θ, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εθ, θζ, θη, καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ θ, σημείου τῷ τοῦ εζη, κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ θκ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς θκ, τῇ αγ, εὐθείᾳ ἴση ἡ θκ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κε, κζ, κη, καὶ ἐπεὶ ἡ κθ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ εζη, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ εζη, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν θε, θζ, θη, ἡ θκ, ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν θε, θζ, θη, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αγ, τῇ θκ, ἡ δὲ γδ, τῇ θε, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ δα, βάσει τῇ κε, ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν κζ, κη, τῇ δα, ἐστὶν ἴση, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ κε, κζ, κη, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γβ, τριπλῆ ἄρα ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται, ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιθ': τοῦ ϛ': πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζε, τοῦ ἀπὸ τῆς εθ, τριπλάσιον, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ἔστιν ἴση ἡ δγ, τῇ εθ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δα, τῇ εζ. ἀλλ' ἡ δα, ἑκάστῃ τῶν κε, κζ, κη, ἐδείχθη ἴση, καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν εζ, ζη, ηε, ἑκάστῃ τῶν κε, κζ, κη, ἐστὶν ἴση, πυραμὶς ἄρα συνίσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εζη, τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον. Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ θκ, εὐθεῖα ἡ θλ, καὶ κείσθω τῇ βγ, ἴση ἡ θλ, καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ γδ, πρὸς τὴν γβ. ἴση δὲ ἡ μὲν αγ, τῇ κθ, ἡ δὲ γδ, τῇ θε, ἡ δὲ γβ, τῇ θλ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κθ, πρὸς τὴν θε, οὕτως ἡ εθ, πρὸς τὴν θλ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν κθ, θλ, ἰσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς θε.

Eucl. Lib. 13. Fig. 12.



καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ κθε, εθλ, γωνιῶν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς κλ, γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ ε. ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ελ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ λεκ, γωνία, διὰ τὸ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ελκ, τρίγ: ἑκατέρῳ τῶν ελθ, εθκ, τριγ: ἐὰν δὲ μενούσης τῆς κλ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν ζ, η, σημείων, ἐπιζευγνυμένων τῶν ζλ, λη, καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς ζ, η, γωνιῶν, καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ, ἡ γὰρ κλ, τῆς σφαίρας διάμετρος, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ αβ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν αγ, ἴση κεῖται ἡ κθ, τῇ δὲ γβ, ἡ θλ. Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γβ, τριπλῆ ἄρα ἡ αβ, τῆς βγ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἡμιολία ἐστὶν ἡ αβ, τῆς αγ. ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αδ. ἐπειδήπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς βδ, ἔστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ δα, πρὸς τὴν αγ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν δαβ, δαγ, τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν α': πρὸς τὴν γ': οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β': ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν βα, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ αδ, ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος, ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜ-

Λ Η Μ Μ Α.

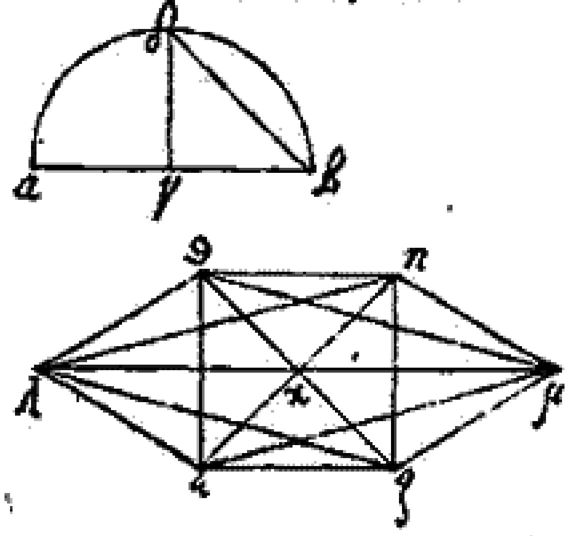
Δεικτέον δὴ, ὅτι ἐστὶν, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφὴ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον τὸ εγ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζβ, παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ δαβ, τρίγωνον τῷ δαγ, τριγώνῳ, ἐστὶν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ δα, πρὸς τὴν αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ εβ, πρὸς τὸ ζβ, καὶ ἐστι τὸ μὲν εβ, τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴση γὰρ ἡ εα, τῇ αγ, τὸ δὲ βζ, τὸ ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αγ, βγ, καὶ ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αδ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δγ, ἡ γὰρ δγ, κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων, τῶν αγ, γβ, μέση ἀνάλογόν ἐστιν. διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ αδβ, ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ.

Πρότασις ΙΔ΄. Πρόβλημα.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

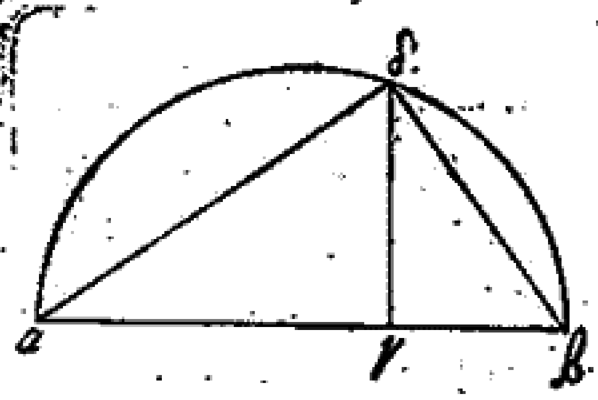
Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ εζηθ, ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ βδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θζ, εη. καὶ ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ κ, σημείου τῷ τοῦ εζηθ, τετραγώνου ἐπιπέδῳ

Eucl. Lib. 13. Fig. 13.



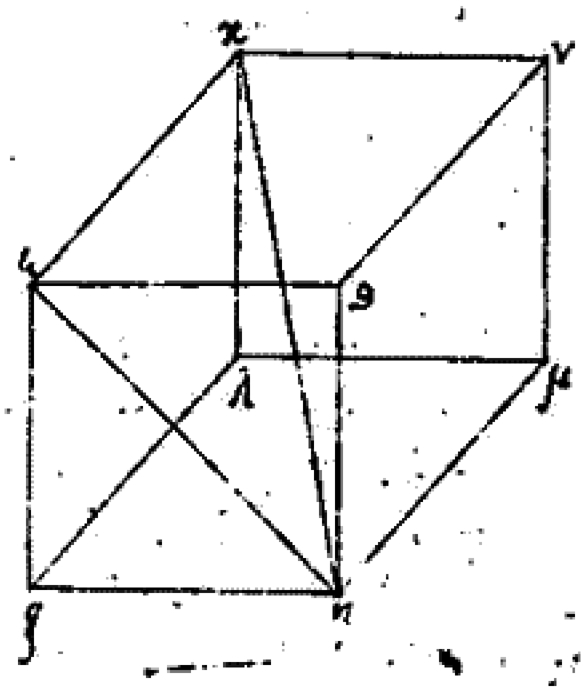
πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ κλ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου, ὡς ἡ κμ, καὶ ἀφῃρήσθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν κλ, κμ, μιᾷ τῶν κε, κζ, κη, κθ, ἴση ἑκατέρα τῶν κλ, κμ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λε, λζ, λη, λθ, με, μζ, μη, μθ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ κε, τῇ κθ, καὶ ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ εκθ, γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς θε, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ λκ, τῇ κε, καὶ ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ λκε, γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ελ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κε, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θε, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς εκ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς λε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εθ, ἴση ἄρα ἡ λε, τῇ εθ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ λθ, τῇ θε, ἐστὶν ἴση, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ λεθ, τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ τοῦ εζηθ, τετραγώνου πλευραὶ, κορυφαὶ δὲ τὰ λ, μ, σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν, ὀκτάεδρον ἄρα συνίσταται ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ λκ, κμ, κε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς λμ, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ ε. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ, ἐὰν μενούσης τῆς λμ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν ζ, η, θ, σημείων, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ, ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ λκ, τῇ κμ, κοινὴ δὲ ἡ κε, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ λε, βάσει τῇ εμ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ λεμ, γωνία, ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς λμ, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς λε. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ γβ, διπλασία ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δβ, διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βδ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λμ, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς λε, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τῷ ἀπὸ τῆς λε, ἴση γὰρ κεῖται ἡ εθ, τῇ δβ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ἀπὸ τῆς λμ, ἴση ἄρα ἡ αβ, τῇ λμ, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ λμ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ, περιείληπται τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ, καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Eucl. lib. 13. Fig. 14.



Πρότασις ΙΕʹ: Πρόβλημα.

Κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει τριπλῆ ἐστι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

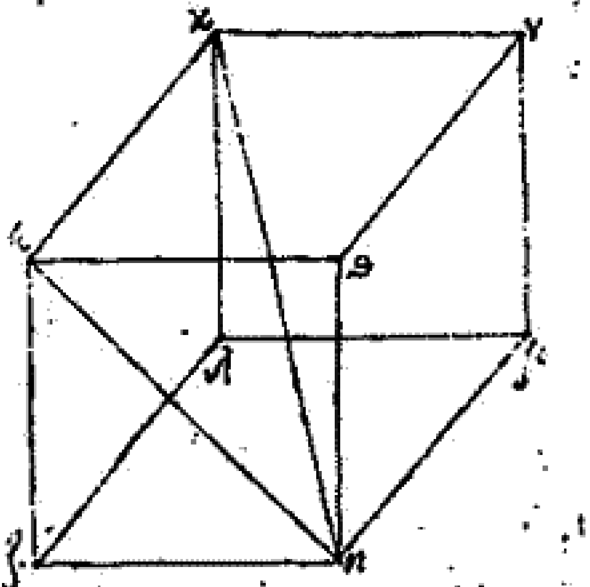


Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν αγ, τῆς γβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ εζηθ, ἴσην ἔχον ἑκάστην πλευρὰν τῇ δβ, καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ, η, θ, τῷ τοῦ εζηθ, τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ κε, ζλ, ημ, θν, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀφ' ἑκάστης τῶν εκ, ζλ, ημ, θν, μιᾷ τῶν εζ, ζη, ηθ, θε, ἴση ἑκάστη τῶν εκ, ζλ, ημ, θν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κλ, λμ, μν, νκ, κύβος ἄρα συνίσταται ὁ ζν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος.

Δεῖ

Δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ κη, ηε, καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ κεη, γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν κε, ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ εη, ἐπίπεδον, δηλ: καὶ πρὸς τὴν εη, εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς κη, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ ε, σημείου. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ζη, ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ζλ, ζε, καὶ πρὸς τὸ κζ, ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ζη, ὥστε κἂν ἐπιζεύξωμεν τὴν ζκ, ἡ ζη, ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν ζκ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ηκ, γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ ζ. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς κη, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένος ὁ κύβος. Λέγω δὴ καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ζη, τῇ ζε, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ ζ, γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, ἴση δὲ ἡ εζ, τῇ εκ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ηε, εκ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ηκ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βδ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κε, τριπλάσιον, καὶ κεῖται ἴση τῇ βδ, ἡ κε, ἴση ἄρα καὶ ἡ κη, τῇ αβ, καὶ ἔστιν ἡ αβ, τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, καὶ ἡ κη, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος, καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 15.



Πρότασις Ις΄: Πρόβλημα.

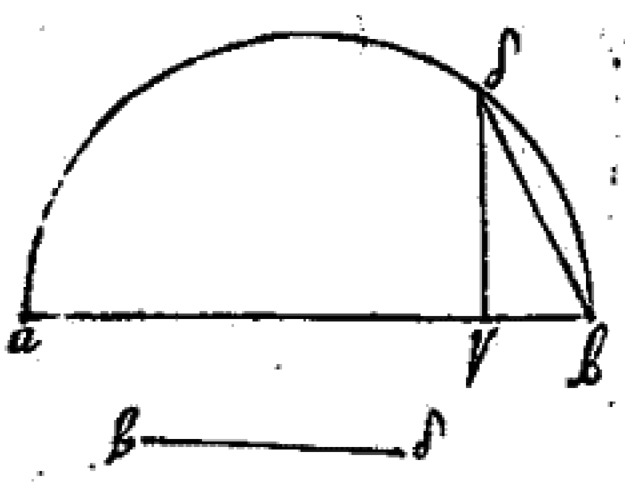
Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν αγ, τῆς γβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, σημείου τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ· καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ εζηθκ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δβ· καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηθ, κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ εζηθκ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ εζ, ζη, ηθ, θκ, κε, περιφέρειαι

δίχα

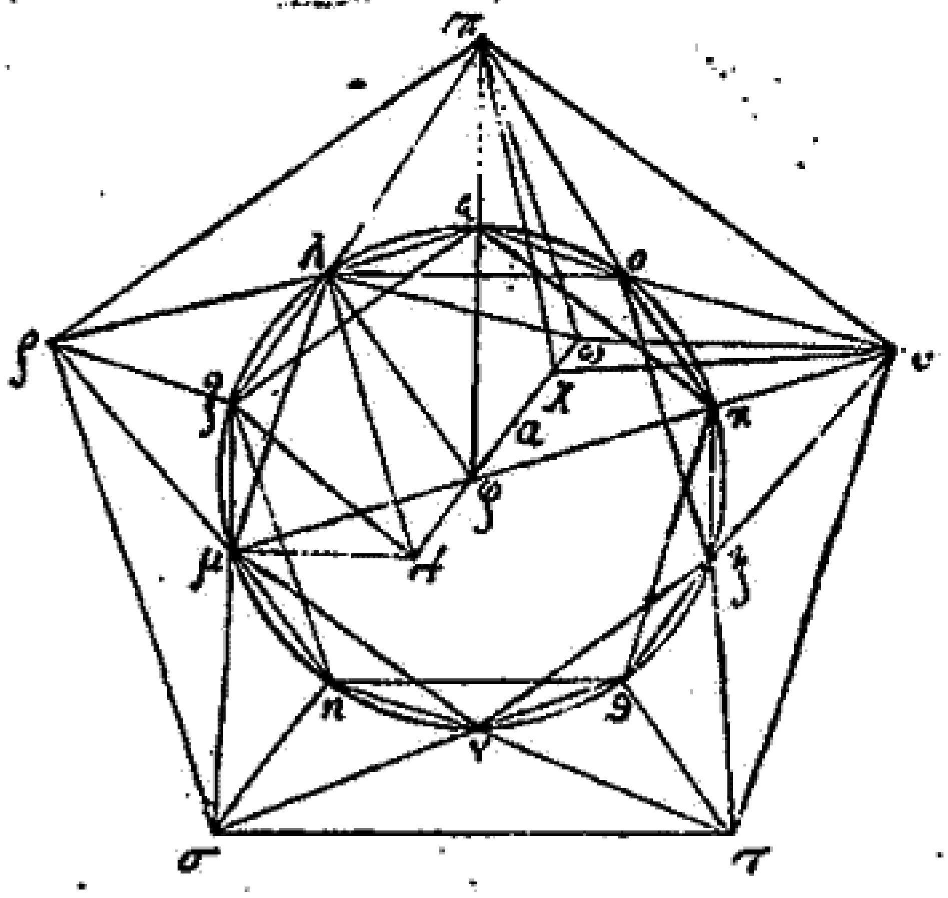
δίχα κατὰ τὰ λ, μ, ν, ξ, ο, σημεῖα· καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ε λ, λ ζ, ζ μ, μ η, η ν, ν θ, θ ξ, ξ κ, κ ο, ο ε. ὁμοίως καὶ αἱ λ μ, μ ν, ν ξ, ξ ο, ο λ, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ λ μ ν ξ ο, πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ ε ο, εὐθεῖα. καὶ ἀνεστάθωσαν ἀπὸ τῶν ε, ζ, η, θ, κ, σημείων, τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ ε π, ζ ρ, η σ, θ τ, κ υ, ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ε ζ η θ κ, κύκλου, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ π ρ, ρ σ, σ τ, τ υ, υ π, π λ, λ ρ, ρ μ, μ σ, σ ν, ν τ, τ ξ, ξ υ, υ ο, ο π. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ε π, κ υ, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλός ἄρα ἐστὶν ἡ ε π, τῇ κ υ, ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, καὶ κατὰ τὴν λγ': τοῦ α: αἱ τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, ἡ π υ, ἄρα τῇ ε κ, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ε κ, πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ π υ, τοῦ εἰς τὸν ε ζ η θ κ, κύκλου ἐγγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν π ρ, ρ σ, σ τ, τ υ, πενταγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ε ζ η θ, κύκλον ἐγγραφομένου, ἰσόπλευρον ἄρα καὶ τὸ π ρ σ τ υ, πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ παρόντος, ἑξαγώνου μὲν ἐστὶν ἡ π ε, δεκαγώνου δὲ ἡ ε ο, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ π ε ο, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ π ο, ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ, δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ο υ, πενταγώνου ἐστὶ πλευρὰ, ἔστι δὲ καὶ ἡ π υ, πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ π ο υ, τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν π λ ρ, ρ μ σ, σ ν τ, τ ξ υ, τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν π λ, π ο, ἔστι δὲ καὶ ἡ λ ο, πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ π λ ο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λ ρ μ, μ σ ν, ν τ ξ, ξ υ ο, τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τοῦ ε ζ η θ κ, τὸ φ, σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ φ, τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάθω ἡ φ ω, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη, ὡς ἡ φ ψ, καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ φ χ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν φ ψ, χ ω. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ π ω, π χ, υ χ, υ ω, ε φ, λ φ, λ ψ, ψ μ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν φ χ, π ε, τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ φ χ, τῇ π ε, εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι, καὶ αἱ ε φ, π χ, ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν, ἑξαγώνου δὲ ἡ ε φ, ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ π χ, καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἐστὶν ἡ π χ, δεκαγώνου δὲ ἡ χ ω, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ π χ ω, γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ π ω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ υ ω, πενταγώνου ἐστίν. Ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς φ κ, χ υ, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καὶ ἔστιν ἡ φ κ, ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα, ἑξαγώνου, ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ χ υ, δεκαγώνου δὲ ἡ χ ω, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ υ χ ω, πενταγώνου ἄρα ἡ υ ω, ἔστι δὲ καὶ ἡ π υ, πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ π υ ω, τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων,

Eucl. lib. 13. Fig. 16.



νων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ πρ, ρσ, στ, τυ, εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ ω, σημεῖον ἰσόπλευρόν ἐστι. Πάλιν ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ φχ, δεκαγώνου δὲ ἡ φψ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ λφψ, γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ λψ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν μφ, ἴσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ μψ, πενταγώνου, ἔστι δὲ καὶ ἡ λμ, πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ λμψ, τρίγωνον. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ μν, νξ, ξο, ολ, κορυφὴ δὲ τὸ ψ, σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστι. συνέσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιεχόμενον. Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. Ἐπειδὴ γὰρ ἑξαγώνου μὲν ἡ φχ, δεκαγώνου δὲ ἡ χω, ἡ φω, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ φχ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν φχ, οὕτως ἡ φχ, πρὸς τὴν χω, ἴση δὲ ἡ μὲν φχ, τῇ φλ, ἡ δὲ χω, τῇ φψ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν φλ, οὕτως ἡ φλ, πρὸς τὴν φψ, καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ωφλ, λφψ, γωνίαι. ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν λω, εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ψλω, γωνία, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ψλφ, φλω, τριγώνων· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ψω, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν

Eucl. Lib. 13. Fig. 17.



φχ, οὕτως ἡ φχ, πρὸς τὴν χω, ἴση δὲ ἡ μὲν ωφ, τῇ ψχ, ἡ δὲ φχ, τῇ χπ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ψχ, πρὸς τὴν χω, οὕτως ἡ πχ, πρὸς τὴν χω. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν πψ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ π, γωνία, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ψω, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ψω, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ π, καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Τετμήσθω γὰρ ἡ φχ, δίχα κατὰ τὸ α, καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ φω, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ χ, καὶ τὸ ἔλαττον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ωχ, ἡ ἄρα ωχ, προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν χα, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος. πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ωα, τοῦ ἀπὸ τῆς αχ, καὶ ἔστι τῆς μὲν αω, διπλῆ ἡ ωψ, τῆς δὲ αχ, διπλῆ ἡ χφ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ωψ, τοῦ ἀπὸ τῆς χφ, καὶ ἐπεὶ τετραπλάσιον

ἐστὶν

ἐστὶν ἡ α γ, τῆς β γ, πενταπλασίων ἄρα ἡ α β, τῆς β γ, ἐστὶν, ὡς δὲ ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς α β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β δ. πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, τοῦ ἀπὸ τῆς β δ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ω ψ, πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς φ χ, καὶ ἔστιν ἡ δ β, ἴση τῇ φ χ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, τοῦ ε ζ η θ κ. ἴση ἄρα καὶ ἡ α β, τῇ ψ ω, καὶ ἔστιν ἡ α β, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, καὶ ἡ ψ ω, ἄρα τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ ἴση ἐστί. Τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον. Λέγω, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ε ζ η θ κ, κύκλου, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ε ζ η θ κ, κύκλου, ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἡ δὲ τοῦ ε ζ η θ κ, πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστὶν, ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

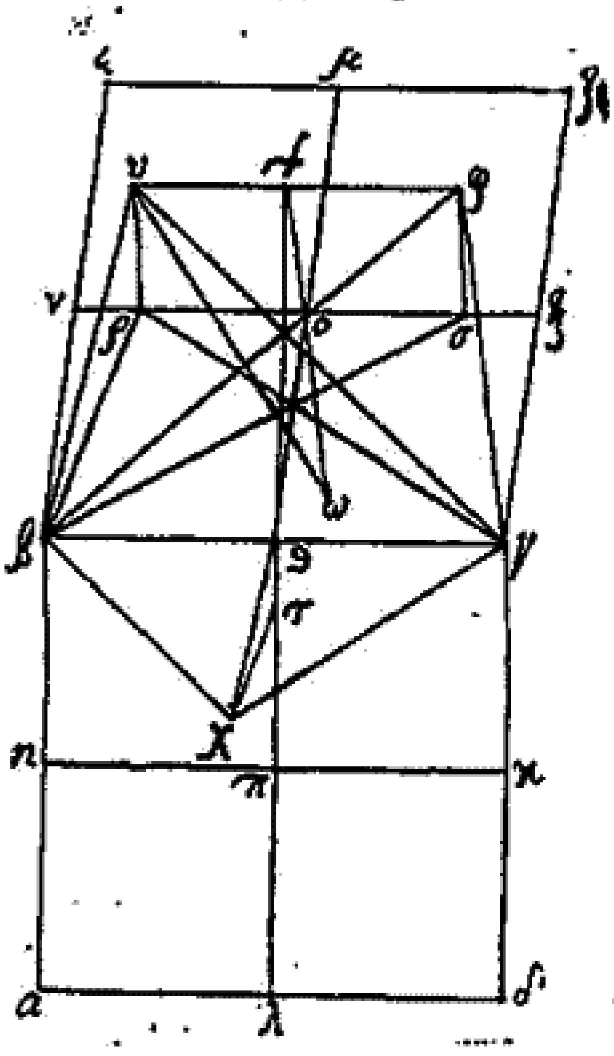
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τῶν δύο τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Πρότασις ΙΖ΄. Πρόβλημα.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Κείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις, τὰ α β γ δ, γ β ε ζ. καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν α β, β γ, γ δ, δ α, ε ζ, ε β, ζ γ, πλευρῶν, δίχα κατὰ τὰ η, θ, κ, λ, μ, ν, ξ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ η κ, θ λ, μ θ, ν ξ. καὶ τετμήσθωσαν αἱ ν ο, ο ξ, θ π, εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ ρ, σ, τ, σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ρ ο, ο σ, τ π. καὶ ἀνεστάσθωσαν ἀπὸ τῶν ρ, σ, τ, σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς, ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ρ υ, σ φ, τ χ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς ρ ο, ο σ, τ π, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ υ β, β χ, χ γ, γ φ, φ υ. Λέγω, ὅτι τὸ υ β χ γ φ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστιν. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ρ β, σ β, φ β. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ν ο, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ρ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ο ρ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ο ν, ν ρ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ο ρ, κατὰ τὴν δ΄. τοῦ παρόντος, ἴση ἡ μὲν ο ν, τῇ ν β, ἡ δὲ ο ρ, τῇ ρ υ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν β ν, ν ρ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ρ υ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν β ν, υρ, τὸ ἀπὸ τῆς βρ, ἐστὶν ἴσον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βρ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ρυ. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν βρ, ρυ, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ρυ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν βρ, ρυ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βυ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βυ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς υρ, διπλῆ ἄρα ἡ βυ, τῆς υρ, ἔστι δὲ καὶ ἡ φυ, τῆς ρυ, διπλῆ, ἐπειδήπερ ἡ ρσ, τῆς ρο, τουτέστι τῆς ρυ, ἐστὶ διπλῆ, ἴση ἄρα ἡ βυ, τῇ υφ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν βχ, χγ, γφ, ἑκατέρᾳ τῶν βυ, υφ, ἐστὶν ἴση, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ βυφγχ, πεντάγωνον. Λέγω, ὅτι καὶ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ο, ἑκατέρᾳ τῶν ρυ, σφ, παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου ἡ οψ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ψθ, θχ. Λέγω, ὅτι ἡ ψθχ, εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ θπ, ἄκρον καὶ μέσον τέτμηται λόγον κατὰ τὸ τ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ πτ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θπ, πρὸς τὴν πτ, οὕτως ἡ πτ, πρὸς τὴν τθ, ἴση δὲ ἡ μὲν θπ, τῇ θο, ἡ δὲ πτ, ἑκατέρᾳ τῶν τχ, οψ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θο, πρὸς τὴν οψ, οὕτως ἡ χτ, πρὸς τὴν τθ, καὶ ἔστι παράλληλος ἡ μὲν θο, τῇ τχ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ βδ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἡ δὲ τθ, τῇ οψ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ βζ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ψοθ, θτχ, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσονται, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ψθ, τῇ θχ, πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ υβχγφ, πεντάγωνον. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν, ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ νο, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ορ. ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ νο, ορ, πρὸς τὴν ον, οὕτως ἡ νο, πρὸς τὴν οσ, ἴση δὲ ἡ ορ, τῇ οσ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ σν, πρὸς τὴν νο, οὕτως ἡ νο, πρὸς τὴν οσ, ἡ νσ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ νο. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν νσ, σο, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ον, ἴση δὲ ἡ μὲν ον, τῇ νβ, ἡ δὲ οσ, τῇ σφ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν νσ, σφ, τετράγωνα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νβ, ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν φσ, σν, νβ, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νβ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν σν, νβ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βσ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν βσ, σφ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς φβ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ φσβ, γωνία, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νβ, διπλῆ ἄρα ἡ φβ, τῆς βν, ἔστι δὲ καὶ ἡ βγ, τῆς βν, διπλῆ, ἴση ἄρα ἡ φβ, τῇ βγ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ βυ, υφ, δυσὶ ταῖς βχ, χγ, ἴσαι εἰσί,

Eucl. Lib. 13. Fig. 28.



καὶ βάσις ἡ φβ, βάσει τῇ βγ, ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βυφ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βχγ, ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ υφγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βχγ· αἱ ἄρα ὑπὸ βχγ, βυφ, υφγ, τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ πεντάγωνον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ βυφγχ, πεντάγ: ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, ἄρα ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἐστὶν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς βγ, ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι καὶ τὰ ἑξῆς. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ψο, καὶ ἔστω ἡ ψω, συμβάλλει ἄρα ἡ ψω, τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελευταίῳ θεωρήματι τοῦ ια: βιβλίου, τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ω, τὸ ω, ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ψω, ἡμίσεια τοῦ κύβου πλευρά. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ υω, καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ νσ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνηται κατὰ τὸ ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ον, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν νσ, σο, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο, ἴση δὲ ἡ μὲν νσ, τῇ ψο. ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν νο, τῇ οω, ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ψο, τῇ οσ, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ οσ, τῇ ψυ. ἐπεὶ καὶ τῇ ρο, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ωψ, ψυ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ωψ, ψυ, ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς υω, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς υω, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο, ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας, καὶ ἔστιν ἡ νο, ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ἡ ἄρα υω, ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἔστι τὸ ω, κέντρον τῆς περιλαμβανούσης σφαίρας τὸν κύβον, τὸ υ, ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. Ἐπεὶ γὰρ τῆς νο, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ορ, ὅλης ἄρα τῆς νξ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ρσ, οἷον ἐπεὶ ὡς ἡ νο, πρὸς τὴν ορ, ἡ ορ, πρὸς τὴν ρν, καὶ τὰ διπλάσια, τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα ἡ νξ, πρὸς τὴν ρσ, οὕτως ἡ ρσ, πρὸς συναμφότερον τὴν νρ, σξ, μείζων δὲ ἡ νξ, τῆς ρσ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ρσ, συναμφοτέρου τῆς νρ, σξ, ἡ νξ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ρσ, ἴση δὲ ἡ ρσ, τῇ υφ, τῆς ἄρα νξ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης,

μένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ υφ. καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ν ξ, πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή, ἡ υ φ, ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά.

Πρότασις ΙΗʹ. Θεώρημα.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι, καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ α β, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν α γ, τῇ γ β, κατὰ δὲ τὸ δ, ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν α δ, τῆς δ β, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς α β, ἡμικύκλιον τὸ α ε β. καὶ ἀπὸ τῶν γ, δ, τῇ α β, πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ γ ε, δ ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, α ζ, ζ β, ε β. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ α δ, τῆς δ β, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ α β, τῆς β δ. ἀναστρέψαντι, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ β α, τῆς α δ, ὡς δὲ ἡ β α, πρὸς τὴν α δ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς β α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α ζ, ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ α ζ β, τρίγωνον τῷ α ζ δ, τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β α, τοῦ ἀπὸ τῆς α ζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος, καὶ ἔστιν ἡ α β, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ α ζ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς πυραμίδος πλευρᾷ. Πάλιν ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ δ α, τῆς δ β, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ α β, τῆς β δ, ὡς δὲ ἡ α β, πρὸς τὴν β δ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς α β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ β, τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, τοῦ ἀπὸ τῆς β ζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, καὶ ἔστιν ἡ α β, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος. ἡ β ζ, ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α γ, τῇ γ β, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ α β, τῆς β γ, ὡς δὲ ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς α β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β ε, διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α β, τοῦ ἀπὸ τῆς β ε, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, καὶ ἔστιν ἡ α β, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος. ἡ β ε, ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά. Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου, τῇ α β, εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἡ α η, καὶ κείσθω ἡ α η, τῇ α β, ἴση,

Eucl. Lib. 13. Fig. 19.