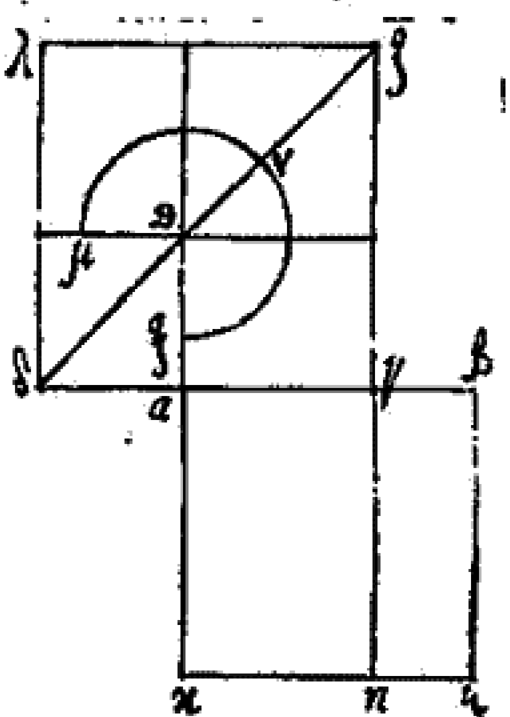
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ
ΤΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ·
ΤΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΟΥ ΤΡΙΤΟΥ,
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Πρότασις Α΄. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῇ αγ, εὐθεῖα ἡ αδ, καὶ κείσθω τῆς αβ, ἡμίσεια ἡ αδ. Λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν αβ, γδ, τετράγωνα, τὰ αε, δζ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ δζ, τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ζγ, ἐπὶ τὸ η. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, σημεῖον. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ζθ, ἴσον ἄρα τὸ γε, τῷ ζθ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αβ, τῆς αδ, ἴση δὲ ἡ μὲν βα, τῇ κα, ἡ δὲ αδ, τῇ αθ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κα, τῆς αθ, ὡς δὲ ἡ κα, πρὸς τὴν αθ, οὕτω τὸ γκ, πρὸς τὸ γθ, διπλάσιον ἄρα τὸ κγ, τοῦ γθ, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λθ, θγ, διπλάσια τοῦ γθ. ἴσον ἄρα τὸ κγ, τοῖς λθ, γθ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ γε, τῷ ζθ, ἴσον, ὅλον ἄρα τὸ αε, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ μνξ, γνώμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ βα, τῆς αδ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βα, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, τουτέστι τὸ αε, τοῦ δθ, ἴσον δὲ τὸ αε, τῷ μνξ, γνώμονι, καὶ ὁ μνξ, γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ δθ, ὅλον ἄρα τὸ δζ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ δθ, καί ἐστι τὸ μὲν δζ, τὸ ἀπὸ

Eucl. Lib. 13. Fig. 1.



τῆς γδ, τὸ δὲ δθ, τὸ ἀπὸ δα, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σχόλιον, Ἀνάλυσις καὶ Σύνθεσις τί;

Ἀνάλυσις, ἐστὶ λῆψις τοῦ ζητουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων, ὡς ὁμολογουμένου, ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Σύνθεσις, ἐστὶ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων, ἐπὶ τὴν τοῦ ζητουμένου κατάληψιν.

Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς αβ, κείσθω ἴση ἡ αδ. Λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ δα. ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ, ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν γα, αδ, κατὰ τὴν δ΄: τοῦ β΄: μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν γα, αδ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν γα, αδ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ γα, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ἀλλὰ τῷ μὲν δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, κατὰ τὴν α΄: τοῦ ϛ΄: ἴσον ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, διπλῆ γὰρ ἡ βα, τῆς αδ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, κατὰ τὴν ιζ΄: τοῦ ϛ΄: ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, κατὰ τὴν β΄: τοῦ β΄: ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἐστί, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, κατὰ τὴν α΄: τοῦ ϛ΄: διπλῆ γὰρ ἡ αβ, τῆς αδ.

Σύνθεσις, τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, κατὰ τὴν δ΄: τοῦ β΄: ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἐστί, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσον ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ὥστε κατὰ τὴν δ΄: τοῦ β΄: τὸ ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ἐστί, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, ἐστὶ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

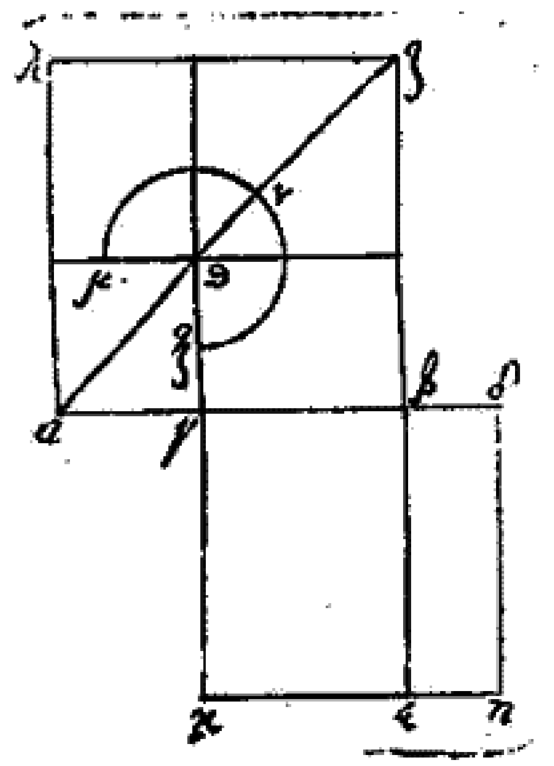
Πρό-

Πρότασις Β': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύναται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, τμήματος ἑαυτῆς τοῦ αγ, πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ αγ, διπλῆ ἔστω ἡ γδ. Λέγω, ὅτι τῆς γδ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ γβ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν αβ, γδ, τετράγωνα τὰ αζ, γη, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ αζ, τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ζβ, ἐπὶ τὸ ε. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ αζ, τοῦ αθ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ μνξ, γνώμων τοῦ αθ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ δγ, τῆς γα, τετραπλ: ἄρα καὶ τὸ α': πόρισμ: τῆς κ': τοῦ ϛ': τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, τουτέστι τὸ γη, τοῦ αθ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ μνξ, γνώμων τετραπλάσιος τοῦ αθ, ἴσος ἄρα ὁ μνξ, γνώμων τῷ γη, καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ δγ, τῆς αγ, ἴση δὲ ἡ μὲν δγ, τῇ γκ, ἡ δὲ αγ, τῇ γθ, διπλῆ ἄρα ἡ κγ, τῆς γθ, διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ κβ, τοῦ βθ, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λθ, θβ, διπλάσια τοῦ βθ, ἴσα γὰρ ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν μγ': τοῦ α': ἴσον ἄρα τὸ κβ, τοῖς λθ, θβ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ μνξ, γνώμων ὅλῳ τῷ γη, ἴσος, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ζθ, τῷ βη, ἐστὶν ἴσον, καὶ ἔστι τὸ μὲν βη, τὸ ὑπὸ τῶν γδ, βδ, ἴση γὰρ ἡ γδ, τῇ δη, τὸ δὲ θζ, τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γδ, δβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ, καὶ κατὰ τὴν ιζ': ἄρα τοῦ ϛ': ἔστιν ὡς ἡ γδ, πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ γβ, πρὸς τὴν βδ, μείζων δὲ ἡ δγ, τῆς γβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ γβ, τῆς βδ. τῆς γδ, ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ γβ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 2.



ΛΗ̃ΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς αγ, μείζων ἐστὶ τῆς βγ, οὕτω δεικτέον. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω, εἰ δυνατὸν, ἡ βγ, τῆς γα, διπλῆ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, πενταπλάσιον ἄρα ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν βγ, γα, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς γα, κατὰ τὴν δ': ἄρα τοῦ β': τὸ ἀπὸ τῆς βα, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βγ, γα, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ βγ, διπλασία τῆς αγ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἡ ἐλάττων τῆς βγ, βγ, (διπλασίων ἐστὶ τῆς γα,) πολλῷ γὰρ μεῖζον τὸ ἄτοπον, ἡ ἄρα τῆς αγ, διπλῆ, μείζων ἐστὶ τῆς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ Εἰρημένου Θεωρήματος ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ γδ, τμήματος ἑαυτῆς τοῦ δα, πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ δα, διπλῆ κείσθω ἡ αβ. Λέγω, ὅτι ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αγ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αγ, κατὰ τὴν ιζʹ: ἄρα τοῦ ςʹ: τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, ἴσον, διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ βα, τῆς αδ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν βα, αγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τετραπλάσιον ἄρα, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ δα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ, δα, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, πενταπλάσιον δέ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, ἔστι δὲ διὰ τὴν ὑπόθεσιν.

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ, τὰ ἀπὸ τῶν δα, αγ, ἐστὶ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. διελόντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν βα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, αγ, ὅπερ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γα, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ τῶν βα, αγ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βα, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, μείζων δὲ ἡ βα, τῆς αγ, μείζων ἄρα καὶ ἡ αγ, τῆς γβ, ἡ αβ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αγ.

Πρότασις Γʹ: Θεώρημα.

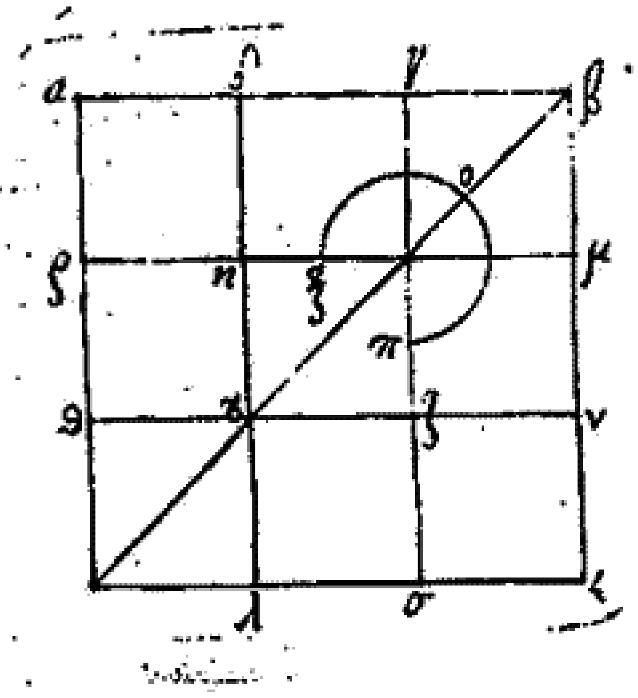
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τετμήσθω ἡ αγ, δίχα κατὰ τὸ δ. Λέγω, ὅτι πεντα-

πλά-

πλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αε, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γδ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, τουτέστι τὸ ρσ, τοῦ ζη. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ρσ, τὸ ἄρα γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ρσ, τετραπλάσιον δὲ τὸ ρσ, τοῦ ζη, τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ γε, τοῦ ζη. καὶ πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ, τῇ δγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ θκ, τῇ κζ, ὥστε καὶ τὸ ηζ, τετράγ: ἴσον ἐστὶ τῷ θλ, τετραγώνῳ, ἴση ἄρα ἡ ηκ, τῇ κλ, τουτέστιν ἡ μν, τῇ νε, ὥστε καὶ τὸ μζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ζε. ἀλλὰ τὸ μζ, ἔστι καὶ τῷ γη, καὶ τὸ γη, ἄρα τῷ ζε, ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ γν, ὁ ἄρα ξοπ, γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ γε, ἀλλὰ τὸ γε, τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ηζ, ἄρα καὶ ὁ ξοπ, γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ζη, τὸ ἄρα δν, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ηζ, τετρ. αγ: καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν δν, τὸ ἀπὸ τῆς δβ, τὸ δὲ ηζ, τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δβ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 3.



Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ, καὶ τῆς αγ, ἡμίσεια ἡ γδ. Λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς βδ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, διελόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, ἔστι γὰρ διπλῆ ἡ αγ, τῆς γδ,

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γδ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, συνθέντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς δβ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

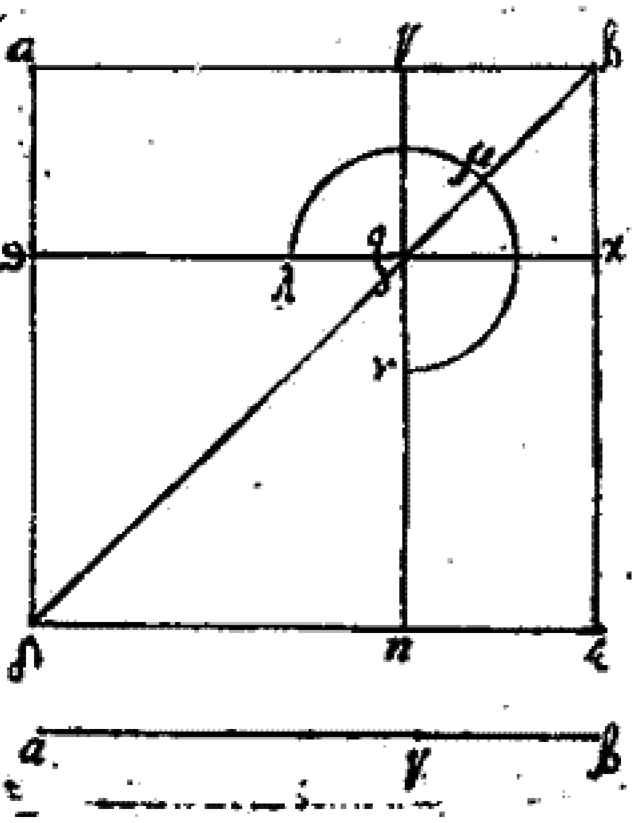
Πρό-

Πρότασις Δ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, καὶ τὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αδεβ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ ακ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ θη, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ακ, τῷ θη, καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ αζ, τῷ ζε, κοινὸν προσκείσθω τὸ γκ, ὅλον ἄρα τὸ ακ, ὅλῳ τῷ γε, ἐστὶν ἴσον, τὰ ἄρα ακ, γε, τοῦ ακ, ἐστὶ διπλάσια. ἀλλὰ τὰ ακ, γε, ὁ λμν, γνώμων ἐστὶ, καὶ τὸ γκ, τετράγωνον. ἄρα ὁ λμν, γνώμων καὶ τὸ γκ, τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ακ, ἀλλὰ μὴν τὸ ακ, τῷ θη, ἐδείχθη ἴσον, ὁ ἄρα λμν, γνώμων, καὶ τὸ γκ, τετράγωνον, διπλάσιά ἐστι τοῦ θη. ὥστε καὶ ὁ λμν, γνώμων, καὶ τὰ γκ, θη, τετράγωνα, τριπλάσιά εἰσι τοῦ ηθ, τετραγώνου, καὶ ἔστιν ὁ μὲν λμν, γνώμων, καὶ τὰ γκ, θη, τετράγωνα, ὅλον τὸ αε, καὶ γκ. ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγ: τὸ δὲ ηθ, τὸ ἀπὸ τῆς αγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγ: τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 4.



Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ αἰτία

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, δηλόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. ὥστε τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἔστι δὲ, ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ.

Σιω.

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

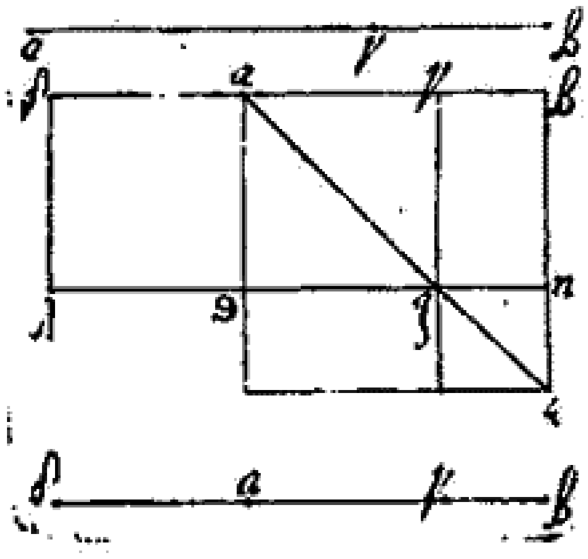
Ἐπεὶ οὖν ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστι μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ· συνθέντι, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, ἐστὶ τετράγωνα, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ.

Πρότασις Ε΄: Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι, ὅλη ἡ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τῇ αγ, ἴση κείσθω ἡ αδ. Λέγω, ὅτι ἡ δβ, εὐθεῖα, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ αβ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αε, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, κατὰ τὸ γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ γθ. ἀλλὰ τὸ μὲν γε, ἴσον ἐστὶ τῷ θε, τὸ δὲ γθ, ἴσον τῷ δθ, καὶ τὸ δθ, ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ θε, κοινὸν προκείσθω τὸ θβ, ὅλον ἄρα τὸ δη, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ αε, καὶ ἔστι τὸ μὲν δη, τὸ ὑπὸ τῶν βδ, δα, ἴση γὰρ ἡ δα, τῇ δλ, τὸ δὲ αε, τῷ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βδ, δα, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, μείζων δὲ ἡ δβ, τῆς βα, μείζων ἄρα καὶ ἡ βα, τῆς αδ. ἡ ἄρα βδ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ α, καὶ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αβ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 5.



Ἀνάλυσις τοῦ εἰρημένου θεωρήματος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τῇ αγ, ἴση κείσθω ἡ αδ. Λέγω, ὅτι ἡ δβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ βα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ. ἀλλ' ἡ αδ, ἐστὶν ἴση τῇ αγ, ἄρα ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, διελόντι ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἴση δὲ ἡ αδ, τῇ αγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ. ἔστι δὲ, ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ.

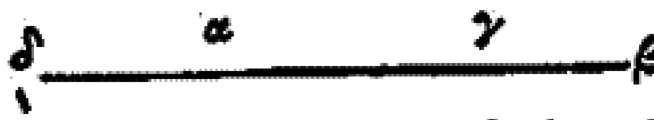
Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ αδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν βγ. ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ αδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, ἡ ἄρα δβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αβ.

Πρότασις ϛʹ. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ἀλογόςἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ αβ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ. Λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν αγ, γβ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βα, ἐπὶ τὸ δ, καὶ κείσθω τῆς βα, ἡμίσεια ἡ αδ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ αβ, τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ τῇ μείζονι αγ, πρόσκειται ἡ αδ, ἡμίσεια οὖσα τῆς αβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, πενταπλάσιόν ἐστι, κατὰ τὴν αʹ. τοῦ παρόντος, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δα, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς



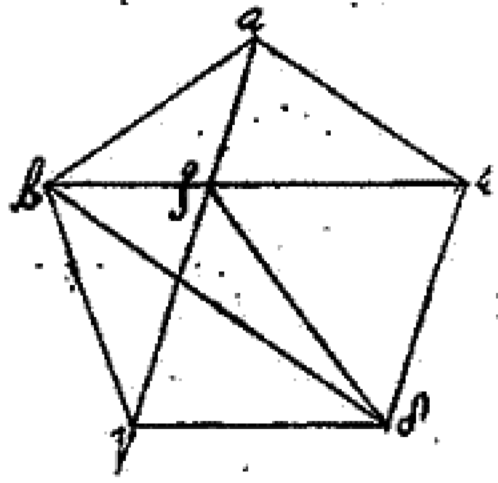
γδ, τῷ ἀπὸ τῆς δα, κατὰ τὴν ιγʹ. τοῦ ιʹ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς δα, ῥητὴ γὰρ ἐστὶν ἡ δα, ἡμίσεια οὖσα τῆς αβ, ῥητῆς οὔσης. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ γδ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δα, λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἄρα μήκει ἡ γδ, τῇ δα, αἱ γδ, δα, ἄρα ῥηταί, εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ αγ. πάλιν ἐπεὶ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, ἀποτομῆς, παρὰ τὴν αβ, ῥητὴν παραβληθὲν, πλάτος ποιεῖ τὴν βγ, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς, κατὰ τὴν ϙζʹ. τοῦ ιʹ. παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην, ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἡ γβ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αγ, ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι, ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς, ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ αβγδε, αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς, αἱ πρὸς τοῖς α, β, γ, δηλονότι ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν. Λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγδε, πεντάγωνον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βε, ζδ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ γβ, βα, δυσὶ ταῖς βα, αε, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γβα, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαε, βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ βε, ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ αβε, τριγ: ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι

Eucl. lib. 13. Fig. 6.



ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ βγα, τῇ ὑπὸ βεα, ἡ δὲ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ γαβ, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ αζ, πλευρᾷ τῇ βζ, ἐστὶν ἴση, ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ αγ, ὅλῃ τῇ βε, ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ζγ, λοιπῇ τῇ ζε, ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ γδ, τῇ δε, ἴση. δύο δὴ αἱ ζγ, γδ, δυσὶ ταῖς ζε, εδ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ζδ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ζγδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεδ, ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ ἡ ὑπὸ βγα, γωνία τῇ ὑπὸ αεβ, ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αεδ, ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς α, β, καὶ ἡ ὑπὸ αεδ, ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς α, β, γωνίαις, ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ γδε, ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς α, β, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε, πεντάγωνον.

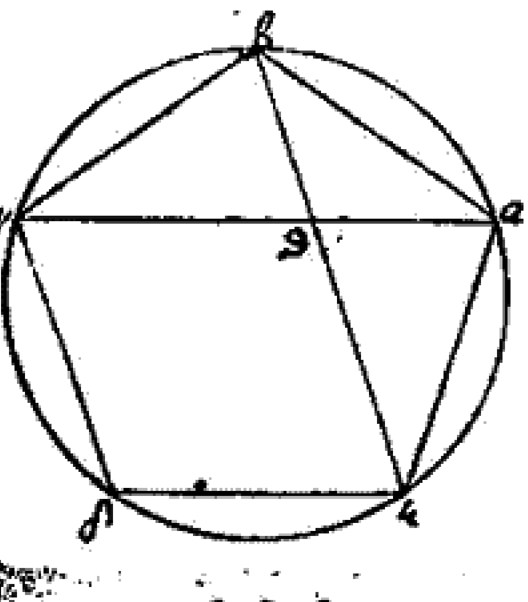
Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι. ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι, αἱ πρὸς τοῖς α, γ, δ, σημείοις. Λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ πεντάγωνον. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βδ, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ βα, αε, δυσὶ ταῖς βγ, γδ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βε, βάσει τῇ βδ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβε, τρίγωνον, τῷ βγδ, τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αεβ, τῇ ὑπὸ γδβ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βεδ, γωνία τῇ ὑπὸ βδε, ἴση, ἐπεὶ πλευρὰ ἡ βε, πλευρᾷ τῇ βδ, ἐστὶν ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αεδ, γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ γδε, ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γδε, ταῖς πρὸς τοῖς α, γ, γωνίαις ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αεδ, ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς α, γ, ἴση ἐστὶ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς α, γ, γωνίαις, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε, πεντάγωνον.

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ α β γ δ ε, δύο γωνίας τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς τοῖς α, β, ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι, αἱ α γ, β ε, τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ θ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ θ, σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα, ἴσα εἰσὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ α β γ δ ε, πεντάγωνον, κύκλος ὁ α β γ δ ε, καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ α ε, α β, δυσὶ ταῖς α β, β γ, ἴσαι εἰσι, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ β ε, βάσει τῇ α γ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ α β ε, τρίγωνον τῷ α β γ, τριγ: ἴσον ἐστι, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία τῇ ὑπὸ α β ε. διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ α θ ε, τῆς ὑπὸ β α θ, γωνίας, ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ α β θ, τριγώνου, κατὰ τὴν λβ': τοῦ α'. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ε α γ, τῆς ὑπὸ β α γ, διπλῆ. ἐπειδὴ καὶ περιφέρεια ἡ ε δ γ, περιφερείας τῆς γ β, διπλῆ ἐστιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ θ α ε, γωνία τῇ ὑπὸ α θ ε, ὥστε καὶ ἡ θ ε, εὐθεῖα τῇ ε α, τουτέστι τῇ α β, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ β α, τῇ α ε, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α β ε, τῇ ὑπὸ β ε α. ἀλλ' ἡ ὑπὸ α β ε, τῇ ὑπὸ β α θ, ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ β ε α, ἄρα τῇ ὑπὸ β α θ, ἐστὶν ἴση, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε α β ε, καὶ τοῦ α β θ, ἐστὶν ἡ ὑπὸ α β ε, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ β α ε, γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ α θ β, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα τὸ α β ε, τριγ: τῷ α β θ, τριγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ ε β, πρὸς τὴν β α, οὕτως ἡ β α, πρὸς τὴν β θ, ἴση δὲ ἡ β α, τῇ ε θ. ὡς ἄρα ἡ β ε, πρὸς τὴν ε θ, οὕτως ἡ ε θ, πρὸς τὴν θ β, μείζων δὲ ἡ β ε, τῆς β α, μείζων ἄρα καὶ ἡ ε θ, τῆς θ β, ἡ β ε, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ θ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἴσον ἐστι τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ α γ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα τὸ γ θ, ἴσον ἐστι τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 7.

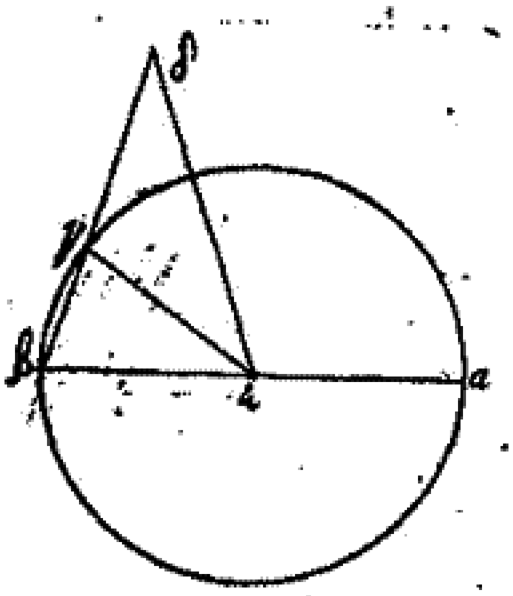


Πρότασις Θʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά, καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ τῶν εἰς τὸν αβγ, κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ βγ, ἑξαγώνου δὲ ἡ γδ, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας. Λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ βδ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ γδ. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ ε, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εβ, εγ, εδ, καὶ διήχθω ἡ βε, ἐπὶ τὸ α, καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά, ἐστὶν ἡ βγ, πενταπλασίων ἄρα ἡ αγβ, περιφέρεια τῆς βγ, περιφερείας, τετραπλασίων ἄρα ἡ αγ, περιφέρεια τῆς γβ, ὡς δὲ ἡ αγ, περιφέρεια πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ ὑπὸ αεγ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ γεβ, τετραπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ αεγ, τῆς ὑπὸ γεβ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εβγ, γωνία τῇ ὑπὸ εγβ, ἡ ἄρα ὑπὸ αεγ, γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ εγβ, κατὰ τὴν λβʹ: τοῦ αʹ: καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ εγ, εὐθεῖα τῇ γδ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν αβγ, κύκλον ἐγγραφομένου, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γεδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γδε, διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ εγβ, τῆς ὑπὸ εδγ. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ εγβ, διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ αεγ, τετραπλασία ἄρα τῆς ὑπὸ εδγ, ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ βεγ, τετραπλασία ἡ ὑπὸ αεγ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εδγ, τῇ ὑπὸ βεγ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε βεγ, καὶ τοῦ βεδ, ἡ ὑπὸ εβδ, γωνία, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βεδ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ εγβ, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα τὸ εβδ, τρίγωνον τῷ εβγ, τριγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βε, οὕτως ἡ εβ, πρὸς τὴν βγ, ἴση δὲ ἡ εβ, τῇ γδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ δγ, πρὸς τὴν γβ, μείζων δὲ ἡ βδ, τῆς δγ, μείζων ἄρα καὶ ἡ δγ, τῆς γβ, ἡ βδ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς, ἐστὶν ἡ δγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 8.



Πρότασις Ιʹ: Πρόβλημα.

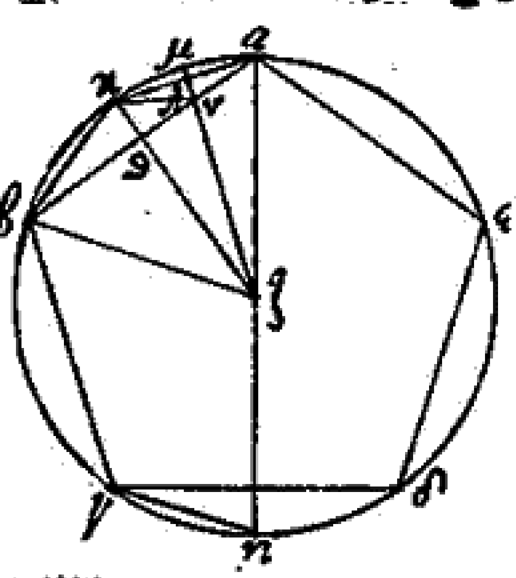
Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένων.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγδε, καὶ εἰς αὐτὸν πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ αβγδε. Λέγω, ὅτι τοῦ αβγ, δε, πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξα-

γώνου,

γώνου, καὶ τὴν τοῦ πενταγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγραφομένων. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ αζ, διήχθω ἐπὶ τὸ η, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὴν αβ, κάθετος ἤχθήτω ἡ ζθ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ, κβ. καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὴν ακ, κάθετος ἤχθω ἡ ζλ. καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κν, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβγη, περιφέρεια τῇ αεδη, περιφερείᾳ, ὧν ἡ αβγ, τῇ αεδ, ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ γη, περιφέρεια λοιπῇ τῇ δη, ἐστὶν ἴση, πενταγώνου γὰρ ἡ γδ, δεκαγώνου ἄρα ἡ γη, καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ζα, τῇ ζβ, καὶ κάθετος ἡ ζθ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αζκ, γωνία τῇ ὑπὸ κζβ, ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ακ, τῇ κβ, ἐστὶν ἴση, διπλῆ ἄρα ἡ αβ, περιφέρεια τῆς βκ, περιφερείας, δεκαγώνου ἄρα πλευρά, ἐστὶν ἡ ακ, εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ακ, τῆς κμ, ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αβ, περιφέρεια τῆς βκ, περιφερ: ἴση δὲ ἡ γδ, περιφέρεια τῇ αβ, περιφερείᾳ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ γδ, περιφέρεια τῆς βκ, περιφερ: ἔστι δὲ ἡ γδ, περιφέρεια τῆς γη, διπλῆ, ἴση ἄρα ἡ γη, περιφέρ: τῇ βκ, περιφερείᾳ. ἀλλ᾽ ἡ βκ, τῆς κμ, ἐστὶ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ακ, καὶ ἡ γη, ἄρα τῆς κμ, διπλῆ ἐστιν, ἴση γὰρ ἡ γβ, περιφέρεια, τῇ βα, περιφερ: καὶ ὅλη ἄρα ἡ ηβ, περιφέρεια τῆς βμ, ἐστὶ διπλῆ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηζβ, γωνίας τῆς ὑπὸ βζμ, διπλῆ ἐστι καὶ τὴν λγ᾽: τοῦ ϛ᾽: ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ηζβ, καὶ τῆς ὑπὸ ζαβ, διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ζαβ, τῇ ὑπὸ αβζ, καὶ ἡ ὑπὸ βζν, ἄρα τῇ ὑπὸ ζαβ, ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε αβζ, καὶ τοῦ βζν, ἡ ὑπὸ αβζ, γωνία ἐστί. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αζβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βνζ, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα καὶ τὸ αβζ, τρίγωνον, τοῦ βζν, τριγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ αβ, εὐθεῖα πρὸς τὴν βζ, οὕτως ἡ ζβ, πρὸς τὴν βν, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βν, ἴσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ζβ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αλ, τῇ λκ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ λν, βάσις ἄρα ἡ κν, βάσει τῇ αν, ἐστὶν ἴση, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ λκν, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ λαν, ἐστὶν ἴση. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ λαν, τῇ ὑπὸ κβν, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ λκν, ἄρα τῇ ὑπὸ κβν, ἐστὶν ἴση, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ακβ, καὶ τοῦ ακν, ἡ ὑπὸ νακ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ακβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ κνα, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ κβα, τρίγ: τοῦ κνα, τριγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ βα, εὐθεῖα πρὸς τὴν ακ, οὕτως ἡ κα, πρὸς τὴν αν, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα, αν, ἴσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ακ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῶν αβ, βν, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βν, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν βα, αν, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βζ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ακ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν βα, πενταγώνου πλευρά, ἡ δὲ βζ, ἑξαγώνου, ἡ δὲ ακ, δεκαγώνου, ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 9.



Πρό-