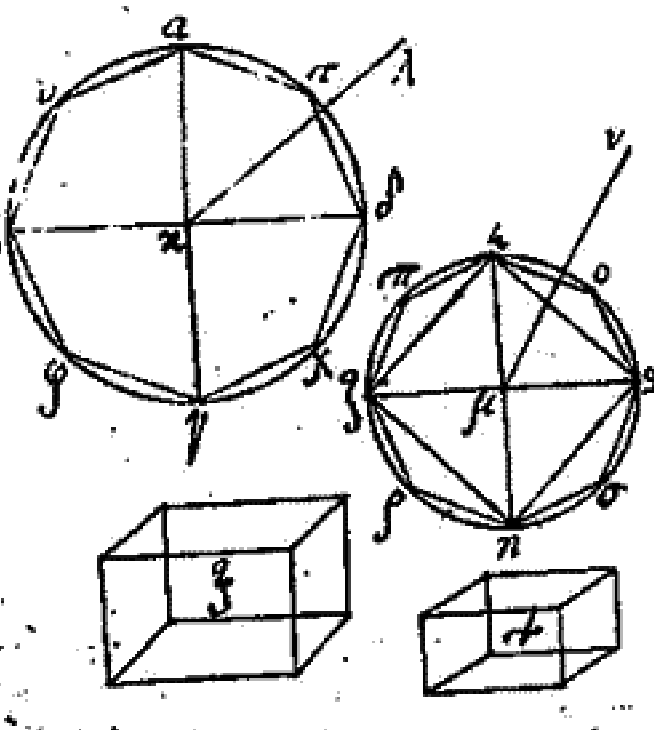
ἐλέγχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων, οὔτε μείζων, ἀλλὰ τριπλάσιος, ὡς ἐδείχθη, ὥστε ὁ κῶνος, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι, καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, κύκλοι. ἄξονες δὲ οἱ κ λ, μ ν, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ α γ, ε η. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, οὕτως ὁ α λ, κῶνος πρὸς τὸν ε ν. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον,

Eucl. Lib. 12. Fig. 15.

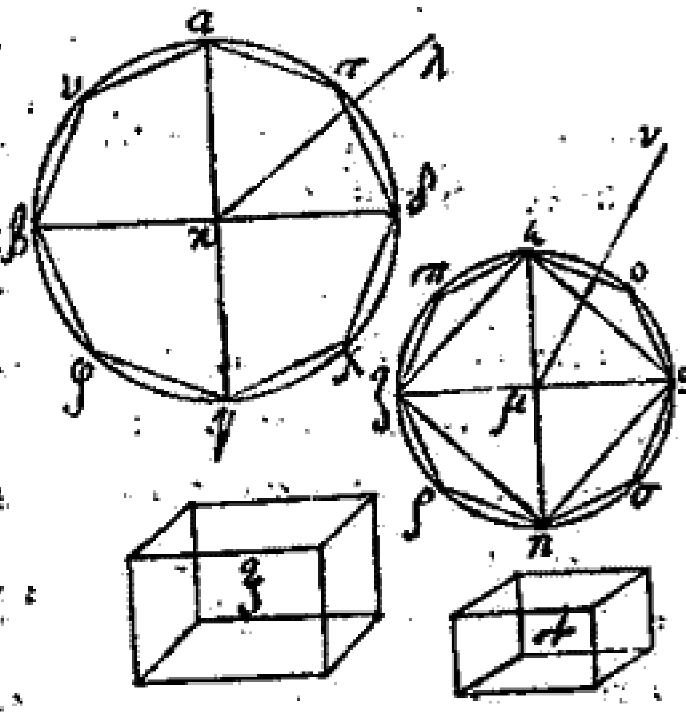


οὕτως ὁ α λ, κῶνος πρὸς ἔλαττον τοῦ ε ν, κώνου στερεὸν, ἢ πρὸς μεῖζον, ἔστω πρὸς ἔλαττον τὸ ξ. καὶ ᾧ ἔλασσον τὸ ξ, στερ: τοῦ ε ν, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ψ, στερεὸν, ὁ ε ν, κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς ξ, ψ, στερεοῖς. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ε ζ η θ, κύκλον τετράγ: τὸ ε ζ η θ, τὸ ἄρα τετράγ: μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. Ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ ε ζ η θ, τετραγ: πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ, ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγ: καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς, ἡμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης, κατὰ γὰρ τὴν ς': τοῦ παρόντος, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἐλάττων δ' ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμ: ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ε ζ η θ, τετράγ: κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ ε ζ, ζ η, η θ, θ ε, περιφέρειαι, κατὰ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ ο, ο ε, ε π, π ζ, ζ ρ, ρ η, η σ, σ θ, ἕκαστον ἄρα τῶν θ ο ε, ε π ζ, ζ ρ η, η σ θ, τριγώνων, μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. Ἀνεστάθω ἐφ' ἑκάστου τῶν θ ο ε, ε π ζ, ζ ρ η, η σ θ, τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνῦντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες, ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, κατὰ τὴν α: τοῦ ι: ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ ψ, στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν θ ο ε, ε π ζ, ζ ρ η, η σ θ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ θ ο ε π ζ ρ η σ, πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ ξ, στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν

α β γ δ,

αβγδ, κύκλον τῷ θοεπζρησ, πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγ: τὸ δταυβφγχ, πολύγ: καὶ ἀνεστάθω ἐπ' αὐτῷ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ αλ, κώνῳ. ἐπεὶ οὖν (1) ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εη, οὕτω τὸ δταυβφγχ, πολύγ: πρὸς τὸ θοεπζρησ, πολύγ: ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εη, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος (2) πρὸς τὸν εζηθ, κύκλ: καὶ ὡς ἄρα, ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτω τὸ δταυβφγχ, πολύγ: κατὰ τὴν αὐτὴν, πρὸς τὸ θοεπζρησ, πολύγ: ὡς δὲ ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλ: οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὸ ξ, στερ: καὶ διὰ τὴν ια: τοῦ ε: ὡς τὸ δταυβφγχ, πολύγωνον πρὸς τὸ θοεπζρησ, πολύγων:

Eucl. Lib. 12. Fig. 16.



οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ δταυβφγχ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ χ, σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ θοεπζρησ, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον. καὶ ὡς ἄρα ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὸ ξ, στερεὸν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ δταυβφγχ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ θοεπζρησ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, οὕτω τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ εν, κώνῳ πυραμίδα. μείζων ὁ αλ, κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ξ, στερεὸν τῆς ἐν τῷ εν, κώνῳ πυραμίδος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εν, κώνου στερεόν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ὡς ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αλ, κώνου στερεόν. Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐστιν ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εν, κώνου στερεόν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ ξ, ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς τὸν αβγδ, οὕτω τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν αλ, κῶνον. ἀλλ' ὡς τὸ ξ, στερ: πρὸς τὸν αλ, κῶνον, οὕτως ὁ εν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αλ, κώνου στερεόν, καὶ ὡς ἄρα ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς τὸν αβγδ, οὕτως ὁ εν, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αλ, κώνου, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εν, κώνου στερεοῦ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ, πρὸς ἔλασσον, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὸν εν, κῶνον. ἀλλ' ὡς ὁ κῶνος

πρὸς

(1) Κατὰ καὶ τὴν α: τοῦ παρόντος.
(2) Κατὰ τὴν β: τοῦ αὐτοῦ.

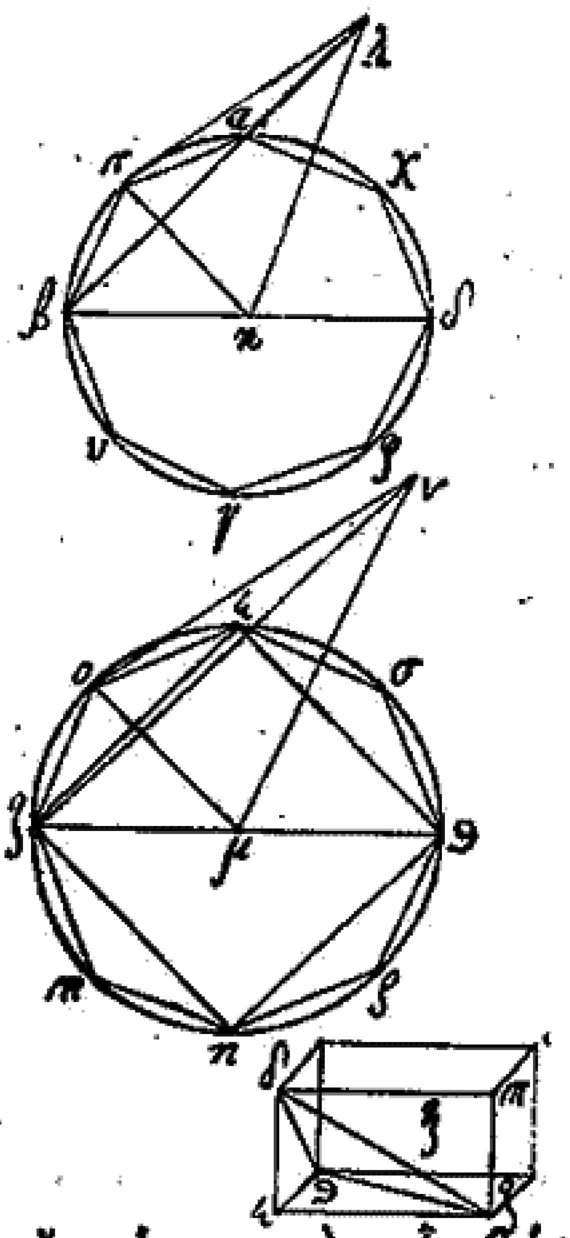
πρὸς τὸν κῶνον, ἔστι καὶ ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου, καὶ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ὡς ἄρα ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς τοῖς κώνοις κύλινδροι. οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων, αἱ β δ, ζ θ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων, ἢ κυλίνδρων οἱ κ λ, μ ν. Λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ α β γ δ, κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσεις μὲν ὁ ε ζ η θ, κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β δ, πρὸς τὴν ζ θ. εἰ γὰρ μὴ, ἕξει πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ε ζ η θ ν, κώνου στερεὸν, ἢ τριπλασίονα, ἢ πρὸς μεῖζον.

Eucl. Lib. 12. Fig. 17.

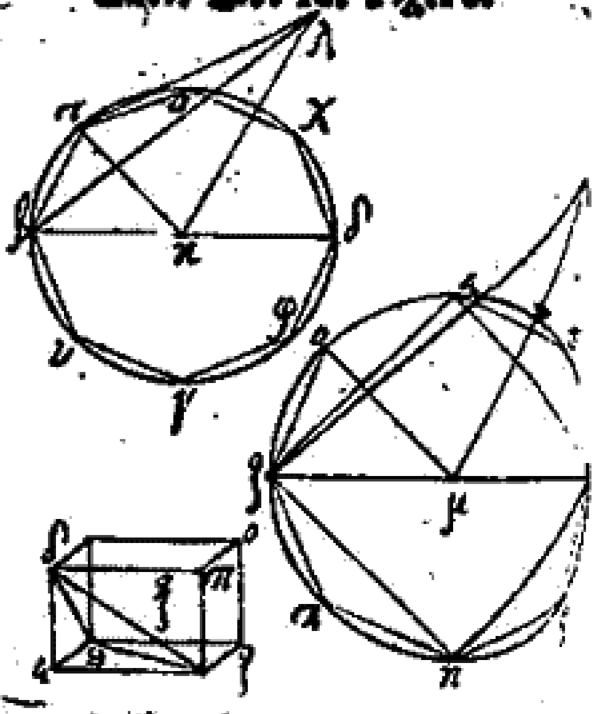


Ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ ξ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ε ζ η θ, κύκλον τετράγωνον τὸ ε ζ η θ, καὶ τοῦτο μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ε ζ η θ, κύκλου. καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ ε ζ η θ, τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ, ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν δὴ αἱ ε ζ, ζ η, η θ, θ ε, περιφέρειαι δίχα, κατὰ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ο, ο ζ, ζ π, π η, η ρ, ρ θ, θ σ, σ ε, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ε ο ζ, ζ π η, η ρ θ, θ σ ε, μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ε ζ η θ, κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ε ο ζ, ζ π η, η ρ θ, θ σ ε, τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνῦντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ε ζ η θ ν, κῶνος τοῦ ξ, στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ε ο, ο ζ, ζ π, π η, η ρ, ρ θ, θ σ, σ ε, λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ε ο ζ π η ρ θ σ, πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ ξ, στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α β γ δ, τῷ ε ο ζ π η ρ θ σ, πολυγ: ὅμοιόν τε καὶ

ὁμοίως

ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ατβυγφδχ· καὶ ἀνεστάθω ἀπ' αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ατβυγφδχ, πολύγων: κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ λβτ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ εοζπρηθσ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ νζο, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ κτ, μο. καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ αβγδλ, κῶνος τῷ εζηθν, κώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ, οὕτως ὁ κλ, ἄξων πρὸς τὸν μν, ἄξονα, ὡς δὲ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ, οὕτως ἡ βκ, πρὸς τὴν ζμ, καὶ ὡς ἄρα ἡ βκ, πρὸς τὴν ζμ, οὕτως ἡ κλ, πρὸς τὴν μν, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ βκ, πρὸς τὴν κλ, οὕτως ἡ ζμ, πρὸς τὴν μν, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ βκλ, ζμν, ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ βκλ, ζμν, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ βκλ, τρίγων: τῷ ζμν, τριγών: πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ βκ, πρὸς τὴν κτ, οὕτως ἡ ζμ, πρὸς τὴν μο, καὶ περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ βκτ, ζμο. ἐπειδήπερ ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ βκτ, τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ζμο, γωνία τῶν πρὸς τῷ μ, κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν. ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ βκτ, τρίγων: τῷ ζμο, τριγ: πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ βκ, πρὸς τὴν κλ, οὕτως ἡ ζμ, πρὸς τὴν μν, ἴση δὲ ἡ μὲν βκ, τῇ κτ, ἡ δὲ ζμ, τῇ μο, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κτ, πρὸς τὴν κλ, οὕτως ἡ μο, πρὸς τὴν μν, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τκλ, ομν, (ὀρθαὶ γὰρ) αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ λκτ, τρίγ: τῷ νμο, τριγ: καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν βκλ, ζμν, τριγώνων, ἔστιν ὡς ἡ λβ, πρὸς τὴν βκ, οὕτως ἡ νζ, πρὸς τὴν ζμ. διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν βκτ, ζμο, ἔστιν ὡς ἡ κβ, πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ζο, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ βλ, πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ νζ, πρὸς τὴν ζο. πάλιν ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν λτκ, νομ, τριγ: ἔστιν ὡς ἡ λτ, πρὸς τὴν τκ, ἡ νο, πρὸς τὴν ομ. διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν κβτ, ομζ, τριγ: ἔστιν ὡς ἡ κτ, πρὸς τὴν τβ, οὕτως ἡ μο, πρὸς τὴν οζ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ λτ, πρὸς τὴν τβ, οὕτως ἡ νο, πρὸς τὴν οζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ λβ, πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ νζ, πρὸς τὴν ζο. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ τλ, πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ νο, πρὸς τὴν οζ, τῶν λτβ, νοζ, ἄρα τριγών: ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ λτβ, νοζ, τρίγ: ὥστε καὶ ὅμοια, καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ βκτ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ζμο, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται, ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἡ

Eucl. Lib. 12. Fig. 18.



ἄρα

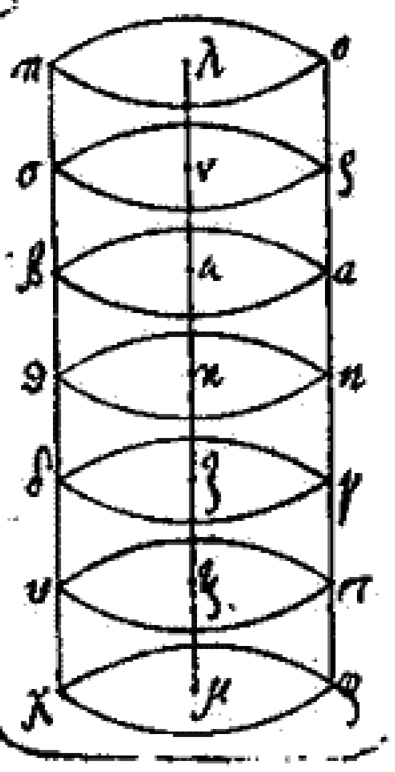
ἄρα β κ τ λ, πυραμὶς, πρὸς τὴν ζ μ ο ν, πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ β κ, πρὸς τὴν ζ μ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν α, χ, δ, φ, γ, υ, εὐθείας ἐπὶ τὸ κ, καὶ ἀπὸ τῶν ε, σ, θ, ρ, η, π, ἐπὶ τὸ μ, καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ τῶν τριγώνων πυραμίδας τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐχούσας τοῖς κώνοις. δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἥπερ ἡ β κ, ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ζ μ, ὁμόλογον πλευρ: τουτέστιν ἥπερ ἡ β δ, πρὸς τὴν ζ θ. ἀλλ᾽ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β κ τ λ, πυραμὶς πρὸς τὴν ζ μ ο ν, πυραμ: οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ α τ β υ γ φ δ χ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ε ο ζ π η ρ θ σ, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον. ὥστε καὶ ἡ ὅλη πυραμὶς πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ β δ, πρὸς τὴν ζ θ. ὑπόκειται δὲ ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ α β γ δ, κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὸ ξ, στερ: τριπλασίονα λόγον ἔχον, ἥπερ ἡ β δ, πρὸς τὴν ζ θ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α β γ δ λ, κῶνος, πρὸς τὸ ξ, στερ: οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς α τ β υ γ φ δ χ λ, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα ε ο ζ π η ρ θ σ ν, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ α β γ δ λ, κῶνος, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ α τ β υ γ φ δ χ λ, πυραμίδα, οὕτως τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὴν ε ο ζ π η ρ θ σ ν, πυραμίδα, μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτὴν, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ξ, στερ: τῆς ε ο ζ π η ρ θ σ ν, πυραμίδος, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ὁ α β γ δ λ, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ε ζ η θ ν, κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ β δ, πρὸς τὴν ζ θ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ ε ζ η θ ν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ α β γ δ λ, κώνου στερεὸν, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ζ θ, πρὸς τὴν β δ. Λέγω, ὅτι ὁ α β γ δ λ, κῶνος οὐδὲ πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ε ζ θ η ν, κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ β δ, πρὸς τὴν ζ θ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω, ἐχέτω δηλονότι πρότερον ὁ α β γ δ λ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ε ζ η θ ν, κώνου, τὸ ξ, τριπλασίονα λόγον, ἀνάπαλιν ἄρα τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν α β γ δ λ, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ζ θ, πρὸς τὴν β δ, ὥστε ὡς τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν α β γ δ λ, κῶνον, οὕτως ὁ ε ζ η θ ν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ α β γ δ λ, κώνου στερεὸν, καὶ ὁ ε ζ η θ ν, κῶνος ἄρα πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ α β γ δ λ, κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ζ θ, πρὸς τὴν β δ, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ α β γ δ λ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ε ζ η θ ν, κώνου, ἥπερ ἡ ζ θ, πρὸς τὴν β δ, τριπλασίονα λόγον ἔχει. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττόν τι. ὁ α β γ δ λ, ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ε ζ η θ ν, κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ β δ, πρὸς τὴν ζ θ. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλ: γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου, ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ, καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ. ἐδείχθη γὰρ, ἐν τῷ ι: τοῦ παρόντος, πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ αδ, ἐπιπέδῳ τῷ ηθ, τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς αβ, γδ, καὶ συμβαλλέτω τῷ εζ, ἄξονι κατὰ τὸ κ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ὡς ὁ βη, κύλινδρος πρὸς τὸν ηδ, κύλιν: οὕτως ὁ εκ, ἄξων πρὸς τὸν κζ, ἄξονα. Ἐκβεβλήσθω ὁ εζ, ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ λ, μ, σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ μὲν εκ, ἄξονι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ εν, νλ, τῷ δὲ κζ, ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ζξ, ξμ· καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν λ, ν, ξ, μ, σημείων, ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς αβ, γδ· καὶ νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν λ, ν, ξ, μ, ἐπιπέδοις περὶ τὰ κέντρα τὰ λ, ν, ξ, μ, κύκλοι, οἱ οπ, ρσ, τυ, φχ, ἴσοι τοῖς αβ, γδ· καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ πρ, ρβ, δτ, τχ. καὶ ἐπεὶ οἱ λν, νε, εκ, ἄξονες, ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ κατὰ τὸν ια: ἄρα τοῦ παρόντ: οἱ πρ, ρβ, βη, κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις, ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις, ἴσοι ἄρα καὶ οἱ πρ, ρβ, βη, κύλινδροι. ἐπεὶ οὖν οἱ λν, νε, εκ, ἄξονες ἴσοι ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ πρ, ρβ, βη, κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν νλ, νε, εκ, τῷ πλήθει τῶν πρ, ρβ, βη, ὁσαπλασίων ἄρα ὁ κλ, ἄξων τοῦ εκ, ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ πη, κύλινδρος τοῦ βη, κυλίνδρου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ μκ, ἄξων τοῦ κζ, ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶν καὶ ὁ χη, κύλινδρος τοῦ ηδ, κυλίν: καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κλ, ἄξων τῷ κμ, ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ πη, κύλιν: τῷ χη, κυλίν: εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου. καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, ἀξόνων μὲν τῶν εκ, κζ, κυλίνδρων δὲ τῶν βη, ηδ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν εκ, ἄξονος, καὶ τοῦ βη, κυλίνδρου, ὅ, τε κλ, ἄξων καὶ ὁ πη, κύλινδρος, τοῦ δὲ κζ, ἄξονος καὶ ηδ, κυλίνδρου, ὅ, τε κμ, ἄξων, καὶ ὁ ηχ, κύλιν: καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ κλ, ἄξων τοῦ κμ, ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ πη, κύλιν: τοῦ ηχ, κυλίνδρ: καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάττων, ἐλάττων. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ εκ, ἄξων πρὸς τὸν κζ, ἄξονα, οὕτως ὁ βη, κύλιν: πρὸς τὸν ηδ, κυλινδ: κατὰ τὸν ε': ὅρον τοῦ ε': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl.Lib.12.Fig.19.



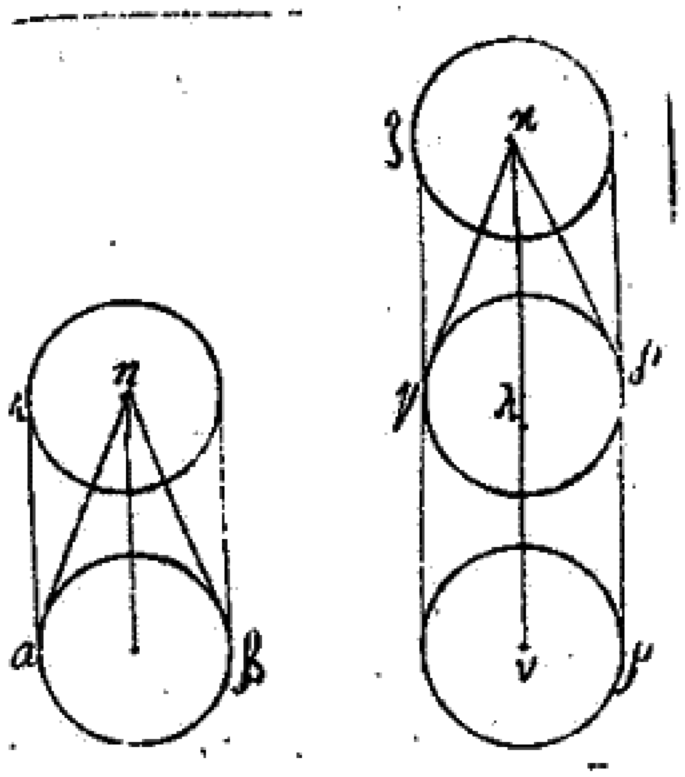
Πρό

Πρότασις ΙΔ': Θεώρημα.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν αβ, γδ, κύλινδροι οἱ ζδ, εβ. Λέγω,
ὅτι ὡς ὁ εβ, κύλινδ: πρὸς τὸν ζδ, κύλιν: οὕτως ὁ ηθ, ἄξων πρὸς τὸν κλ, ἄ-
ξονα. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ κλ, ἄξων ἐπὶ τὸ ν, σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ηθ, ἄξονι

Eucl. Lib. 12. Fig. 20.



ἴσος ὁ λν, ἄξων. καὶ περὶ ἄξονα τὸν λν, κύ-
λινδρος νενοήσθω ὁ γμ. Ἐπεὶ οὖν οἱ εβ, γμ,
κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶ, πρὸς ἀλλήλους
εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις ἀλ-
λήλαις, ἴσοι ἄρα καὶ οἱ εβ, γμ, κύλιν: ἀλλή-
λοις. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ζμ, ἐπιπ: τέτμηται
τῷ γδ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδ:
ἔστιν ἄρα, καὶ τὸν αὐωτέρω, ὡς ὁ γμ, κύλινδ: πρὸς
τὸν ζδ, κύλινδρον, οὕτως ὁ λν, ἄξων, πρὸς τὸν
κλ, ἄξονα. ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν γμ, κύλιν: τῷ
εβ, κυλίν: ὁ δὲ λν, ἄξων τῷ ηθ, ἄξονι. ἔ-
στιν ἄρα ὡς ὁ εβ, κύλιν: πρὸς τὸν ζδ, κύλιν: οὕ-
τως ὁ ηθ, ἄξων πρὸς τὸν κλ, ἄξονα. ὡς δὲ ὁ
εβ, κύλινδ: πρὸς τὸν ζδ, κύλιν: οὕτως ὁ αβη,
κῶνος πρὸς τὸν γδκ, κῶνον, τριπλάσιοι γὰρ οἱ κύλιν: τῶν κώνων, καὶ τὴν ι: τὰ
παρόντ: καὶ ὡς ἄρα ὁ ηθ, ἄξων πρὸς τὸν κλ, ἄξονα, οὕτως ὁ αβη, κῶνος πρὸς
τὸν γδκ, κῶνον, καὶ ὁ εβ, κύλιν: πρὸς τὸν δζ, κύλιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

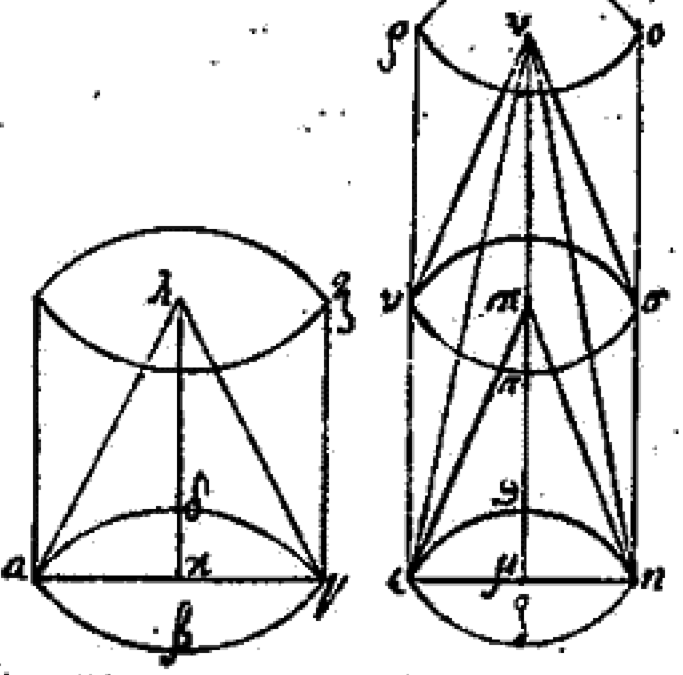
Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ αβγδ, εζηθ, κύ-
κλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ αγ, εη, ἄξονες δὲ οἱ κλ, μν, οἵτινες καὶ ὕψη εἰ-
σὶ τῶν κώνων, ἢ κυλίνδρων. καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ αξ, εο, κύλινδροι. Λέ-
γω, ὅτι τῶν αξ, εο, κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψε-
σι, τουτέστιν ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτως τὸ μν, ὕψος
πρὸς τὸ λκ, ὕψος. τὸ γὰρ λκ, ὕψος τῷ μν, ὕψει, ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ οὔ.
ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστιν ἄρα καὶ ὁ αξ, κύλιν: τῷ εο, κυλίν: ἴσος, καὶ κατὰ τὴν
ια:

ιά: τοῦ παρ: οἱ κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἴση ἄρα ἡ α β γ δ, βάσις τῇ ε ζ η θ, βάσει, ὥστε καὶ ἀντιπεπόνθασιν. ὡς ἡ α β γ δ, βάσις πρὸς τὴν ε ζ η θ, βάσιν, οὕτω τὸ μ ν, ὕψος πρὸς τὸ κ λ, ὕψος.

Eucl. Lib. 12. Fig. 21.



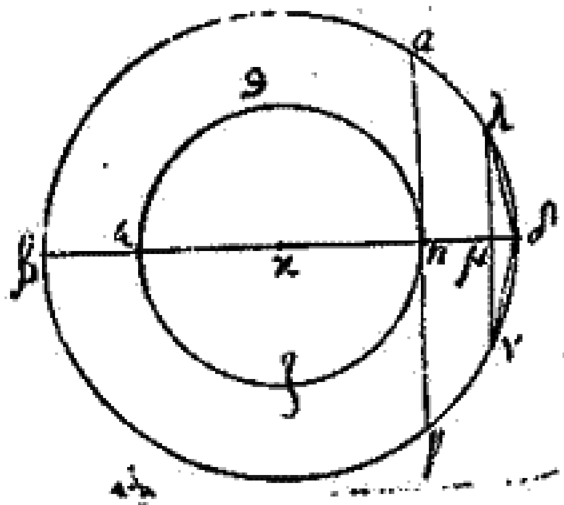
Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ κ λ, ὕψος τῷ μ ν, ἴσον, ἀλλὰ μεῖζον. Ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ μ ν, ὕψους τῷ κ λ, ἴσον τὸ π μ. καὶ κείσθω τῷ κ λ, ἴσον τὸ π μ. καὶ διὰ τοῦ π, σημείου, τεμνέσθω ὁ ε ο, κύλινδρος τῷ τ υ σ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τῶν ε ζ η θ, ρ ο, κύκλων. καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ ε ζ η θ, κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ π μ, κυλίν: νενοήσθω ὁ ε σ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ α ξ, κύλιν: τῷ ε ο, κυλίν: ἄλλος δέ τις ὁ ε σ, κύλιν: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α ξ, κύλιν: πρὸς τὸν ε σ, κύλιν: οὕτως ὁ ὁ ε ο, κύλιν: πρὸς τὸν ε σ, κύλιν: ἀλλ' ὡς μὲν ὁ α ξ, κύλιν: πρὸς τὸν ε σ, οὕτως ἡ α β γ δ, βάσις πρὸς τὴν ε ζ η θ, βάσιν, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ α ξ, ε σ, κύλιν: ὡς δὲ ε ο, κύλιν: πρὸς τὸν ε σ, οὕτω τὸ μ ν, ὕψος πρὸς τὸ π μ, ὕψος, ὁ γὰρ ε ο, κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ υ τ σ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α β γ δ, βάσις πρὸς τὴν ε ζ η θ, βάσιν, οὕτω τὸ μ ν, ὕψος πρὸς τὸ π μ, ὕψος, ἴσον δὲ τὸ π μ, ὕψος τῷ κ λ, ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α β γ δ, βάσις πρὸς τὴν ε ζ η θ, βάσιν, οὕτω τὸ μ ν, ὕψος πρὸς τὸ κ λ, ὕψος. τῶν ἄρα α ξ, ε ο, κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Ἀλλὰ δὴ τῶν α ξ, ε ο, κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ α β γ δ, βάσις πρὸς τὴν ε ζ η θ, βάσιν, οὕτω τὸ μ ν, ὕψος πρὸς τὸ κ λ, ὕψος. Λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ α ξ, κύλινδρος τῷ ε ο, κυλίν: τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α β γ δ, βάσις πρὸς τὴν ε ζ η θ, βάσιν, οὕτω τὸ μ ν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος, ἴσον δὲ τὸ κλ, τῷ μ π, ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτω τὸ μ ν, ὕψος πρὸς τὸ μ π, ὕψος. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ῥηθεῖσα βάσις πρὸς ῥηθεῖσαν βάσιν, οὕτω καὶ ὁ α ξ, κύλινδρος πρὸς τὸν ε σ, κύλινδρον. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν, ὡς δὲ τὸ μ ν, ὕψος πρὸς τὸ μ π, οὕτως ὁ ε ο, κύλιν: πρὸς τὸν ε σ, κύλιν: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α ξ, κύλιν: πρὸς τὸν ε σ, κύλιν: οὕτως ὁ ε ο, πρὸς τὸν αὐτὸν ε σ, ἴσος ἄρα ὁ α ξ, κύλιν: τῷ ε σ, κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ιϛ′: Πρόβλημα.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι, οἱ αβγδ, εζηθ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ κ. Δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν αβγδ, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ εζηθ, κύκλου. Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ κ, κέντρου εὐθεῖα ἡ βδ, καὶ ἀπὸ τοῦ η, σημείου τῇ βδ, πρὸς ὀρθὰς ἡ αη, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ γ. ἡ αγ, ἄρα ἐφάπτεται τοῦ εζηθ, κύκλου. Τέμνοντες δὴ τὴν βαδ, περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάττονα τῆς αδ. Λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ λδ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ, ἐπὶ τὴν βδ, κάθετος ἤχθω ἡ λμ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ ν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λδ, δν, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ λδ, τῇ δν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ λν, τῇ αγ, ἡ δὲ αγ, ἐφάπτεται τοῦ εζηθ, κύκλου, ἡ λν, ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ αὐτοῦ κύκλου, πολλῷ ἄρα αἱ δλ, δν, οὐκ ἐφάπτονται τοῦ εζηθ, κύκλου. ἐὰν τῇ λδ, εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν αβγδ, κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου, τοῦ εζηθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 12. Fig. 22.



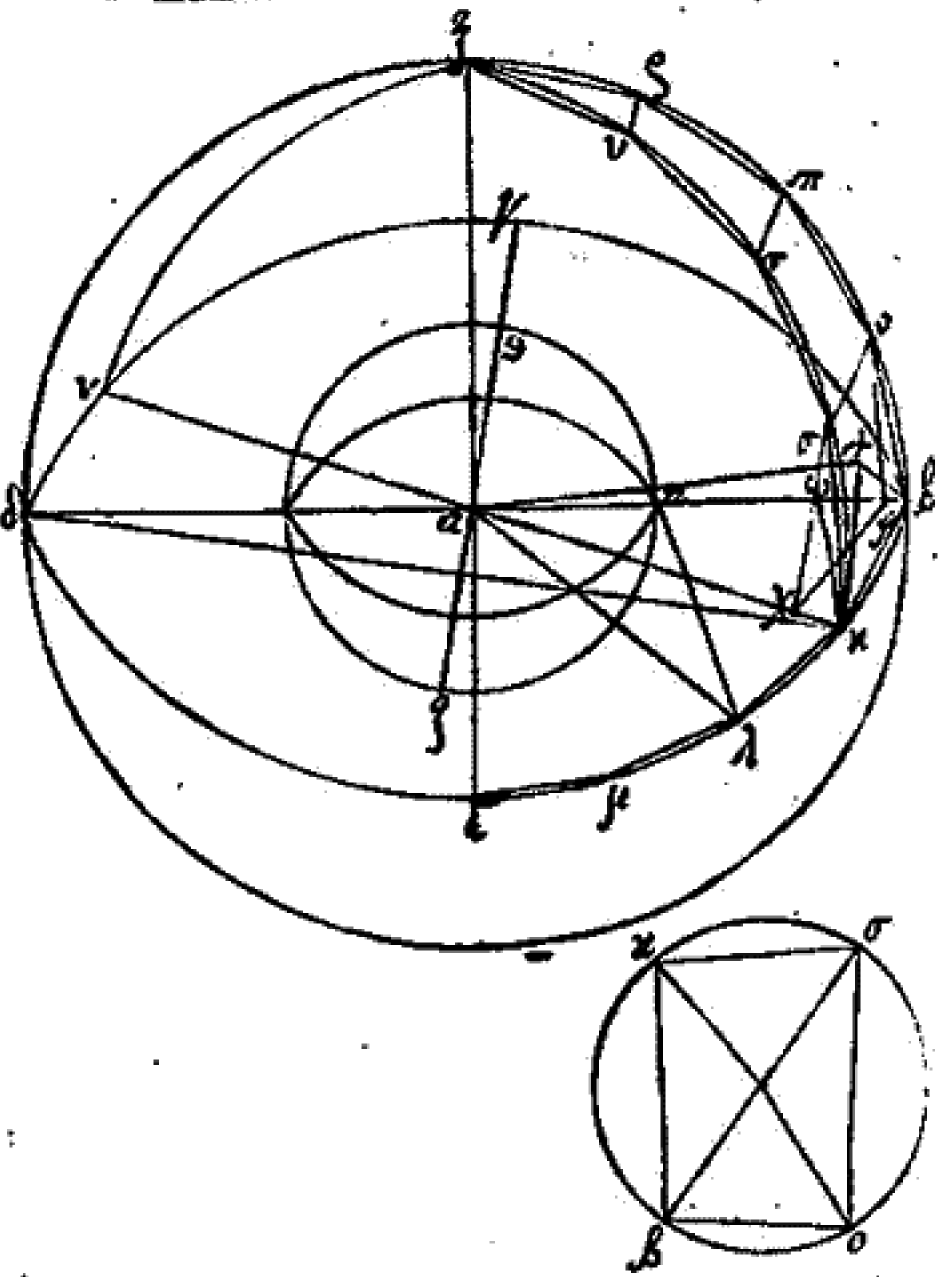
Πρότασις ΙΖ′: Πρόβλημα.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύγωνον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ α, δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου. καὶ κατὰ τὸν ιδ′: ὅρον τοῦ παρελθ: αἱ δὴ τομαὶ αὐτῶν κύκλοι ἔσονται, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου, καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγένετο ἡ στερεὰ σφαῖρα. ὥστε καθ' οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον, ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον, καὶ φανερὸν, ὅτι καὶ μέγιστον. ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμι-

ἡμικυκλίου διάμετρος, δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, κατὰ τὴν ιε΄ τοῦ γ΄· μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων εὐθειῶν. ἔστω δὲ ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ βγδε, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι ὁ ζηθι, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ βδ, γε· καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν βγδε, ζηθι, εἰς τὸν μείζονα τουτέστι τὸν βγδε, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου, τοῦ ζηθι, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ βε τεταρτημορίῳ αἱ βκ, κλ, λμ, με, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κα, διήχθω ἐπὶ τὸ ν. καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου τῷ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ αξ, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ ξ· καὶ διὰ τῆς αξ, καὶ ἑκατέρας τῶν βδ, κν, ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω, ποιήσουσι δὲ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μεγίστους κύκλους· ποιείτωσαν, ὧν τὰ ἡμικύκλια ἔστωσαν ἐπὶ τῶν βδ, κν, διαμέτρων, τὰ βξδ, κξν· καὶ ἐπεὶ ἡ ξα, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα, κατὰ τὴν ιη΄ τοῦ παρελθ. τὰ διὰ τῆς αξ, ἐπίπεδα, ὀρθά εἰσι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπ. ὥστε καὶ τὰ βξδ, κξν, ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ξδε, κξν, ἡμικύκλια, ἐπὶ ἴσων γάρ εἰσι διαμέτρων τῶν βδ, κν, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ βε, βξ, τεταρτημόρια ἀλλήλοις, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ βε, τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς βξ, κξ, τεταρτημορίοις, ἴσαι ταῖς βκ, κλ, λμ, με, εὐθείαις. ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ βο, οπ, πρ, ρξ· κσ, στ, τυ, υξ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ σο, τπ, υρ, καὶ ἀπὸ τῶν ο, σ, ἐπὶ τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ κατὰ τὴν λη΄ τοῦ παρελθ: ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων, τὰς βδ, κν, ἐπειδήπερ καὶ τὰ βξδ, κξν, ἐπίπεδα, ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον. πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ οφ, σχ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ φχ· καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις

Eucl. Lib. 12. Fig. 23.



κλίσεις τοῖς βξδ, κξν, ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν, αἱ βο, κσ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ οφ, σχ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν οφ, τῇ σχ, ἡ δὲ βφ, τῇ κχ, ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ βα, ὅλῃ τῇ κα, ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ φα, λοιπῇ τῇ χα, ἐστὶν ἴση. ἄρα καὶ ὡς ἡ βφ, πρὸς τὴν φα, οὕτως ἡ κχ, πρὸς τὴν χα, καὶ κατὰ τὴν β': ἄρα τοῦ ς': παράλληλός ἐστιν ἡ φχ, τῇ κβ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν οφ, σχ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστί, κατὰ τὴν ς': τοῦ ια: στερεοῦ ἡ οφ, τῇ σχ, ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, αἱ φχ, σο, ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ χφ, τῇ σο, ἀλλ' ἡ χφ, τῇ κβ, κατὰ τὴν θ': τοῦ παραλ: ἄρα καὶ ἡ σο, τῇ κβ, παράλληλός ἐστι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ βο, κσ, τὸ κβσο, ἄρα τετράπλευρον. καὶ κατὰ τὴν ζ': τοῦ αὐτοῦ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐπειδήπερ ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἑκατέρα τῶν σοπτ, τπρυ, τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ κατὰ τὴν β': τοῦ αὐτοῦ, καὶ τὸ υρξ, τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν ο, σ, π, τ, ρ, υ, σημείων ἐπὶ τὸ α, ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολύεδρον, μεταξὺ τῶν βξ, κξ, περιφερειῶν, ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ κβοσ, σοπτ, τπρυ, τετράπλευρα, καὶ τὸ υρξ, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ α, σημεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἐφ' ἑκάστης τῶν κλ, λμ, με, πλευρῶν, καθάπερ ἐπὶ τῆς κβ, τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαιρίου, συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον, ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν, ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις τὰ εἰρημένα τετράπλευρα, καὶ τὸ υρξ, τρίγωνον, καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ α, σημεῖον.

Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάπτεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἐστὶν ὁ ζηθι, κύκλος. καὶ κατὰ τὴν ια: τοῦ αὐτοῦ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ κβοσ, τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ αψ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ ψ, σημεῖον. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βψ, ψκ. καὶ ἐπεὶ ἡ αψ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κβοσ, τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ια: τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ αψ, καὶ πρὸς ἑκατέραν ἄρα τῶν βψ, ψκ, ὀρθή ἐστιν ἡ αὐτή. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ ακ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ἀπὸ τῆς ακ, καὶ κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αβ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αψ, ψβ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ ψ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ακ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν αψ, ψκ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αψ, ψβ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αψ, ψκ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς αψ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ψβ, λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ψκ, ἴσον ἐστίν, ἴση ἡ ψβ, τῇ ψκ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ ψ, ἐπὶ τὰ ο σ, ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν βψ, ψκ, ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ ψ, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ψβ, ψκ, γραφόμενος κύκλος, ἥξει καὶ διὰ τῶν ο, σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ κβοσ, τετράπλευρον, καὶ

ἐπεὶ

ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ κβ, τῆς χφ, ἴση δὲ ἡ χφ, τῇ σο, μείζων ἄρα ἡ βκ, καὶ τῆς σο, ἴση δὲ ἡ κβ, ἑκατέρα τῶν κσ, βο, καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν κσ, βο, τῆς σο, μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ κβοσ, καὶ ἴσαι αἱ κβ, βο, κσ, καὶ ἐλάσσων ἡ οσ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ βψ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, μείζων ἐστίν, ἢ διπλάσιον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ κ, σημείου ἐπὶ τὴν βφδ, κάθετος ἡ κω. καὶ ἐπεὶ ἡ βδ, τῆς δω, ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δω, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν δβ, βω, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δω, ωβ, κατὰ τὴν α΄: τοῦ ϛ΄: ἀναγραφομένου δὴ ἀπὸ τῆς βω, τετραγώνου, καὶ συμπεπληρωμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ωδ, παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δβ, βω, τοῦ ὑπὸ τῶν δω, ωβ, ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ἔτι τῆς κδ, ἐπιζευγνυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν δβ, βω, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς βκ, κατὰ τὴν ιζ΄: τοῦ ϛ΄: κατὰ γὰρ τὸ β΄: πόρισμ: τῆς η΄: τοῦ αὐτοῦ, ἔστιν ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βκ, οὕτως ἡ κβ, πρὸς τὴν βω, ἡ γὰρ πρὸς τῷ κ, γωνία ἐν ἡμικυκλ: οὖσα, ὀρθή ἐστι, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν δω, ωβ, ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς κω, κατὰ τὸ α΄: πόρισμ: τῆς αὐτῆς, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κβ, τοῦ ἀπὸ τῆς κω, ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσ: ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς κβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, μεῖζόν ἐστιν, ἢ διπλάσ: μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κω, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βα, τῇ κα, ἴσόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, τῷ ἀπὸ τῆς κα, καί ἐστι κατὰ τὴν μζ΄: τοῦ α΄: τῷ μὲν ἀπὸ τῆς βα, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν βψ, ψα, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς κα, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κω, ωα, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν βψ, ψα, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν κω, ωα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς κω, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ωα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ψα, μείζων ἄρα ἡ αψ, τῆς αω, πολλῷ ἄρα ἡ αψ, μείζων ἐστὶ τῆς αη, καί ἐστιν ἡ μὲν αψ, ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ αη, ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάττονος σφαίρας ἐπιφάνειαν. ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἄλλως.

Δεικτέον δὲ καὶ ἑτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων ἡ αψ, τῆς αη. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ η, τῇ αη, πρὸς ὀρθὰς ἡ ηλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αλ. τέμνοντες δὴ τὴν εβ, περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν τινα περιφέρειαν, ἥτις, ἐστὶν ἐλάσσων τῆς ὑποτεινομένης τοῦ βγδε, κύκλου περιφερείας ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ηλ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ κβ, περιφέρεια, ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ κβ, εὐθεῖα τῆς ηλ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ βκσο, τετράπλευρον, καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ βο, βκ, κσ, καὶ ἐλάσσων ἡ οσ, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βψκ, γωνία, μείζων ἄρα ἡ βκ, τῆς βψ. ἀλλὰ τῆς βκ, ἡ ηλ, πολλῷ ἄρα ἡ ηλ, μείζων τῆς βψ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηλ, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αλ, τῇ αβ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αλ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αλ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν αη, ηλ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν βψ, ψα, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αη, ηλ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βψ, ψα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς βψ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ηλ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ψα, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αη, μείζων ἄρα ἡ αψ, τῆς αη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟ΄

ΠΟΡΙΣΜΑ.

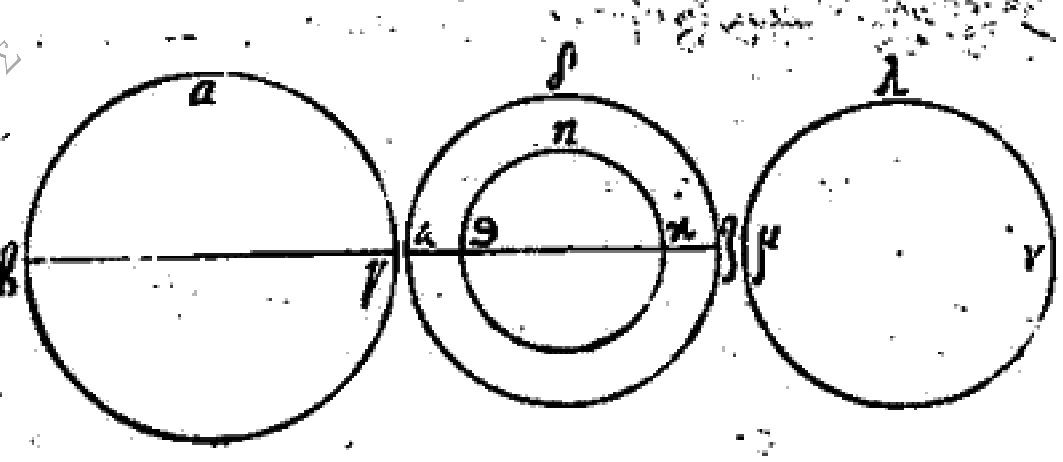
Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ β γ δ ε, σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ β γ δ ε, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς β γ δ ε, σφαίρας διάμετρος, πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοπληθεῖς, καὶ ὁμοταγεῖς πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ κ β ο σ, τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ α, σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἤπερ ἡ α β, ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῆς περὶ τὸ κέντρον τὸ α, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κύκλου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως δὴ καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον α, σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ, τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ α β, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ α, στερεὸν πολύεδρον, πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἤπερ ἡ β δ, διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον.

Πρότασις ΙΑ′. Θεώρημα.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ α β γ, δ ε ζ, διάμετροι δὲ αἱ β γ, ε ζ. Λέγω, ὅτι ἡ α β γ, σφαῖρα πρὸς τὴν δ ε ζ, σφαῖραν, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ. εἰ γὰρ μὴ, ἕξει ἄρα ἡ α β γ, σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς δ ε ζ, σφαίρας, τριπλασ: λόγον, ἢ πρὸς μείζονα, ἤπερ ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ. Ἐχέτω δὴ πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν η θ κ, καὶ νενοήσθω ἡ δ ε ζ, σφαῖρα τῇ η θ κ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν δ ε ζ, στερεὸν πολύεδρον, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας τῆς η θ κ, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν α β γ, τῷ ἐν τῇ δ ε ζ, σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον, τὸ ἄρα ἐν τῇ α β γ, στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ δ ε ζ, στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, ἔχει δὲ καὶ ἡ α β γ, σφαῖρα πρὸς τὴν η θ κ, σφαῖραν τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α β γ, σφαῖρα πρὸς τὴν η θ κ, οὕτω τὸ ἐν τῇ α β γ, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ δ ε ζ, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον, ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ἡ α β γ, σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ η θ κ, σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ δ ε ζ, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον, μείζων δὲ ἡ α β γ, τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου, μείζων ἄρα καὶ ἡ θηκ, σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ δεζ, σφαίρᾳ πολυέδρου, ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ᾽ αὐτοῦ. οὐκ ἄρα ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς δεζ, σφαῖραν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, διάμετρος πρὸς τὴν εζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ δεζ, σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς αβγ, διπλασ. λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ, πρὸς τὴν βγ. λέγω, ὅτι οὐδὲ ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς δεζ, σφαίρας διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν λμν, ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμν, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγ, σφαῖραν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ, διάμετρος πρὸς τὴν βγ, διάμετρον, ὡς δὲ ἡ λμν, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγ, σφαῖραν, οὕτως ἡ δεζ, σφαῖρα πρὸς ἐλάττονά τινα τῆς αβγ, σφαίρας, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ λμν, τῆς δεζ, καὶ ἡ δεζ, ἄρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς αβγ, σφαῖραν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ, πρὸς τὴν βγ. ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα, ἀλλ᾽ οὐδὲ πρὸς ἐλάττονα, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. ἡ αβγ, ἄρα σφαῖρα πρὸς τὴν δεζ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 12. Fig. 24.



Τέλος τοῦ Δωδεκάτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.