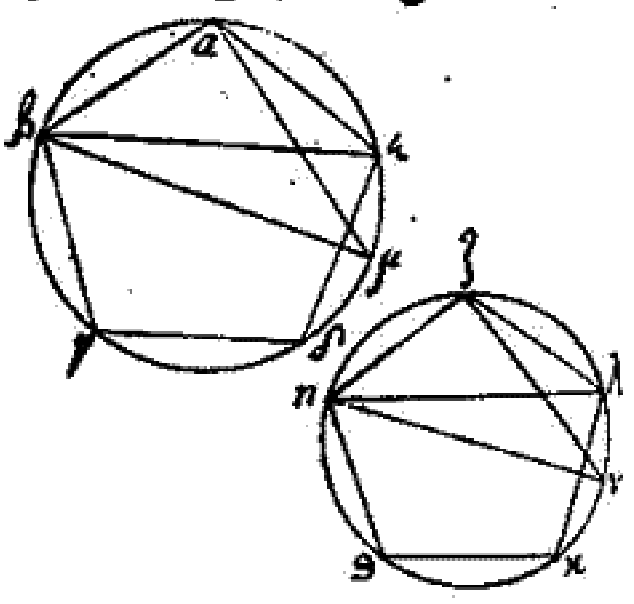
ΕʼΡΜΗΝΕΙʼΑ ΤΩ͂Ν ΠΡΟΤΑʼΣΕΩΝ ΤΟΥ͂ ΔΩΔΕΚΑʼΤΟΥ ΒΙΒΛΙʼΟΥ ΤΟΥ͂ ΚΑΙ͂ ΔΕΥΤΕʼΡΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ͂ ΤΩ͂Ν ΤΟΥ͂ ΕΥʼΚΛΕΙʼΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙʼΩΝ.

Πρότασις Α΄. Θεώρημα.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ α β γ δ ε, ζ η θ κ λ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ α β γ δ ε, ζ η θ κ λ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ β μ, η ν. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς β μ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η ν, τετράγωνον, οὕτω τὸ α β γ δ ε, πολύγωνον πρὸς τὸ ζ η θ κ λ, πολύγων:

Eucl. Lib. 12. Fig. 1.



Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ β ε, α μ, η λ, ζ ν, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸν α΄: τοῦ ϛ΄: ὅρον, ὅμοιόν ἐστι τὸ α β γ δ ε, πολύγ: τῷ ζ η θ κ λ, πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ β α ε, γωνία τῇ ὑπὸ η ζ λ, καὶ κατὰ τὴν ϛ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἔστιν ὡς ἡ β α, πρὸς τὴν α ε, οὕτως ἡ ζ η, πρὸς τὴν λ ζ, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ β α ε, η ζ λ, μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ β α ε, τῇ ὑπὸ η ζ λ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ α β ε, τρίγων: τῷ ζ η λ, τριγ: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ α ε β, γωνία τῇ ὑπὸ ζ λ η, ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ α ε β, τῇ ὑπὸ α μ β, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν κ α΄: τοῦ γ΄: (ἐπὶ τῆς αὐτῆς γὰρ περιφερείας βεβήκασιν), ἡ δὲ ὑπὸ ζ λ η, τῇ ὑπὸ ζ ν η, καὶ ἡ ὑπὸ α μ β, ἄρα τῇ ὑπὸ ζ ν η, ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ β α μ, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ η ζ ν, κατὰ τὴν λ α΄: τοῦ αὐτοῦ, ἴση, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ α μ β, τρίγων: τῷ ζ η ν, τριγ: καὶ κατὰ τὴν δ΄: τοῦ ϛ΄: ἀνάλογον, ἄρα ὡς ἡ β μ, πρὸς τὴν η ν, οὕτως ἡ β α, πρὸς τὴν η ζ, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς β μ, πρὸς τὴν η ν, λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς β μ, τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η ν, τετράγων: κατὰ τὴν ι θ΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς β α, πρὸς τὴν η ζ, διπλασίων ἐστίν, ὁ τοῦ α β γ δ ε, πολυγ: πρὸς τὸ ζ η θ κ λ, πολύγων: κατὰ τὴν κ΄:

τοῦ

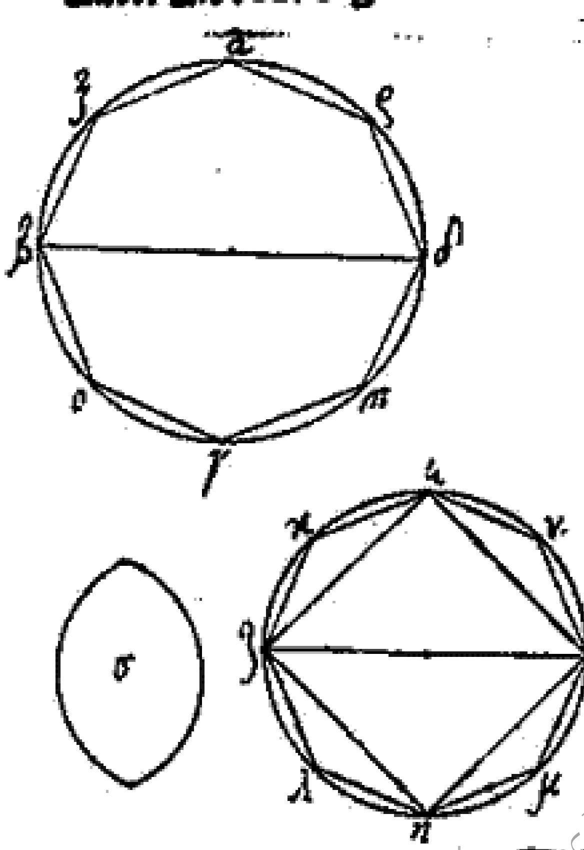
τοῦ αὐτοῦ, καὶ κατὰ τὴν ιά: τοῦ έ: ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς β μ, τετράγων: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η ν, οὕτω τὸ α β γ δ ε, πολύγ: πρὸς τὸ ζ η θ κ λ, πολύγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Β': Θεώρημα.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ β δ, ζ θ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς β δ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ θ, οὕτως ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς β δ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ θ, οὕτως ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς β δ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ θ, οὕτως ὁ α β γ δ, κύκλ: ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ε ζ η θ, κύκλου χωρίον, ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ σ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ε ζ η θ, κύκλον τετράγωνον τὸ ε ζ η θ, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον τετράγ: ἢ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ε ζ η θ, κύκλου. ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν ε ζ η θ, σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου διαγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ε ζ η θ, τετράγ: τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάσσων ἐστὶ ὁ κύκλος, ὥστε τὸ ε ζ η θ, ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ε ζ η θ, κύκλου. Τετμήσθωσαν δίχα αἱ ε ζ, ζ η, η θ, θ ε, περιφέρειαι κατὰ τὰ κ, λ, μ, ν, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε κ, κ ζ, ζ λ, λ η, η μ, μ θ, θ ν, ν ε, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ε κ ζ, ζ η λ, η μ θ, καὶ θ ν ε, τριγώνων μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. Ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν κ, λ, μ, ν, σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, καὶ κατὰ τὴν μα: τοῦ α: ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ε ζ, ζ η, η θ, θ ε, εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν ε κ ζ, ζ λ η, η μ θ, θ ν ε, τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου. ἀλλὰ τὸ καθ' αὑτὸ τμῆμα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου. ὥστε ἕκαστον τῶν ε κ ζ, ζ λ η, η μ θ, θ ν ε, τριγών: μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' αὑτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνῦντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα τμήματα τοῦ κύκλου, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ε ζ η θ, κύκλος τοῦ σ, χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ α: θεωρήματι τοῦ δεκάτου, ὅτι δύο ἀνίσων μεγεθῶν ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος μεῖζον ἀφαιρεθῇ, ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον, ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔ-

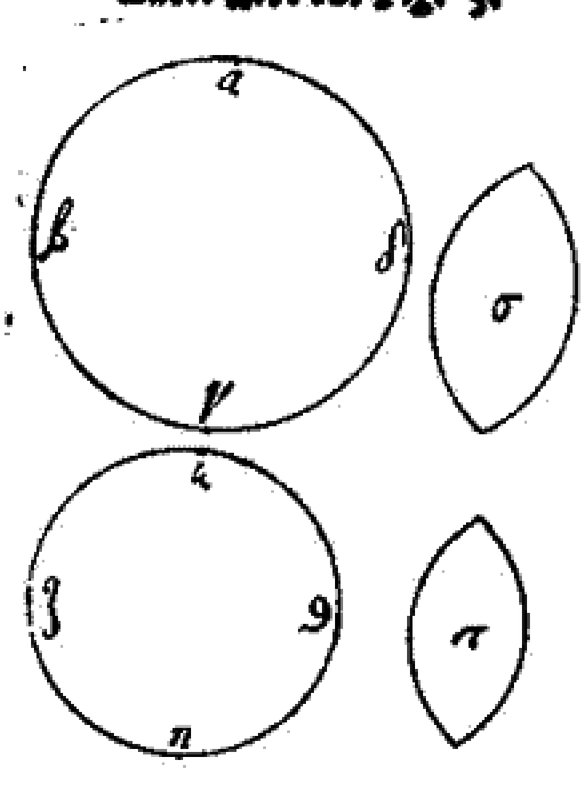
Eucl. Lib. 12. Fig. 2.



λασσον

λασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν εκ, κζ, ζλ, λη, ημ, μθ, θν, νε, τμήματα τοῦ εζηθ, κύκλου, ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ εζηθ, κύκλος τοῦ σ, χωρίου, λοιπὸν ἄρα τὸ εκζλημθν, πολύγων: μεῖζόν ἐστι τοῦ σ, χωρίου. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν αβγδ, κύκλον τῷ εκζλημθν, πολυγώνῳ, ὅμοιον πολύγωνον τὸ αξβογπδρ, κατὰ τὸν ἀνωτέρω, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετράγων: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, τετράγωνον, οὕτω τὸ αξβογπδρ, πολύγ: πρὸς τὸ εκζλημθν, πολυγ: καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ σ, χωρίον. καὶ ὡς ἄρα ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ σ, χωρίον, οὕτω τὸ αξβογπδρ, πολύγ: πρὸς τὸ εκζλημθν, πολύγ: καὶ ἐναλλὰξ ἄρα κατὰ τὴν ις': τοῦ έ: ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτω τὸ σ, χωρίον, πρὸς τὸ εκζλημθν, πολύγ: μείζων δὲ ὁ αβγδ, κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγ: μεῖζον ἄρα καὶ τὸ σ, χωρίον τοῦ εκζλημθν, πολυγ: ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, τετρ: οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εζηθ, κύκλου χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ, κύκλου χωρίον. Λέγω ὅτι οὐδ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθ, κύκλου χωρίον. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω πρὸς τὸ σ, ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτω τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον. ἀλλ' ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ, κύκλου χωρίον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ, κύκλου χωρίον, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλ: πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθ, κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ὡς πρὸς ἔλασσόν τι. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον. Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 12. Fig. 3.



ΛΗΜΜΑ.

Λέγω δὴ, ὅτι τοῦ σ, χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ εζηθ, κύκλου, ἔστιν ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ αβγδ, κύκλου χωρίον. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλ: οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς τὸ τ, χωρίον. Λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ τ,

χω-

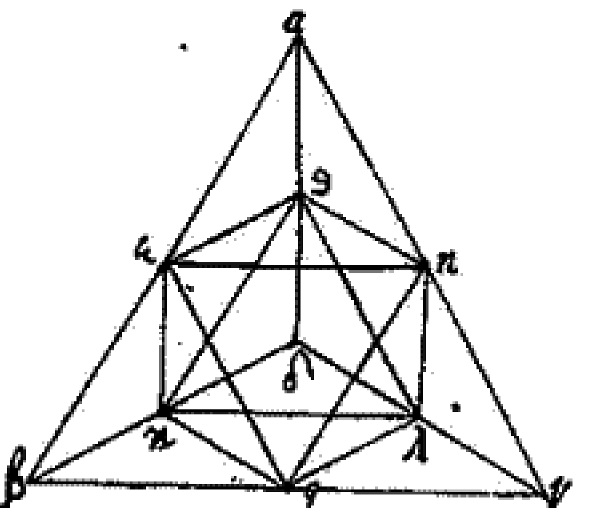
χωρίον τοῦ α β γ δ, κύκλου, ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν α β γ δ, κύκλον, οὕτως ὁ ε ζ η θ, κύκλ: πρὸς τὸ τ, χωρίον, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα, κατὰ τὴν ιϛʹ: τοῦ εʹ: ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον· οὕτως ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸ τ, χωρίον, μεῖζον δὲ τὸ σ, τοῦ ε ζ η θ, κύκλου, μείζων ἄρα καὶ ὁ α β γ δ, κύκλος τοῦ τ, χωρίου. ὥστε ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν α β γ δ, κύκλον, οὕτως ὁ ε ζ η θ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ α β γ δ, κύκλου χωρίον.

Πρότασις Γʹ: Θεώρημα.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμὶς μὲν, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ἡ α β γ δ, πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας, καὶ τὰ ἑξῆς. Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ α β, β γ, γ α, α δ, δ β, δ γ, δίχα κατὰ τὰ ε, ζ, η, θ, κ, λ, σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε θ, ε η, η θ, θ κ, κ λ, λ θ, ε κ, κ ζ, ζ η, ζ λ, λ η, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν α ε, τῇ ε β, ἡ δὲ α θ, τῇ θ δ, κατὰ τὴν βʹ: ἄρα τοῦ ϛʹ: παράλληλός ἐστιν ἡ ε θ, τῇ β δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θ κ, τῇ α β, παράλληλός ἐστιν, παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ θ ε β κ, καὶ κατὰ τὴν λδʹ: ἄρα τοῦ αʹ: ἴση ἐστὶν ἡ θ κ, τῇ ε β, ἀλλ' ἡ ε β, τῇ α ε, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ α ε, ἄρα τῇ θ κ, ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ α θ, τῇ θ δ, ἴση. δύο δὴ αἱ α ε, α θ, δυσὶ ταῖς κ θ, θ δ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ κατὰ

Eucl. Lib. 12. Fig. 4.



τὴν κθʹ: τοῦ αʹ: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α ε θ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ θ κ δ, ἴση, καὶ βάσις ἄρα ἡ ε θ, βάσει τῇ κ δ, ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ α ε θ, τρίγ: τῷ θ κ δ, τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ α θ η, τρίγ: τῷ θ λ δ, τριγ: ἴσόν τε ἐστὶ καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων περὶ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, τουτέστιν αἱ ε θ, θ η, περὶ τὰς κ δ, δ λ, εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ε θ η, γωνία τῇ ὑπὸ κ δ λ, γωνίᾳ· καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ε θ, θ η, δυσὶ ταῖς κ δ, δ λ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ε θ η, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κ δ λ, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὴν ιʹ: ἄρα τοῦ ιαʹ: τῶν ἐπιπέδων, καὶ βάσις τοῦ ε θ η, τριγ: ἡ ε η, βάσει τοῦ κ δ λ, τριγ: τῇ κ λ, ἴση, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ἴσόν τε καὶ ὅμοιον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ α ε η, τρίγ: τῷ θ κ λ, τριγ: ἴσόν τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ α ε η, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ θ κ λ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δʹ: τοῦ ϛʹ: ἐπεὶ τρίγωνα τοῦ α δ β, παρὰ μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν τὴν α β, ἦκται ἡ θ κ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ α δ β, τρίγ: τῷ δ θ κ, τριγ: καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα τὸ α δ β, τρίγ: τῷ δ θ κ, τριγ: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν δ β γ, τρίγ: τῷ δ κ λ, τριγ: ὅμοιόν ἐστι. τὸ δὲ α δ γ, τῷ δ θ λ, τριγ: καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ α β, α γ, κατὰ τὴν ι ε: τοῦ α: τῶν στερ: παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς κ θ, θ λ, εἰσὶν, ἴσας γωνίας περιέχουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ β α γ, τῇ ὑπὸ κ θ λ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ β α, πρὸς τὴν α γ, οὕτως ἡ κ θ, πρὸς τὴν θ λ, ὅμοιον ἄρα τὸ α β γ, τρίγων: τῷ θ κ λ, τριγ: καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ α β γ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ θ κ λ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἀλλ' αὕτη ἐδείχθη ὁμοία πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ α ε η, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον. ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ α β γ, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ α ε η, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον. ἑκατέρα ἄρα τῶν α ε η θ, θ κ λ δ, πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ α β γ δ, πυραμίδι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ β ζ, τῇ ζ γ, διπλάσιόν ἐστι κατὰ τὴν μα: τοῦ α: τὸ ε β ζ η, παραλληλόγραμμον τοῦ η ζ γ, τριγ: καὶ κατὰ τὴν μ: τοῦ παρελθόντος, ἄρα ἴσον ἐστι τὸ περιεχόμενον πρίσμα ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν β κ ζ, ε θ η, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ε β ζ η, ε β κ θ, η θ κ ζ, τῷ περιεχομένῳ πρίσματι ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν η ζ γ, θ κ λ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν κ ζ γ λ, λ γ η θ, θ κ ζ η. καὶ φανερὸν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ ε β η ζ, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ ἡ θ κ, εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ η ζ γ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ κ λ θ, τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ α ε η, θ κ λ, τριγ: κορυφαὶ δὲ τὰ θ, δ, σημεῖα. ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ε ζ, ε κ, εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ε β ζ η, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ ἡ θ κ, εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ε ζ β, τρίγων: κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ε β ζ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ α ε η, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ἴσων, καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ε β ζ η, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ ἡ θ κ, εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ α ε η, τρίγων: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημ: ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ε β ζ η, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ ἡ θ κ, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ η ζ γ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ θ κ λ, τρίγ: ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ α ε η, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημ: ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ θ κ λ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημ: τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα, μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ α ε η, θ κ λ, τρίγ: κορυφαὶ δὲ τὰ θ, δ, σημ: ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημ: διῄρηται εἰς δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ ἑξῆς.

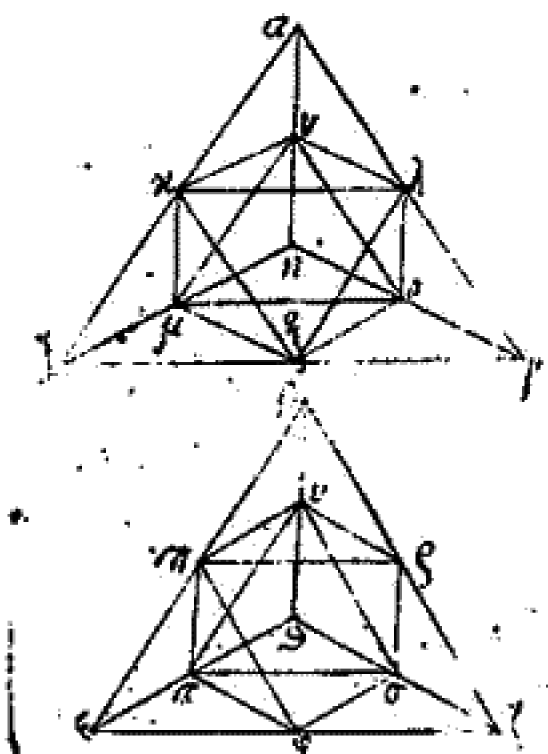
Πρό-

Πρότασις Δ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον γένηται διῃρημένη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γένηται, ἔστιν ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτω καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα, πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

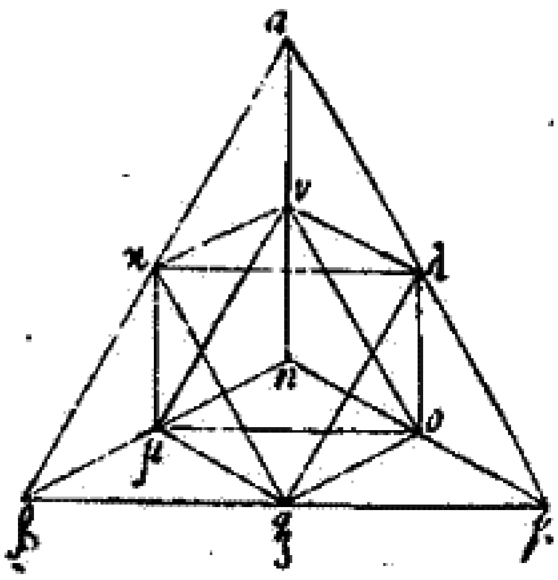
Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς α β γ, δ ε ζ, κορυφὰς δὲ τὰ η, θ, σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ τὰ ἑξῆς, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω τὰ ἐν τῇ α β γ η, πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν β ξ, τῇ ξ γ, ἡ δὲ α λ, τῇ λ γ, παράλληλος ἄρα ἡ ξ λ, τῇ α β, κατὰ τὴν β΄. τοῦ ς΄. καὶ ὅμοιον τὸ α β γ, τρίγωνον τῷ λ ξ γ, τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ΄. τοῦ αὐτοῦ, καὶ τὸ δ ε ζ, τρίγωνον, ὅμοιόν ἐστι τῷ ρ φ ζ, τριγώνῳ, καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν β γ, τῆς γ ξ, ἡ δὲ ε ζ, τῆς ζ φ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν γ ξ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ζ φ, κατὰ τὴν ι β΄. τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν β γ, γ ξ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ α β γ, λ ξ γ, ἀπὸ δὲ τῶν ε ζ, ζ φ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ δ ε ζ, ρ φ ζ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ λ ξ γ, τρίγωνον, οὕτω τὸ δ ε ζ, πρὸς ρ φ ζ, τρίγ. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ α β γ, πρὸς τὸ δ ε ζ, οὕτω τὸ λ ξ γ, πρὸς τὸ ρ φ ζ, τρίγ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ λ ξ γ, τρίγ. πρὸς τὸ ρ φ ζ, οὕτω τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστι τὸ λ ξ γ, τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ο μ ν, ὡς ἐφεξῆς δειχθήσεται, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρ φ ζ, τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ σ τ υ, καὶ ὡς ἄρα τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ δ ε ζ, τρίγ. οὕτω τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ λ ξ γ, τρίγων. ἀπεναντίον δὲ τὸ ο μ ν, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρ φ ζ, τρίγ. ἀπεναντίον δὲ τὸ σ τ υ. καὶ ἐπεί, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὰ ἐν τῇ α β γ η, πυραμίδι δύο πρίσματα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι πρίσματα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ κ λ ξ β, παραλληλόγρ. ἀπεναντίον δὲ ἡ μ ο, εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ λ ξ γ, τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ

Eucl. Lib. 12. Fig. 5.



δὲ τὸ ο μ ν, οὕτω τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ε π ρ φ, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ ἡ σ τ, εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρ φ ζ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ σ τ υ, συντεθέντα ἄρα, ὡς τὰ κ β ξ λ μ ο, λ ξ γ μ ν ο, πρίσματα πρὸς τὸ λ ξ γ μ ν ο, πρίσμα, οὕτω τὰ π ε φ ρ σ τ, ρ φ ζ σ τ υ, πρίσματα πρὸς τὸ ρ φ ζ σ τ υ, πρίσμα, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὰ κ β ξ λ μ ο, λ ξ γ ο μ ν, πρὸς τὰ π ε φ ρ σ τ, ρ φ ζ σ τ υ, πρίσματα, οὕτω τὸ λ ξ γ μ ν ο, πρίσμα πρὸς τὸ ρ φ ζ σ τ υ, πρίσμα. ὡς δὲ τὸ λ ξ γ μ ν ο, πρίσμα, πρὸς τὸ ρ φ ζ σ τ υ, πρίσμα, οὕτως ἐδείχθη ἡ λ ξ γ, βάσις πρὸς τὴν ρ φ ζ, βάσιν, καὶ ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, καὶ ὡς ἄρα τὸ α θ γ, τρίγ: πρὸς τὸ δ ε ζ, τρίγ: οὕτω τὰ ἐν τῇ α β γ η, πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι δύο πρίσματα. ὁμοίως δὴ κἂν τὰς γενομένας πυραμίδας διέλωμεν, τὸν αὐτὸν τρόπον, οἷον τὰς ο μ ν η, σ τ υ θ, ἔσται ὡς ἡ ο μ ν, βάσις πρὸς τὴν σ τ υ, βάσιν, οὕτω τὰ ἐν τῇ ο μ ν η, πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ σ τ υ θ, πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ο μ ν, βάσις πρὸς τὴν σ τ υ, βάσιν, οὕτως ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, καὶ ὡς ἄρα ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω καὶ τὰ ἐν τῇ α β γ η, πυραμίδι δύο πρίσματα, πρὸς τὰ ἐν τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ο μ ν η, δύο πρίσμα, πρὸς τὰ ἐν τῇ σ τ υ θ, πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τέσσαρα πρὸς τέσσαρα. Τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν α κ λ θ, καὶ δ π ρ υ, πυραμίδων, καὶ πάντων ἁπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν.

Eucl. Lib. 12. Fig. 6.



Λ Η Μ Μ Α.

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ λ ξ γ, τρίγ: πρὸς τὸ ρ φ ζ, τρίγ: οὕτω τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ λ ξ γ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ο μ ν, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρ φ ζ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ σ τ υ, οὕτω δεικτέον. Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθω ἀπὸ τῶν η, θ, κάθετοι ἐπὶ τὰ α β γ, δ ε ζ, τρίγ: ἐπίπεδα, ἴσαι δηλ: (διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας) τυγχάνουσαι. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἥτε η γ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ η, κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν α β γ, ο μ ν, τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους, κατὰ τὸ ιζ': τοῦ παρελθόντος, τμηθήσονται, καὶ τέτμηται ἡ η γ, δίχα ὑπὸ τοῦ ο μ ν, ἐπιπέδου κατὰ τὸ ο, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ η, ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ α β γ, ἐπίπεδον, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ο μ ν, ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ θ, κάθετος ἐπὶ τὸ δ ε ζ, ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ σ τ υ, ἐπιπέδου, καί εἰσιν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν η, θ, κάθετοι ἐπὶ τὰ α β γ, δ ε ζ, ἐπίπεδα, ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ο μ ν, σ τ υ, τριγ: ἐπὶ τὰ α β γ, δ ε ζ, κάθετοι, ἰσοϋψῆ ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ λ ξ γ, ρ φ ζ, τρίγων: ἀπεναντίον δὲ τὰ ο μ ν, σ τ υ, ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων

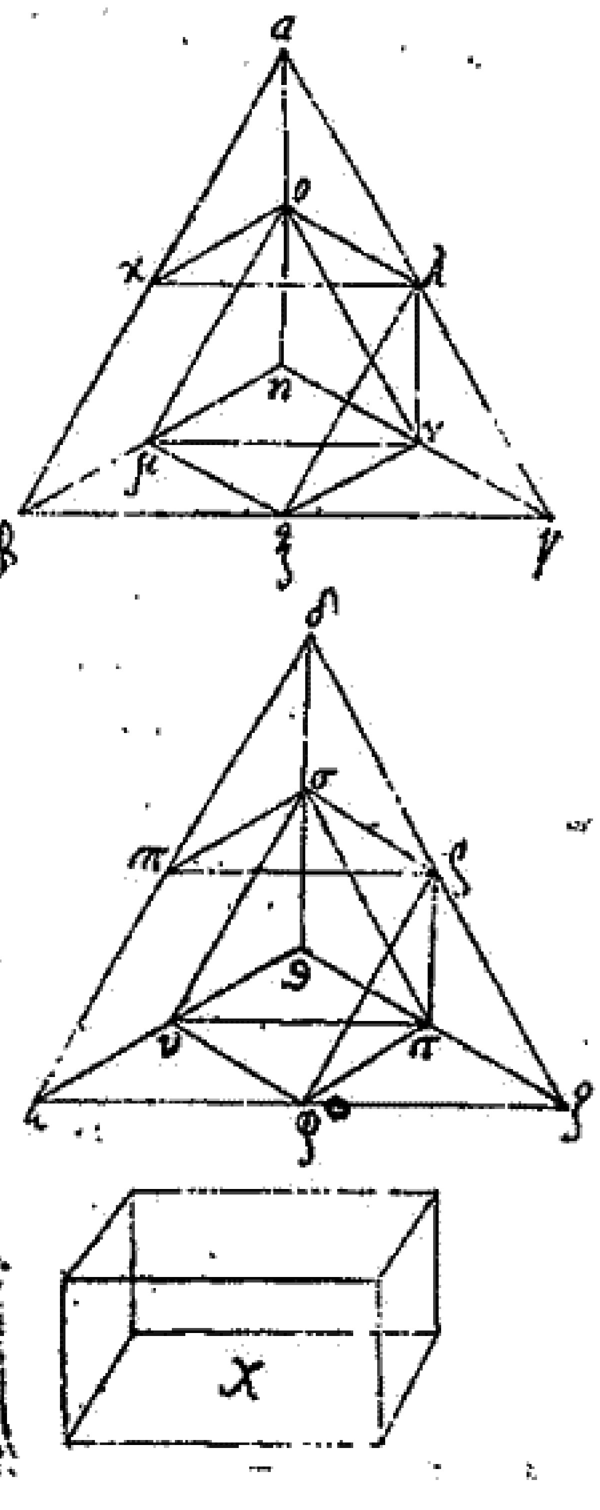
νων πρισμάτων ἀναγραφόμενα, ἰσοϋψῆ τυγχάνοντα, καὶ τὴν λβ΄: τοῦ αὐτοῦ, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, καὶ τὰ ἥμισυ ἄρα ἔσαι, ὡς ἡ λξγ, βάσις πρὸς τὴν ρφζ, βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε΄: Θεώρημα.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσίν, ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ η, θ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ, πυραμίδα. εἰ γὰρ μή, ἔσται οὕτως, ὥστε ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς, ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τῆς δεζθ, πυραμίδος στερεόν, ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ χ. καὶ διῃρήσθω ἡ δεζθ, πυραμὶς, κατὰ τὴν γ΄: τοῦ παρόντος εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. τὰ δὲ δύο πρίσματα μείζονά τε, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γιγνόμεναι πυραμίδες διῃρήσθωσαν ὁμοίως, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες, ἀπὸ τῆς δεζθ, πυραμίδος, αἵ εἰσιν ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ δεζθ, πυραμὶς τοῦ χ, στερεοῦ. λελείφθωσαν καὶ ἔστωσαν, λόγου χάριν, αἱ δπρσ, στυθ, λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ στερεοῦ χ. διῃρήσθω καὶ ἡ αβγη, ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ δεζθ, πυραμίδι: ἔστιν ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτω τὰ ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι, ἀλλ᾽ ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὸ χ, στερεόν, καὶ ὡς ἄρα ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὸ χ, στερεόν, οὕτω τὰ ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι πρίσματα, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτω τὸ χ, στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι πρίσματα, μείζων δὲ ἡ αβγη, πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων, μεί-

Eucl. Lib. 12. Fig. 7.



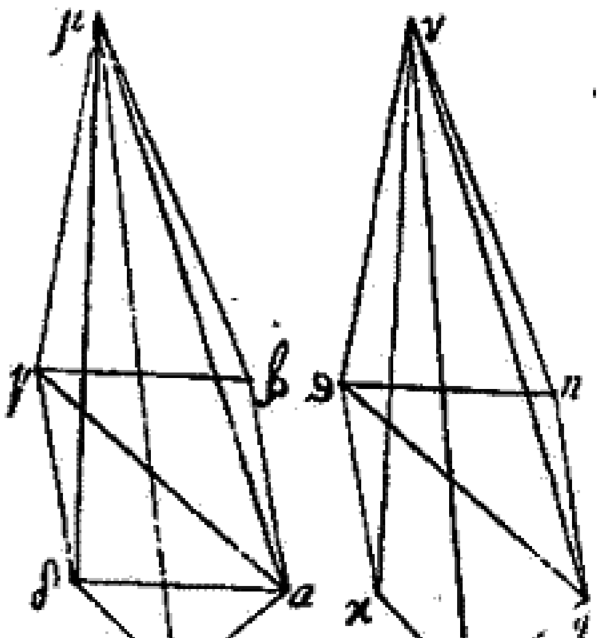
μεῖζον ἄρα καὶ τὸ χ, στερ: τῆς ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι ὡρισμένου, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς δεζθ, πυραμίδος στερεόν. Ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι οὐδ' ὡς ἡ δεζ, βάσις πρὸς τὴν αβγ, βάσιν, οὕτως ἡ δεζθ, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη, πυραμίδος στερεόν. Λέγω δή, ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδ' ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς δεζθ, πυραμίδος στερεόν, εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ χ. ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς ἡ δεζ, βάσις πρὸς τὴν αβγ, βάσιν, οὕτω τὸ χ, στερεὸν πρὸς τὴν αβγη, πυραμίδα, ὡς δὲ τὸ χ, στερεὸν πρὸς τὴν αβγη, πυραμίδα οὕτως ἡ δεζθ, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη, πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐν τῷ β': τοῦ παρόντος ἐδείχθη, καὶ ὡς ἄρα ἡ δεζ, βάσις πρὸς τὴν αβγ, βάσιν, οὕτως ἡ δεζθ, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη, πυραμίδος, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως ἡ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς πυραμίδος. ἀλλ' ἐδείχθη οὐδὲ πρὸς ἔλαττον, ἄρα ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως αβγη, πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ, πυραμίδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες, καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς αβγδε, ζηθκλ. κορυφὰς δὲ τὰ μν, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγδεμ, πυραμὶς πρὸς τὴν ζηθκλν, πυραμίδα. Διῃρήσθω γὰρ ἡ αβγδε, βάσις εἰς τὰ αβγ, αγδ, αδε, τρίγωνα, ἡ δὲ ζηθκλ, εἰς τὰ ζηθ, ζθκ, ζκλ, τρίγ: καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοϋψεῖς ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ αβγ, τρίγων: πρὸς τὸ αγδ, τρίγ: οὕτως ἡ αβγμ, πυραμὶς, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, πρὸς τὴν αγδμ, πυραμίδα, καὶ συνθέντα, ὡς τὸ αβγδ, τραπέζιον πρὸς τὸ αγδ, τρίγ: οὕτως ἡ αβγδμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αγδμ, πυραμίδα, κατὰ τὴν ιη': τοῦ ε'. ἀλλ' ὡς τὸ αγδ, τρίγων: πρὸς τὸ αδε, τρίγ: οὕτως ἡ αγδμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ, πυραμίδα, καὶ δι' ἴσου ἄρα κατὰ τὴν κβ': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν αδε, βάσιν, οὕτως ἡ αβγδμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ, πυραμίδα, καὶ συνθέντα πάλιν, ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν αδε.

Eucl. Lib. 12. Fig. 8.



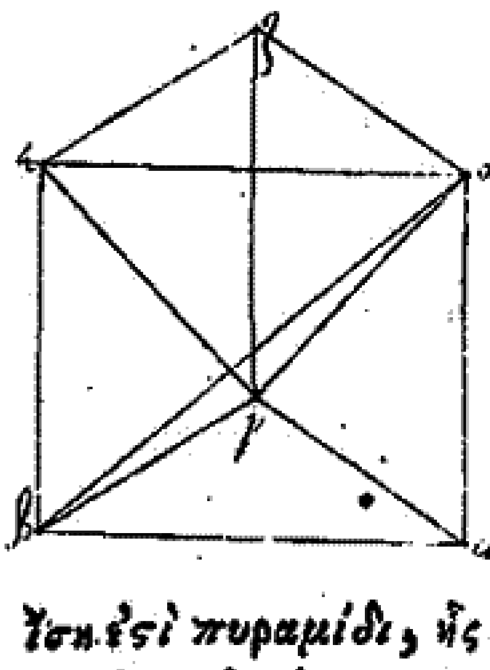
αδε, οὕτως ἡ αβγδεμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ, πυραμίδα. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς ἡ ζηθκλ, βάσις πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν, οὕτω καὶ ἡ ζηθκλν, πυραμὶς πρὸς τὴν ζκλν, πυραμίδα, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὡς ἡ αδε, βάσις τῆς αδεμ, πυραμίδος πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν τῆς ζκλν, πυραμίδος, οὕτως ἡ πυραμὶς πρὸς τὴν πυραμίδα. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν αδε, βάσιν, οὕτως ἡ αβγδεμ, πυρ: πρὸς τὴν αδεμ, πυρ: ὡς δὲ ἡ αδε, βάσις πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν, οὕτως ἡ αδεμ, πυρ: πρὸς τὴν ζκλν, πυρ: καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγδεμ, πυραμὶς πρὸς τὴν ζκλν, πυραμ: ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ζκλ, βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ, βάσιν, οὕτως ἦν καὶ ἡ ζκλν, πυρ: πρὸς τὴν ζηθκλν, πυρ: καὶ δι' ἴσου πάλιν, ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ, βάσιν. οὕτως ἡ αβγδεμ, πυρ: πρὸς τὴν ζηθκλν, πυραμίδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ αβγ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ δεζ. Λέγω, ὅτι τὸ αβγδεζ, πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βδ, εγ, γδ. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβεδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ βδ, καὶ κατὰ τὴν λδ': τοῦ πρώτου, ἴσον ἐστὶ τὸ αβδ, τρίγ: τῷ εδβ, τριγώνῳ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ αβδ, τριγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ εδβ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον. ἀλλ' αὕτη ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ εδβ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ εβγ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εβγ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. πάλιν ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ζγβε, διάμετρος δ' αὐτοῦ ἡ γε, ἴσον ἐστὶ κατὰ τὴν λδ': τοῦ α': τὸ εγζ, τρίγωνον τῷ γβε, τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ βεγ, τρίγ: κορυφὴ τὸ δ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυρ: ἧς βάσις μὲν τὸ εγζ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ βγε, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ αβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ γεζ, τρίγ: κο-

Eucl. Lib. 12. Fig. 9.



ρυφὴ

ρυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἴση πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ α β δ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον. διῄρηται ἄρα τὸ α β γ δ ε ζ, πρίσμα, εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ α β δ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μὲν τὸ α β γ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ δ ε ζ, καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν, τὸ α β γ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ δ ε ζ.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

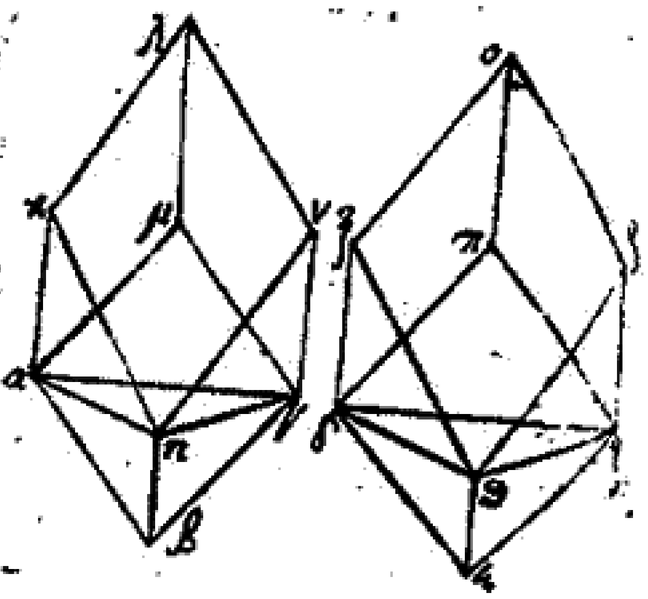
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, καὶ τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι, καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ α β γ, δ ε ζ, τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ η, θ, σημεῖα. Λέγω ὅτι ἡ α β γ η, πυραμὶς πρὸς τὴν δ ε ζ θ, πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ. Συμπεπληρώσθωσαν γὰρ τὰ β η μ λ, ε θ π ο, στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ πυραμὶς ἡ α β γ η, πυραμίδι τῇ δ ε ζ θ, ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ α β γ, γωνία τῇ ὑπὸ δ ε ζ, ἡ δὲ ὑπὸ η β γ, τῇ ὑπὸ θ ε ζ, ἡ δὲ ὑπὸ α β η, τῇ ὑπὸ δ ε θ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, οὕτως ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, καὶ ἡ β η, πρὸς τὴν ε θ· καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, οὕτως ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, καὶ περὶ ἴσας

Eucl. Lib. 12. Fig. 10.



γωνίας, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα τὸ β μ, παραλληλόγρ: τῷ ε π, παραλληλογρ: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν β ν, τῷ ε ι, ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ β κ, τῷ ε ξ, τρία ἄρα παραλληλόγρ: τὰ β μ, κ β, β ν, τρισὶ τοῖς ε π, ε ξ, ε ρ, ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία ταῦτα κατὰ τὴν κ δ': τοῦ ά: στερ: τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ὅμοιά τε καὶ ἴσα ἐστι. τὰ δὲ τρία ε π, ε ξ, ε ρ, τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε ἐστὶ καὶ ὅμοια. τὰ β η μ λ, ε θ π ο, ἄρα στερ: ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων καὶ ἴσων τὸ πλῆθος περιέχονται. ὅμοιον ἄρα τὸ β η μ λ, στερ: τῷ ε θ π ο, στερ: τὰ δὲ ὅμοια στερ: πα-

ραλ-

ραλληλεπίπ: καὶ τὴν λγ': τοῦ παρελθόντος, ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ βημλ, ἄρα στερ: πρὸς τὸ εθοπ, στερ: τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος βγ, πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον εζ, πλευράν, ὡς δὲ τὸ βημλ, στερ: πρὸς τὸ εθοπ, στερ: οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ, πυραμίδα. ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ, καὶ τὴν γ': τοῦ παρόντος. διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπ: τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος, καὶ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ἡ αβγη, ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ, πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

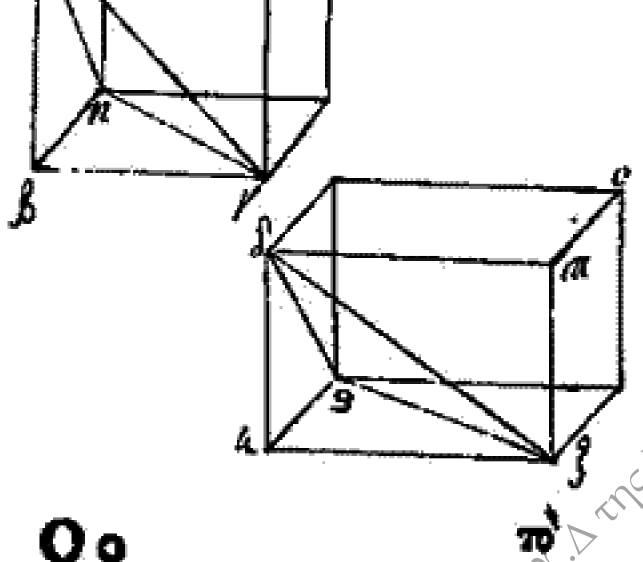
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας, τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι, καὶ τὴν κ': τοῦ ς': καὶ εἰς ἴσα τῷ πλήθει, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἔσται ὡς ἐν ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτω καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα, ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν τρίγ: βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίας βάσεις ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

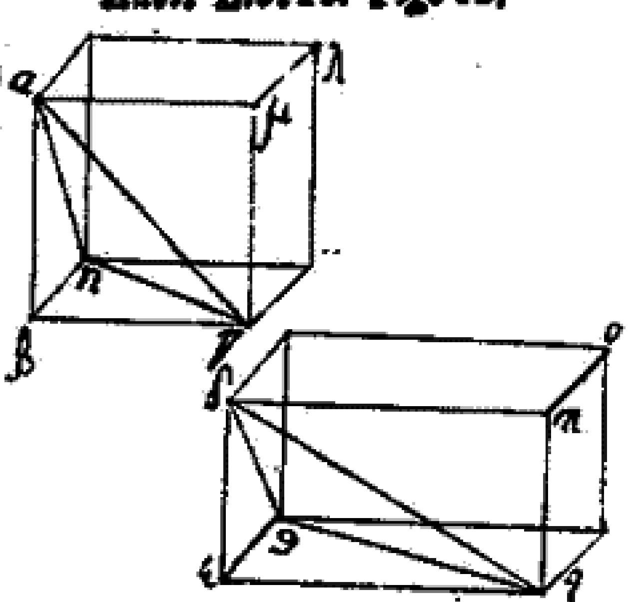
Eucl. Lib. 12. Fig. 11.

Ἔστωσαν γὰρ πυραμίδες ἴσαι τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς αβγ, δεζ, κορυφὰς δὲ τὰ η, θ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι τῶν αβγη, δεζθ, πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς δεζθ, πυραμ: ὕψος, πρὸς τὸ τῆς αβγη, πυρ: ὕψος. Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ βημλ, εθπο, στερεὰ παραλληλεπ: καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβγη, πυρ: τῇ δεζθ, πυρ: καὶ ἔστι τῆς μὲν αβγη, πυραμ: ἑξαπλάσιον τὸ βημλ, στερεὸν, τῆς δὲ δεζθ,



τὸ ε π θ ο, στερεὸν κατὰ τὴν γ΄: καὶ ζ΄: τοῦ παρόντος, ἴσον ἄρα τὸ β η μ λ, στερεὸν τῷ ε θ π ο, στερεῷ, κατὰ γὰρ τὴν λδ΄: τοῦ ια: τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπ: ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β μ, βάσις πρὸς τὴν ε π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ ε θ π ο, ὕψος, πρὸς τὸ τοῦ β η μ λ, στερ: ὕψος. ἀλλ᾽ ὡς ἡ β μ, βάσις πρὸς τὴν ε π, βάσιν, οὕτω τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ δ ε ζ, τρίγωνον. καὶ ὡς ἄρα τὸ α β γ, τρίγων: πρὸς τὸ δ ε ζ, τρίγ: οὕτω τὸ τοῦ ε θ π ο, στερ: ὕψος πρὸς τὸ τοῦ β η μ λ, στερ: ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ε θ π ο, στερ: ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς δ ε ζ θ, πυραμίδος ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς δ ε ζ θ, πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς α β γ η, πυραμίδος ὕψος, τῶν α β γ η, δ ε ζ θ, πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλὰ δὴ τῶν α β γ η, δ ε ζ θ, πυραμ: ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς δ ε ζ θ, πυραμ: ὕψος πρὸς τὸ τῆς α β γ η, πυρ: ὕψος. Λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ α β γ η, πυραμὶς τῇ δ ε ζ θ, πυρ: τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς δ ε ζ θ, πυρ: ὕψος πρὸς τὸ τῆς α β γ η, πυρ: ὕψος. ἀλλ᾽ ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω τὸ β μ, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ε π, παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ β μ, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ ε π, οὕτω τὸ τῆς δ ε ζ θ, πυρ: ὕψος πρὸς τὸ τῆς α β γ η, πυραμ: ὕψος, ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς δ ε ζ θ, πυραμ: ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ε θ π ο, παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς α β γ η, πυρ: ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ β η μ λ, παραλληλεπιπέδου ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β μ, βάσις πρὸς τὴν ε π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ ε θ π ο, παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ β η μ λ, ὧν δὲ στερ: παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν. ἴσον ἄρα τὸ β η μ λ, στερ: παραλληλεπ: τῷ ε θ π ο, στερ: παραλληλεπ: καὶ ἔστι τοῦ μὲν β η μ λ, ἕκτον μέρος ἡ α β γ η, πυραμίς, τοῦ δὲ ε θ π ο, στερεοῦ ὁμοίως ἕκτον μέρος ἡ δ ε ζ θ, πυραμίς. ἡ ἄρα α β γ η, πυραμὶς τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι ἴση ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 12. Fig. 12.



Πρότασις Ι΄: Θεώρημα.

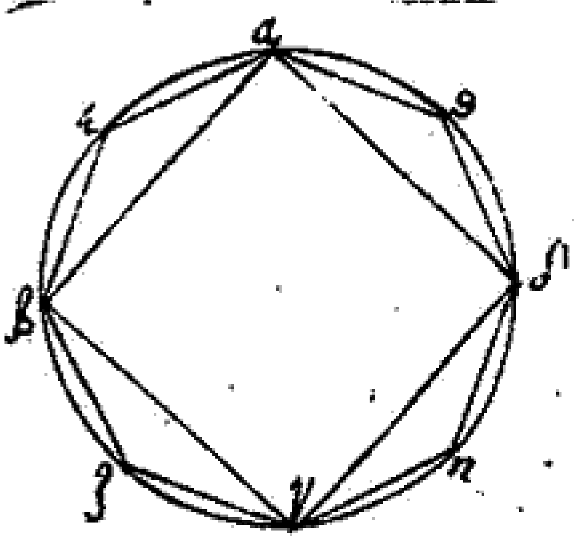
Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστί, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν α β γ δ, κύκλον, καὶ ὕψος ἴσον. Λέγω, ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὁ κύλινδρος

τοῦ

τοῦ κώνου τριπλασίων ἔσται. εἰ γὰρ μή, ἔσται ἤτοι μείζων, ἢ τριπλασίων, ἢ ἐλάτ-
των, ἔστω πρότερον μείζων, ἢ τριπλασίων. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν αβγδ, τετράγωνον
τὸ αβγδ, καὶ τοῦτο δὴ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αβγ, κύκλου, κατὰ τὴν δεῖξιν τῆς β΄:
τοῦ παρ: καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ αβγδ, τετραγ: πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ. τὸ δὴ
ἀνιστάμενον, μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου. ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν αβγδ, κύ-
κλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον τετραγων: ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγρα-
φομένου. καὶ ἔστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπ: πρίσ-
ματα. τὰ ἄρα πρίσματα, ἐστὶν, ὡς αἱ βάσεις. καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ αβγδ, ἀνασα-
θὲν ἄρα τετραγώνου πρίσμα, ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασαθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περιγρα-
φέντος τετραγώνου, καὶ ἔστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος, τοῦ ἀνασαθέντος
ἀπὸ τοῦ περιγραφέντος τετραγ: τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασαθὲν ἀπὸ τοῦ αβγδ, τε-
τραγ: ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου. Τετμήσθωσαν αἱ

Eucl. Lib. 12. Fig. 13.

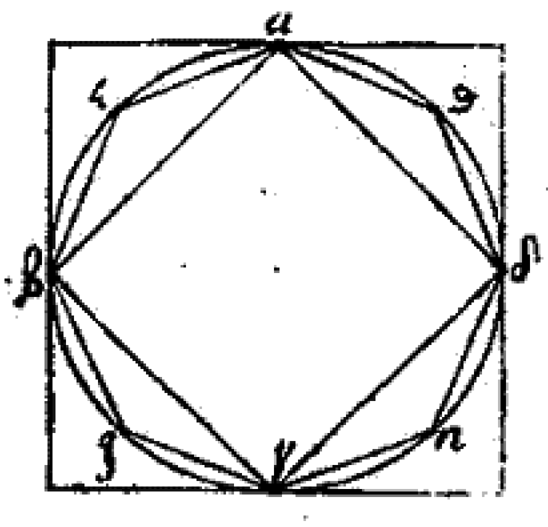


αβ, βγ, γδ, δα, περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ ε, ζ,
η, θ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εβ,
βζ, ζγ, γη, ηδ, δθ, θα, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν
αεβ, βζγ, γηδ, δθα, τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ
τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ αβγδ, κύ-
κλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν κατὰ τὴν β΄: τοῦ
παρόντος. ἀνεστάσθω ἐφ' ἑκάστου τῶν αεβ, βζγ,
γηδ, δθα, τριγ: πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ.
καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασαθέντων πρισμάτων μεῖ-
ζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ κυ-
λίνδρου. ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν ε, ζ, η, θ, σημείων, παραλλήλους ἀγάγωμεν
ταῖς αβ, βγ, γδ, δα, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν αβ, βγ, γδ, δα,
παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋ-
ψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασαθέντων ἡμίση ἐστι τὰ πρίσματα, τὰ ἐπὶ τῶν
αεβ, βζγ, γηδ, δθα, τριγώνων. καὶ ἔστι τὰ τοῦ κυλίνδρου ἀποτμήματα ἐ-
λάττονα τῶν ἀνασαθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν αεβ,
βζγ, γηδ, δθα, τριγώνων, πρίσματα μείζω ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑ-
αυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων. τέμνοντες τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ
ἐπιζευγνῦντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ
τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίν-
δρου, ἃ ἔσται ἐλάττω τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλα-
σίου κώνου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ αε, εβ, βζ, ζγ, γη, ηδ, δθ, θα,
λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ αεβζγηδθ, πολύγωνον, ὕ-
ψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τοῦτο τὸ
πρίσμα, κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ παρ: τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν
ἐστι τὸ αεβζγηδθ, πολύγ: κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα

αὕτη κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ζ΄: τοῦ παρ: μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν α β γ δ, κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων. ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ᾽ αὐτοῦ, ὅπερ ἀδυνάτον. οὐκ ἄρα ἔσαι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων, ἢ τριπλασίων.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ τριπλασίων. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔσω ἐλάττων, ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν α β γ δ, κύκλον τετράγ: τὸ α β γ δ, καὶ τοῦτο μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ α β γ δ, κύκλου. καὶ ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ α β γ δ, τετραγ: πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνασαθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. ἐπειδήπερ ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύλινδρον περιγράψωμεν τετράγωνον, ἔσαι τὸ α β γ δ, τετραγ: ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου, καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνασήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα. ἔσαι τὸ ἀνασαθὲν ἀπὸ τοῦ α β γ δ, τετραγώνου, ἥμισυ τοῦ ἀνασαθέντος ἀπὸ τοῦ περιγραφέντος τετραγώνου, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις, κατὰ τὴν λβ΄: τοῦ παρὲλθ: ὥστε καὶ τὰ τρίτα, καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ α β γ δ, τετράγ: ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασαθείσης ἀπὸ τοῦ περιγραφέντος τετραγ: καὶ αὕτη ἡ πυραμὶς μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ δ, τετράγ: κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ α β, β γ, γ δ, δ α, περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ ε, ζ, η, θ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, ε β, β ζ, ζ γ, γ η, η δ, δ θ, θ α, καὶ ἕκασον ἄρα τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγώνων μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ᾽ αὑτὸ τμήματος τοῦ α β γ δ, κύκλου. καὶ ἀνεστάθωσαν ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγ: πυραμίδες τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ, καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασαθεισῶν πυραμίδων, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομεν τινα τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσαι ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. Λελείφθω, καὶ ἔσω τὰ ἐπὶ τῶν α ε, ε β, β ζ, ζ γ, γ η, η δ, δ θ, θ α, λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ α ε β ζ γ η δ θ, πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου, ἀλλ᾽ αὕτη ἡ πυραμὶς, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μὲν ἐστι τὸ α ε β ζ γ η δ θ, πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, ὥστε καὶ τὸ πρίσμα ὅλον, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις μὲν ἐστιν ὁ α β γ δ, κύκλος, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ἐμπεριέχε-

Eucl. Lib. 12. Fig. 14.



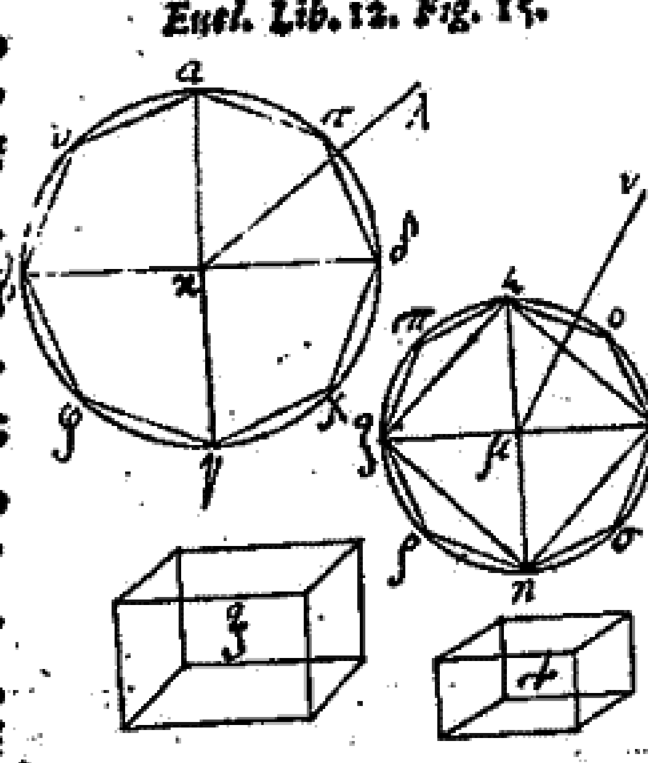
ριέχεἐλέγχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων, οὔτε μείζων, ἀλλὰ τριπλάσιος, ὡς ἐδείχθη, ὥστε ὁ κῶνος, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΑ΄. Θεώρημα.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι, καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, κύκλοι. ἄξονες δὲ οἱ κ λ, μ ν, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ α γ, ε η. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, οὕτως ὁ α λ, κῶνος πρὸς τὸν ε ν. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον,

Eucl. Lib. 12. Fig. 15.



οὕτως ὁ α λ, κῶνος πρὸς ἔλαττον τοῦ ε ν, κώνου στερεὸν, ἢ πρὸς μεῖζον, ἔστω πρὸς ἔλαττον τὸ ξ. καὶ ᾧ ἔλασσον τὸ ξ, στερ: τοῦ ε ν, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ψ, στερεὸν, ὁ ε ν, κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς ξ, ψ, στερεοῖς. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ε ζ η θ, κύκλον τετράγ: τὸ ε ζ η θ, τὸ ἄρα τετράγ: μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. Ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ ε ζ η θ, τετραγ: πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ, ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγ: καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς, ἡμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης, κατὰ γὰρ τὴν ϛ΄: τοῦ παρόντος, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἐλάττων δ' ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμ: ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ε ζ η θ, τετράγ: κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ ε ζ, ζ η, η θ, θ ε, περιφέρειαι, κατὰ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ ο, ο ε, ε π, π ζ, ζ ρ, ρ η, η σ, σ θ, ἕκαστον ἄρα τῶν θ ο ε, ε π ζ, ζ ρ η, η σ θ, τριγώνων, μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. Ἀνεστάθω ἐφ' ἑκάστου τῶν θ ο ε, ε π ζ, ζ ρ η, η σ θ, τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνῦντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες, ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, κατὰ τὴν α΄: τοῦ ι΄: ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ ψ, στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν θ ο ε, ε π ζ, ζ ρ η, η σ θ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ θ ο ε π ζ ρ η σ, πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ ξ, στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν

α β γ δ,