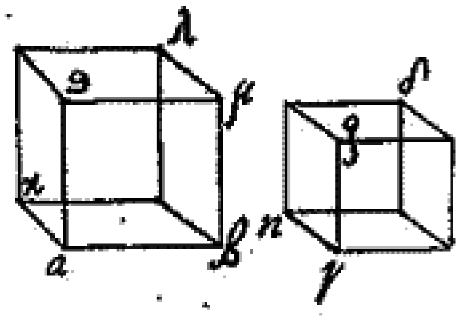
Πρότασις ΚΖ': Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ α β, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ δ γ. Δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς α β, τῷ δοθέντι στερῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ δ γ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον, καὶ τὰ ἑξῆς. Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ α β, εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ πρὸς τῷ γ, στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν β α θ, θ α κ, κ α β, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ β α θ, γωνίαν τῇ ὑπὸ ε γ ζ, τὴν δὲ ὑπὸ β α κ, τῇ ὑπὸ ε γ η, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ κ α θ, τῇ ὑπὸ ε γ ζ. καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ε γ, πρὸς τὴν γ η, οὕτως ἡ β α, πρὸς τὴν α κ, ὡς δὲ ἡ η γ, πρὸς τὴν γ ζ, οὕτως ἡ α κ, πρὸς τὴν α θ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ε γ, πρὸς τὴν γ ζ, οὕτως ἡ β α, πρὸς τὴν α θ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ β θ, παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ α λ, στερεόν. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ε γ, πρὸς τὴν γ η, οὕτως ἡ β α, πρὸς τὴν α κ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ε γ η, β α κ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα τὸ η ε, παραλληλόγραμμον τῷ κ β, παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν κ θ, παραλληλόγραμμον τῷ η ζ, παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. καὶ ἔτι τὸ ζ ε, τῷ θ β, τρία ἄρα παραλληλόγρ: τοῦ γ δ, στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμ: τοῦ α λ, στερεοῦ ὅμοιά εἰσιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε ἐστὶ καὶ ὅμοια, ὅλον ἄρα τὸ γ δ, στερεὸν ὅλῳ τῷ α λ, στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν. Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς α β, καὶ τὰ ἑξῆς.

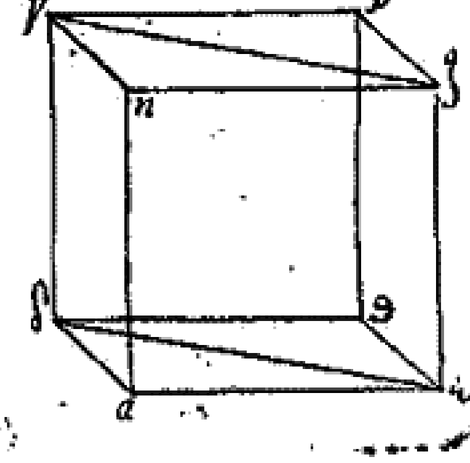
Eucl. Lib. 11. Fig. 22.

ΚΖ:



Πρότασις ΚΗ': Θεώρημα.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.



Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ α β, ἐπιπέδῳ τῷ γ δ ε ζ, τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, τὰς γ ζ, δ ε. Λέγω, ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ α β, στερεὸν ὑπὸ τοῦ γ δ ε ζ, ἐπιπέδου. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν γ η ζ, τρίγωνον τῷ γ β ζ, τριγώνῳ. τὸ δὲ α δ ε, τῷ δ ε θ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν γ α, παραλληλόγρ: τῷ β ε, ἴσον, ἀπεναντίον γάρ, τὸ δὲ η ε, τῷ γ θ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο

μὲν

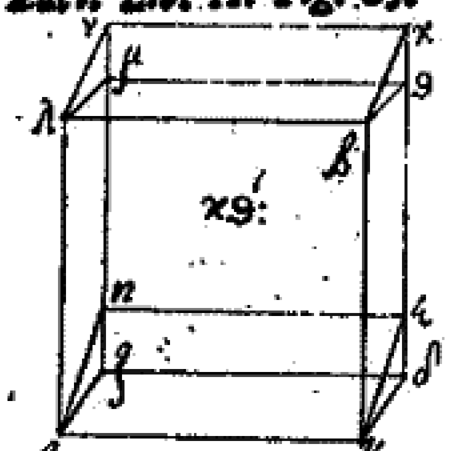
μὲν τριγώνων τῶν γ η ζ, α δ ε, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν η ε, α γ, γ ε, ἴσόν ἐστι τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῶν γ ζ β, δ ε θ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων γ θ, β ε, γ ε, ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ πλήθει, καὶ τῷ μεγέθει. ὥστε ὅλον τὸ α β, στερεὸν δίχα τέτμηται, ὑπὸ τοῦ γ δ ε ζ, ἐπιπέδου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΘ': Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

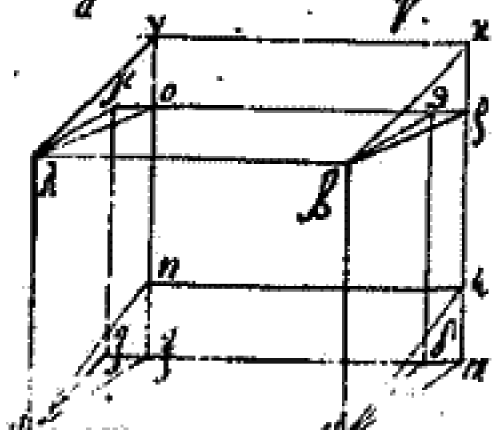
Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς α β, στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ γ μ, γ ν, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι, αἱ α ζ, α η, λ μ, λ ν, γ δ, γ ε, β θ, β κ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν ζ ν, δ κ. Λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ γ μ, στερεὸν τῷ γ ν, στερεῷ. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν γ θ, γ ε, ἴση ἐστὶν ἡ γ β, ἑκατέρᾳ τῶν δ θ, ε κ, ὥστε καὶ ἡ δ θ, τῇ ε κ, ἐστὶν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ε θ, λοιπὴ ἄρα ἡ δ ε, λοιπῇ τῇ θ κ, ἴση ἐστίν. ὥστε καὶ τὸ δ ε γ, τρίγωνον τῷ θ κ β, τριγώνῳ ἴσον ἐστι, τὸ δὲ δ η, παραλληλόγραμμον τῷ θ ν, παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ α ζ η, τρίγωνον τῷ λ μ ν, τριγώνῳ ἴσον ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν γ ζ, παραλληλόγραμ: τῷ β μ, παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ γ η, τῷ β ν, ἀπεναντίον γάρ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν α ζ η, δ ε γ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν α δ, δ η, η γ, ἴσον ἐστι τῷ πρίσματι, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν λ μ ν, θ β κ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν β μ, ν θ, β ν, κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ α β, παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ η ε θ μ, ὅλον ἄρα τὸ γ μ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ γ ν, στερῷ παραλληλεπιπ: ἴσον ἐστι. τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 33.



Πρότασις Λ': Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.



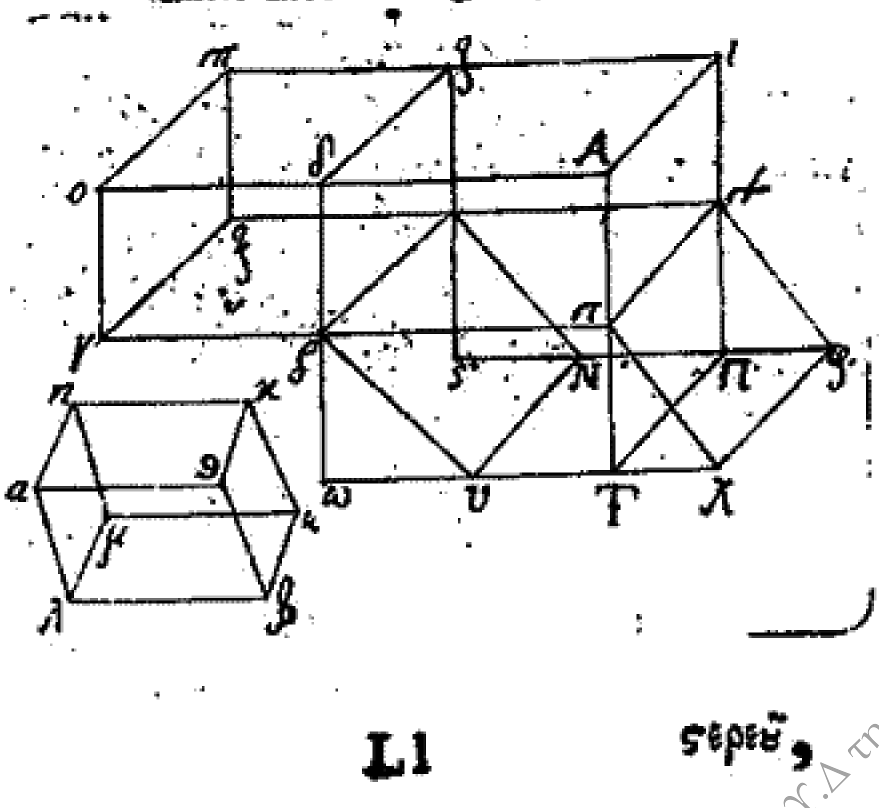
Ἔστω γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς α β, στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ γ μ, γ ν, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι, αἱ α ζ, α η, λ μ, λ ν, γ δ, γ ε, β θ, β κ, β κ, μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. Λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ γ μ, στερεὸν τῷ γ ν, στερεῷ. Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ν κ, δ θ, καὶ ἔτι αἱ η ε, ζ μ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὰ ο, ρ, π, ξ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ξ, λ ο, γ π, β ρ, ἴσον δή ἐστι τὸ γ μ, στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ α γ β λ, παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ζ δ θ μ, τῷ γ ο, στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ α γ β λ, παραλληλόγραμμ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ζ π ρ ο, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς α γ β λ, καὶ αὐτῶν αἱ ὑφεστῶσαι αἱ α ζ, α ξ, λ μ, λ ο, γ δ, γ π, β θ, β ρ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ζ π, μ ρ, καὶ τὸ γ ο, στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ α γ β λ, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ξ π ρ ο, καὶ τῷ αὐτῷ, ἴσον ἐστὶ τῷ γ ν, στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ α γ β λ, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ τὸ κ ε η ν, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς α γ β λ, καὶ αὐτῶν αἱ ὑφεστῶσαι, αἱ α η, α ξ, γ ε, γ π, λ ν, λ ο, β κ, β ρ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, τῶν κ π, ν ξ, ὥστε καὶ τὸ γ μ, στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γ ν, στερεῷ. Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΑ': Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

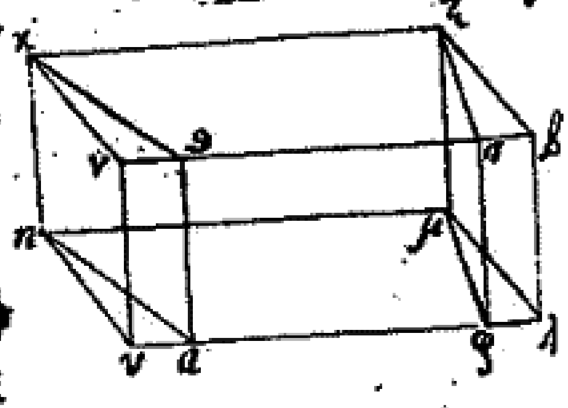
Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν α β, γ δ, στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ α ε, γ ζ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ α ε, στερεὸν τῷ γ ζ, στερεῷ. Ἔστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ θ κ, β ε, α η, λ μ, ο π, δ ζ, γ ξ, ρ σ, πρὸς ὀρθὰς ταῖς α β, γ δ, βάσεσιν, ἡ δὲ ὑπὸ α λ β, τῇ ὑπὸ γ ρ δ, ἄνισος. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ γ ρ, εὐθεῖα ἡ ρ τ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ρ τ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ ρ, τῇ ὑπὸ α λ β, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ τ ρ υ, καὶ κείσθω τῇ μὲν α λ, ἴση ἡ ρ τ, τῇ δὲ λ β, ἴση ἡ ρ υ, καὶ πρὸς τῷ υ, σημείῳ τῇ ρ τ, παράλληλος ἀνεστάθω ἡ υ χ, καὶ συμπεπληρώσθω ἥ τε ρ χ, βάσις, καὶ τὸ ψ υ, στερεὸν, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ρ τ, ρ υ, δυσὶ ταῖς α λ, λ β, ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ρ χ, παραλληλόγραμ: τῷ θ λ, παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν α λ, τῇ ρ τ, ἡ δὲ λ μ, τῇ ρ σ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ρ ψ, παραλληλόγραμ: τῷ α μ, παραλληλογράμ: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ λ ε, τῷ σ υ, ἴσον τε ἐστὶ καὶ ὅμοιον. τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ α ε, στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμ: τοῦ ψ υ,

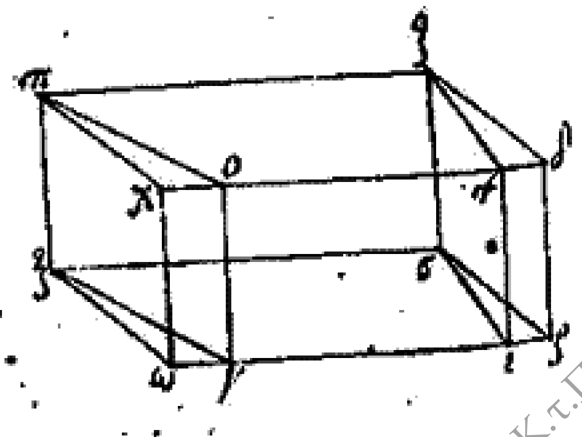
Eucl. Lib. 11. Fig. 24.



στερεοῦ ἴσα ἐστι, καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν ἓξ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε ἐστὶ καὶ ὅμοια, καὶ ὅλον ἄρα τὸ α ι, στερεὸν παραλληλεπίπ: ὅλῳ τῷ ψ υ, παραλληλεπιπ: ἴσον ἐστι. διήχθωσαν αἱ δ ρ, χ υ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ ω, καὶ διὰ τοῦ τ, τῇ δ ω, παράλληλος ἡ τ Τ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἡ Τ τ, καὶ ο δ, καὶ συνεζεύχθωσαν κατὰ τὸ Λ. καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ ω ψ, ρ ι, στερεὰ, ἴσον δή ἐστι τὸ ψ ω, στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ρ ψ, παραλληλόγραμμ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ω Π, τῷ ψ υ, στερεῷ, οὗ βάσις ἐστὶ τὸ ρ ψ, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ τὸ υ φ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ρ ψ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ αὐτῶν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ρ ω, ρ υ, Τ τ, τ χ, σ ς, σ Ν, ψ Π, ψ φ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσι εὐθειῶν τῶν ω χ, ς φ, ἀλλὰ τὸ ψ υ, στερεὸν τῷ α ι, ἴσον ἐστι, καὶ τὸ ψ ω, ἄρα στερεὸν τῷ α ι, στερεῷ, ἴσον ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστι τὸ ρ υ χ τ, παραλληλόγραμ: τῷ ω τ, παραλληλογράμ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ρ τ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ρ τ, ω χ, ἀλλὰ τὸ ρ υ χ τ, τῷ γ δ, ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ α β. καὶ τὸ ω τ, ἄρα παραλληλόγραμ: τῷ γ δ, ἐστὶ ἴσον. ἄλλο δὲ τὸ δ τ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ δ, βάσις πρὸς τὴν δ τ, οὕτως ἡ ω τ, πρὸς τὴν δ τ, καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ γ ι, ἐπιπέδῳ τῷ ρ ζ, τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ὡς ἡ γ δ, βάσις πρὸς τὴν δ τ, βάσιν, οὕτως τὸ γ ζ, στερεὸν πρὸς τὸ ρ ι, στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ω ι, ἐπιπέδῳ τῷ ρ ψ, τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ω τ, βάσις πρὸς τὴν δ τ, βάσιν, οὕτω τὸ ω ψ, στερεὸν πρὸς τὸ ρ ι, στερεὸν, ἀλλ᾽ ὡς ἡ γ δ, βάσις πρὸς τὴν δ τ, οὕτως ἡ ω τ, πρὸς τὴν τ δ, καὶ ὡς ἄρα τὸ γ ζ, στερεὸν πρὸς τὸ ρ ι, στερεὸν, οὕτω τὸ ω ψ, στερεὸν πρὸς τὸ ρ ι, στερεὸν, ἑκάτερον ἄρα τῶν γ ζ, ψ ω, στερεῶν πρὸς τὸ ρ ι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἴσον ἄρα τὸ γ ζ, στερεὸν τῷ ω ψ, στερεῷ, ἀλλὰ τὸ ω ψ, τῷ α ι, ἐδείχθη ἴσον, καὶ τὸ α ι, ἄρα ἴσον ἐστι τῷ γ ζ. Μὴ ἔστωσαν δὲ αἱ ἐφεστηκυῖαι, αἱ α η, θ κ, β ι, λ μ, γ ξ, ο π, δ ζ, ρ σ, πρὸς ὀρθὰς ταῖς α β, γ δ, βάσεσιν. Ἀλλ᾽ αὖθις λέγω, ὅτι ἴσον ἐστι τὸ α ι, στερεὸν τῷ γ ζ, στερεῷ. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κ, ι, η, μ, π, ζ, ξ, σ, σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον κάθετοι αἱ κ ν, ι τ, η υ, μ φ, π χ, ζ ψ, ξ ω, σ ι, καὶ συμβαλλέσθωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ ν, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ι, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ν τ, υ φ, ν υ, τ φ, χ ψ, χ ω, ω ι, ψ ι. ἴσον δή ἐστι τὸ κ φ, στερεὸν τῷ π ι, στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν κ μ, π σ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν, ἀλλὰ τὸ μὲν κ φ, τῷ α ι, στερεῷ ἴσον ἐστι, τὸ δὲ π ι, τῷ γ ζ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐ-

Eucl. Lib. 11. Fig. 25.





φισῶ-

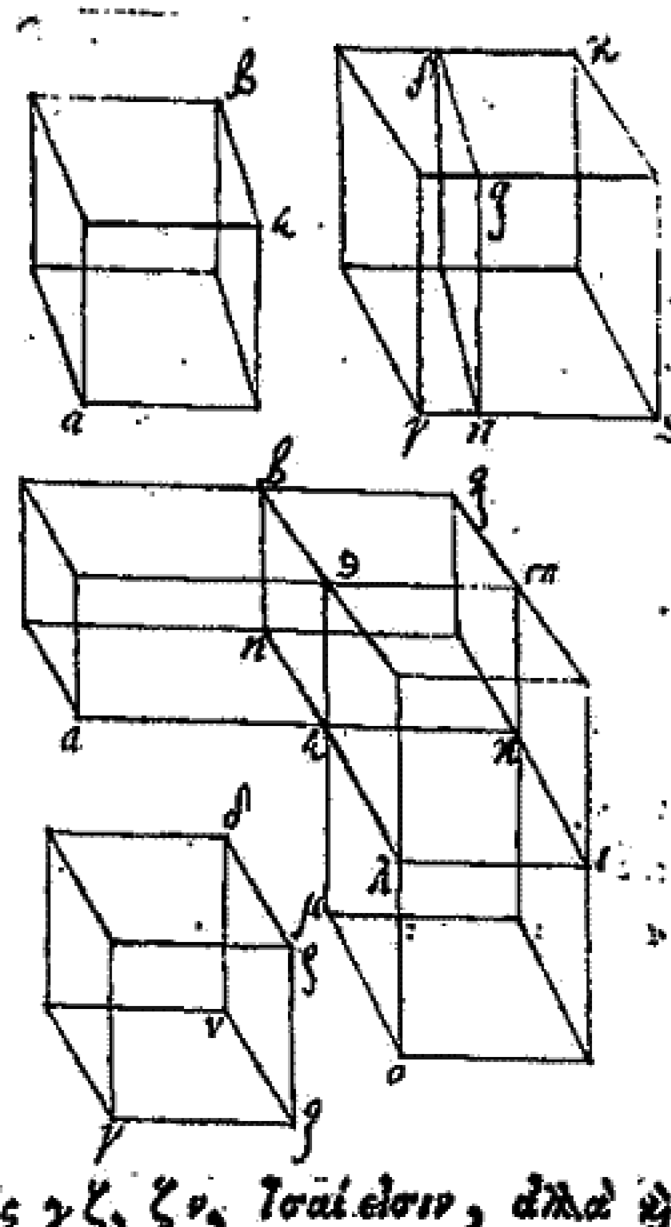
φισῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, καὶ τὸ αε, ἄρα στερεὸν τῷ γζ, στερεῷ ἐστὶν ἴσον, τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΒ': Θεώρημα.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ αβ, γδ. Λέγω, ὅτι ταῦτα ἔχουσιν ὡς αἱ βάσεις (τουτέστιν, πρὸς ἄλληλα) ὡς ἡ αε, βάσις πρὸς τὴν γζ, βάσιν, οὕτως τὸ αβ, στερεὸν, πρὸς τὸ γδ, στερεόν. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ζη, τῷ αε, ἴσον τὸ ζθ, παραλληλόγρ: καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ζθ, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ γδ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τὸ ηκ, ἴσον δή ἐστι τὸ αβ, στερεὸν τῷ ηκ, στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν αε, ζθ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ γκ, ἐπιπέδῳ τῷ δη, τέμνεται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα κατὰ τὴν κε: τοῦ παρόντος, ὡς ἡ θζ, βάσις πρὸς τὴν γζ, βάσιν, οὕτω τὸ θδ, στερεὸν, πρὸς τὸ δγ, στερεὸν, ἴση δὲ ἡ μὲν ζθ, βάσις τῇ αε, βάσει, τὸ δὲ ηκ, στερεὸν τῷ αβ, στερεῷ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αε, βάσις πρὸς τὴν γζ, βάσιν, οὕτω τὸ αβ, στερεὸν, πρὸς τὸ γδ, στερεὸν, τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα. καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 26.



Πρότασις ΛΓ': Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ αβ, γδ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ αε, τῇ γζ. Λέγω, ὅτι τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ γδ, στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ ἡ αε, πρὸς τὴν γζ. Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς αε, ηε, θε, αἱ εκ, ελ, εμ. καὶ κείσθω τῇ μὲν γζ, ἴση ἡ εκ, τῇ δὲ ζν, ἴση ἡ ελ, καὶ ἔτι τῇ ζρ, ἴση ἡ εμ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ κλ, παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ κο, στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ εκ, ελ, δυσὶ ταῖς γζ, ζν, ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κελ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γζν, ἐστὶν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ αεη, τῇ ὑπὸ γζν, ἐστὶν ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβ, γδ, στερεῶν, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ ὅμοιον τὸ κλ, παραλληλόγραμμον τῷ γν, παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν κμ, παραλληλόγρ: καὶ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ γρ, παραλληλόγρ: καὶ ἔτι τὸ οε, τῷ δζ, τρία ἄρα παραλληλόγραμμ: τοῦ κε, στερεοῦ, τρισὶ παραλληλογράμ: τοῦ γδ, στερεοῦ ἐστὶν ἴσα τε καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ὅλον ἄρα τὸ κο, στερεὸν ὅλῳ τῷ γδ, στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω τὸ ηκ, παραλληλόγραμ: καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν ηκ, κλ, παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ αβ, στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ εξ, λπ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβ, γδ, στερεῶν, ἐστὶν ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ εη, πρὸς τὴν ζν, καὶ ἡ εθ, πρὸς τὴν ζρ, ἴση δὲ ἡ μὲν ζγ, τῇ εκ, ἡ δὲ ζν, τῇ ελ, ἡ δὲ ζρ, τῇ εμ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εκ, οὕτως ἡ ηε, πρὸς τὴν ελ, καὶ ἡ θε, πρὸς τὴν εμ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ αε, πρὸς τὴν εκ, οὕτω τὸ αη, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ ηκ, παραλληλόγρ: κατὰ τὸ α': τοῦ ϛ': ὡς δὲ ἡ ηε, πρὸς τὴν ελ, οὕτω τὸ ηκ, πρὸς τὸ κλ, ὡς δὲ ἡ θε, πρὸς τὴν εμ, οὕτω τὸ πε, πρὸς τὸ κμ, καὶ ὡς ἄρα τὸ αη, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ ηκ, οὕτω τὸ ηκ, πρὸς τὸ κλ, καὶ πε, πρὸς τὸ κμ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ αη, πρὸς τὸ ηκ, οὕτω τὸ αβ, στερεὸν, πρὸς τὸ εζ, στερεὸν, ὡς δὲ τὸ ηκ, πρὸς τὸ κλ, οὕτω τὸ ξε, στερεὸν πρὸς τὸ πλ, στερεὸν, ὡς δὲ τὸ πε, πρὸς τὸ κμ, οὕτω τὸ πλ, στερεὸν πρὸς τὸ κο, στερεὸν, καὶ ὡς ἄρα τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ εξ, οὕτω τὸ εξ, πρὸς τὸ πλ, καὶ τὸ πλ, πρὸς τὸ κο. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δ': τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ β': κατὰ τὸν ι α: ὅρον τοῦ ε': καὶ τὸ αβ, ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ κο, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ εξ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ αβ, πρὸς τὸ εξ, οὕτω καὶ τὸ αη, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ ηκ, καὶ ἡ αε, εὐθεῖα πρὸς τὴν εκ, ὥστε καὶ τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ κο, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αε, πρὸς τὴν εκ, ἴσον δὲ τὸ μὲν κο, στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ. ἡ δὲ εκ, εὐθεῖα τῇ γζ, καὶ τὸ αβ, ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ γδ, στερ: τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ αε, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν γζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

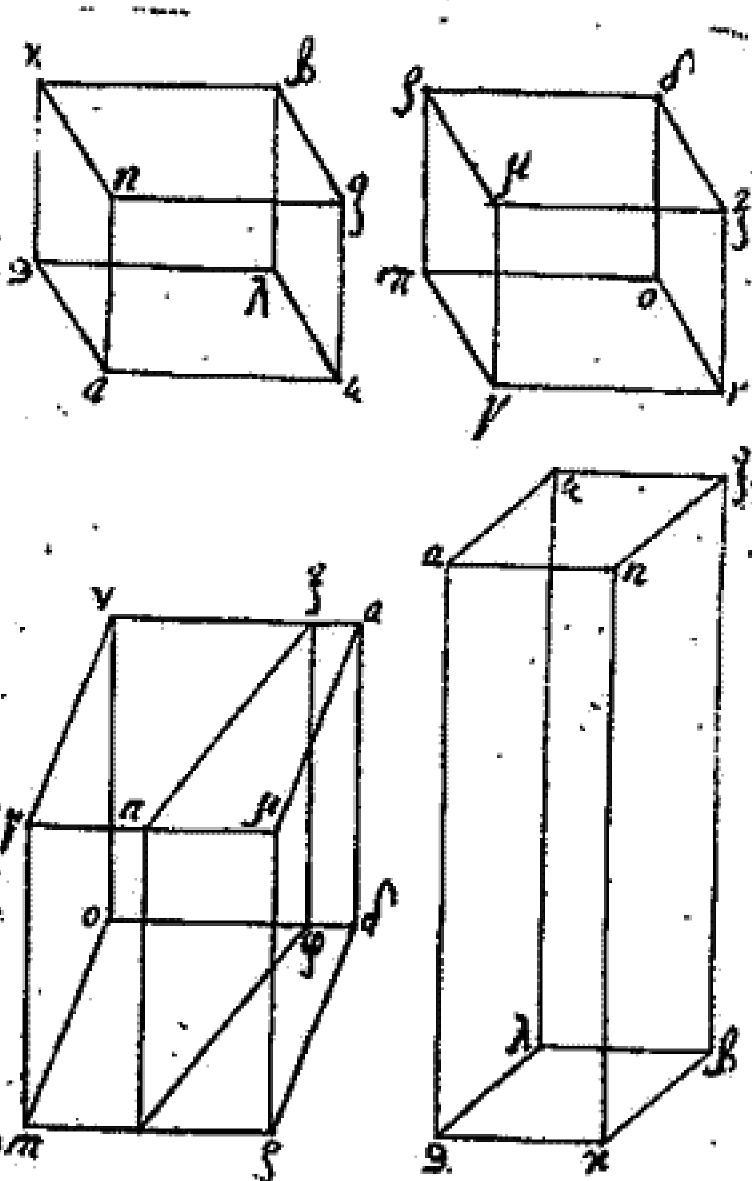
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν. ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἐπειδήπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

Πρότασις ΛΔ΄: Θεώρημα.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπ: τὰ αβ, γδ. Λέγω, ὅτι τῶν αβ, γδ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ εθ, βάσις πρὸς τὴν κπ, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γδ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αβ, στερεοῦ ὕψος. Ἔστω γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ αη, εζ, λβ, θκ, γμ, νξ, οδ, πρ, πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ εθ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτως ἡ γμ, πρὸς τὴν αη. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ εθ, βάσις τῇ νπ, βάσει, ἔστι καὶ τὸ αβ, στερ: τῷ γδ, στερ: ἔσται καὶ ἡ γμ, τῇ αη, ἴση. εἰ γὰρ τῶν εθ, νπ, βάσεων ἴσων οὐσῶν, μὴ εἴη τὰ αη, γμ, ὕψη ἴσα, οὐδ᾽ ἄρα τὸ αβ, στερ: τῷ γδ, στερεὸν ἴσον ἔσται.

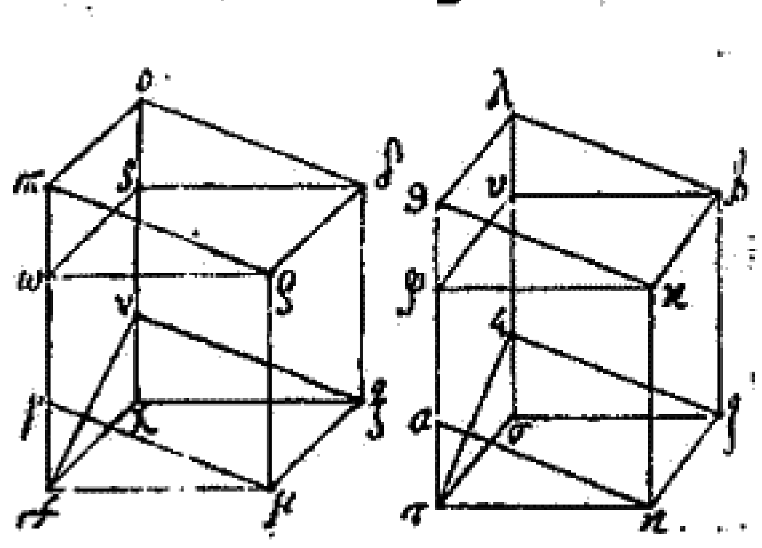
Eucl. Lib. XI. Fig. 27.



ὑπόκειται δὲ ἴσον, οὐκ ἄρα ἄνισον, τὸ γμ, ὕψος τῷ αη, ὕψει, ἴσον ἄρα, καὶ ἔσται ὡς ἡ εθ, βάσις πρὸς τὴν νπ, οὕτως ἡ γμ, πρὸς τὴν αη, καὶ φανερὸν, ὅτι τῶν αβ, γδ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. Μὴ ἔστω δὲ ἴση ἡ εθ, βάσις τῇ νπ, βάσει, ἀλλὰ μείζων. ἔστι δὲ καὶ τὸ αβ, στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ ἴσον, μείζων ἄρα καὶ ἡ γμ, τῆς αη. εἰ γὰρ μὴ, οὐδ᾽ ἄρα πάλιν τὰ αβ, γδ, στερεὰ, ἴσα ἔσται, ὑπόκειται δὲ ἴσα. κείσθω οὖν τῇ αη, ἴση ἡ γτ, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς νπ, ὕψους δὲ τοῦ γτ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ φγ, καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ αβ, στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ, ἄλλο δέ τι τὸ φγ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ γφ, στερεὸν οὕτω τὸ γδ, στερεὸν πρὸς τὸ αὐτὸ γφ, στερεὸν, ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ γφ, στερεὸν, οὕτως ἡ εθ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, ἰσοϋψῆ γὰρ, κατὰ τὴν λβ΄: τὰ παρόντος τὰ αβ, γφ, στερεὰ, ὡς δὲ τὸ γδ, στερ: πρὸς τὸ γφ, στερ: οὕτως ἡ μπ, βάσις πρὸς τὴν πτ, βάσιν, καὶ ἡ μγ, πρὸς τὴν γτ, ὡς ἄρα ἡ εθ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτως ἡ μγ, πρὸς τὴν γτ, ἴση δὲ ἡ γτ, τῇ αη, καὶ ὡς ὡς ἄρα ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως ἡ μ γ, πρὸς τὴν α η. τῶν α β, ἄρα γ δ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. Πάλιν δὴ τῶν α β, γ δ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γ δ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ α β, λέγω, ὅτι ἴσον ἐστι τὸ α β, στερ: τῷ γ δ, στερεῷ. Ἑστωσαν γὰρ πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσι, καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ε θ, βάσις τῇ ν π, βάσει, ἔστιν ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γ δ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ α β, στερ: ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ γ δ, ὕψος τῷ τοῦ α β, στερ: ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἴσον ἄρα τὸ α β, στερεὸν τῷ γ δ, στερεῷ. Μὴ ἔστω δὴ ἡ ε θ, βάσις τῇ ν π, ἴση, ἀλλὰ μείζων, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ τοῦ γ δ, στερεοῦ ὕψος τοῦ α β, στερεοῦ ὕψος, τουτέστιν ἡ μ γ, τῆς α η. κείσθω τῇ α η, ἴση πάλιν ἡ γ τ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ γ φ, στερεόν. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως ἡ γ μ, πρὸς τὴν α η, ἴση δὲ ἡ α η, τῇ γ τ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως ἡ γ μ, πρὸς τὴν γ τ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως τὸ α β, στερεὸν πρὸς τὸ γ φ, στερεὸν, ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ α β, γ φ, στερεὰ, ὡς δὲ ἡ μ γ, πρὸς τὴν γ τ, οὕτως ἥτε μ π, βάσις πρὸς τὴν π τ, βάσιν, καὶ τὸ γ δ, στερεὸν πρὸς τὸ γ φ, καὶ ὡς ἄρα τὸ α β, στερ: πρὸς τὸ γ φ, οὕτω τὸ γ δ, στερεὸν πρὸς τὸ γ φ, ἑκάτερον ἄρα τῶν α β, γ δ, πρὸς τὸ γ φ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἴσον ἄρα τὸ α η, στερ: τῷ γ δ, στερ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι ζ ε, β λ, η α, κ θ, ξ ν, δ ο, μ γ, ρ π, πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν ζ, η, β, κ, ξ, μ, δ, ρ, σημείων, ἐπὶ τὰ τῶν ε θ, ν π, βάσεων, ἐπίπεδα κάθετοι, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ς, ω, σημεῖα, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ζ φ, ξ ω, στερεά. Λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν α β, γ δ, στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γ δ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ α β, ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστι τὸ α β, στερεὸν τῷ γ δ, στερεῷ, ἀλλὰ τὸ μὲν α β, τῷ β τ, ἐστὶν ἴσον, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ζ κ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐφεστῶσαι

Eucl. Lib. 11. Fig. 28.



οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. τὸ δὲ γ δ, στερεὸν τῷ δ ψ, ἴσον, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ξ ρ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, καὶ τὸ β τ, ἄρα στερεὸν τῷ δ ψ, στερεῷ ἴσον ἐστί· τῶν δ' ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν,

αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζκ, βάσις πρὸς τὴν ξρ, βάσιν, (ἴση δὲ ἡ μὲν ζκ, βάσις τῇ εθ, βάσει, ἡ δὲ ξρ, βάσις τῇ νπ,) οὕτω τὸ τοῦ δψ, στερεοῦ ὕψος, πρὸς τὸ τοῦ βτ, ὕψος, τὰ δ᾽ αὐτὰ ὕψη ἐστὶν τῶν δψ, βτ, στερεῶν, καὶ τῶν αβ, δγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ εθ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γδ, στερ: ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αβ, στερεοῦ. τῶν αβ, γδ, ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. Πάλιν δὴ τῶν αβ, γδ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ εθ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν οὕτω τὸ τοῦ γδ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αβ, στερεοῦ. Λέγω, ὅτι ἰσόν ἐστι τὸ αβ, στερ: τῷ γδ, στερεῷ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ εθ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γδ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αβ, στερεοῦ, ἴση δὲ ἡ μὲν εθ, βάσις τῇ ζκ, βάσει, ἡ δὲ νπ, τῇ ξρ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζκ, βάσις πρὸς τὴν ξρ, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γδ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αβ, στερεοῦ τὰ δ᾽ αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν αβ, γδ, στερεῶν, καὶ τῶν βτ, δψ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζκ, βάσις πρὸς τὴν ξρ, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ δψ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ βτ, στερεοῦ ὕψος, τῶν βτ, δψ, ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα, ἴσον ἄρα τὸ βτ, στερεὸν τῷ δψ, στερεῷ, ἀλλὰ τῷ μὲν βτ, τὸ αβ, ἐστὶν ἴσον. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσὶ τῆς ζκ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, τὸ δὲ δψ, στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ ἴσον ἐστίν, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ξρ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, τὸ αβ, ἄρα στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ ἐστιν ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

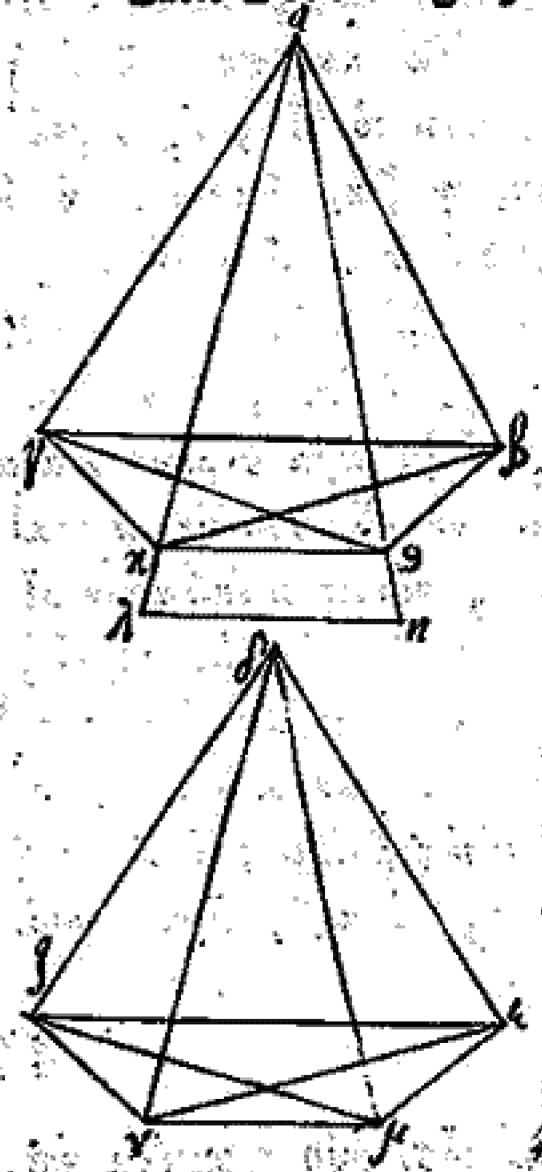
Πρότασις ΛΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ὑπὸ τῶν καθέτων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ. ἀπὸ δὲ τῶν α, δ, σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάθωσαν αἱ αη, δμ, ἴσας περιέχουσαι γωνίας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ μδε, τῇ ὑπὸ ηαβ, τὴν δὲ ὑπὸ μδζ, τῇ ὑπὸ ηαγ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῶν αη, δμ, τυχόντα σημεῖα τὰ η, μ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν η, μ, σημείων, ἐπὶ τὰ διὰ τῶν βαγ, εδζ,

ἐπιἐπίπεδα κάθετοι, αἱ κλ, μν. Λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ κ α λ, γωνία τῇ ὑπὸ μ δ ν, γωνίᾳ. Κείσθω τῇ δ μ, ἴση ἡ α θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ θ, τῇ κ λ, παράλληλος, ἡ κ θ, ἡ δὲ κ λ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν β α γ, ἐπίπεδον, καὶ ἡ θ κ, ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν β α γ, ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κ, ν, σημείων ἐπὶ τὰς α β, α γ, δ ζ, δ ε, εὐθείας κάθετοι αἱ κ β, κ γ, ν ζ, ν ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ γ, γ β, μ ζ, ζ ε. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς θ α, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θ κ, κ α, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς κ α, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κ γ, γ α, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θ κ, ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ θ κ, κ γ, γ α, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν θ κ, κ γ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς θ γ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς θ α, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θ γ, γ α, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ θ γ α, γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ δ ζ μ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ α γ θ, γωνία τῇ ὑπὸ δ ζ μ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ θ α γ, τῇ ὑπὸ μ δ ζ, ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ μ δ ζ, θ γ α, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν α θ, τῇ δ μ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἴση ἄρα ἡ α γ, τῇ δ ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ α β, τῇ δ ε, ἴση ἐστίν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ β, μ ε, καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς α θ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α κ, κ θ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς α κ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α β, β κ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν α β, β κ, κ θ, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α θ, ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν β κ, κ θ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β θ. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ θ κ β, γωνία. διὰ τὸ καὶ τὴν θ κ, κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς α θ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α β, β θ, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ α β θ, γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὑπὸ δ ε μ, γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ β α θ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ε δ μ, ὑπόκειται γάρ, καὶ ἔστιν ἡ α θ, τῇ δ μ, ἴση ἄρα καὶ ἡ α β, τῇ δ ε. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν α γ, τῇ δ ζ, ἡ δὲ α β, τῇ δ ε, δύο δὴ αἱ α γ, α β, δυσὶ ταῖς ζ δ, δ ε, ἴσαι εἰσιν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γ α β, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζ δ ε, ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ β γ, βάσει τῇ ε ζ, ἴση ἐστί, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ α γ β, γωνία τῇ ὑπὸ δ ζ ε, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ α γ κ, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ δ ζ ν, ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ β γ κ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ε ζ ν, ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ὑπὸ γ β κ, γωνία τῇ ὑπὸ ζ ε ν, ἴση. δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ γ β κ, ζ ε ν, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας

Eucl. Lib. 11. Fig. 29.



ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν β γ, τῇ ε ζ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν, ἴση ἄρα ἡ γ κ, τῇ ζ ν, ἔστι δὲ καὶ ἡ α γ, τῇ δ ζ, ἴση, δύο δὴ αἱ α γ, γ κ, δυσὶ ταῖς δ ζ, ζ ν, ἴσαι εἰσί, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ α κ, βάσει τῇ δ ν, ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α θ, τῇ δ μ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α θ, τῷ ἀπὸ τῆς δ μ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς α θ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α κ, κ θ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ α κ θ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς δ μ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν δ ν, ν μ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ δ ν μ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν α κ, κ θ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δ ν, ν μ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς α κ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δ ν. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κ θ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ν μ, ἴση ἄρα ἡ θ κ, τῇ ν μ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ θ α, α κ, δυσὶ ταῖς μ δ, δ ν, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ θ κ, βάσει τῇ ν μ, ἐδείχθη ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ θ α κ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ μ δ ν, ἐστὶν ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

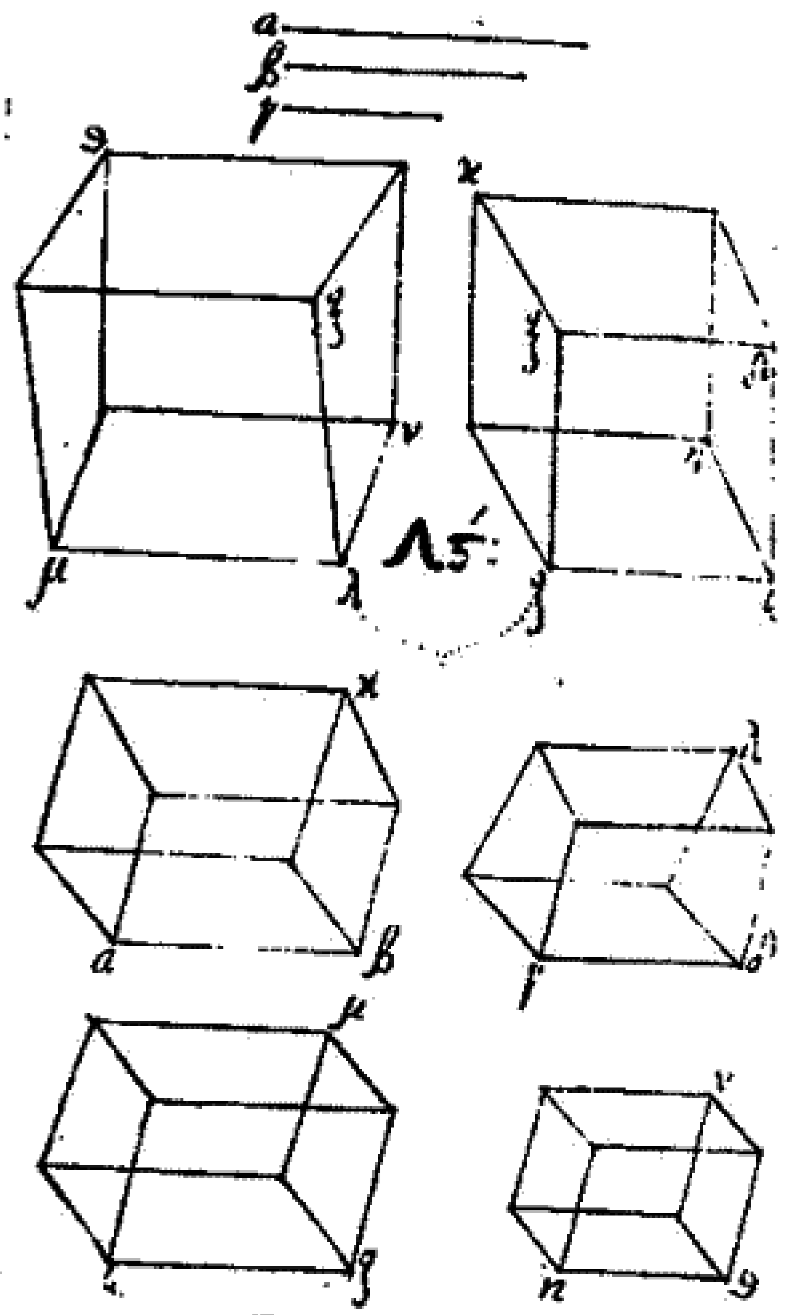
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἐπ᾽ αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ᾽ αὐτῶν κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Πρότασις Λϛ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον, αἱ α, β, γ, ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ β, πρὸς τὴν γ. Λέγω, ὅτι τὸ ἐκ τῶν α β γ, στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ ε, περιεχομένη ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, τῶν ὑπὸ δ ε η, η ε ζ, ζ ε δ, καὶ κείσθω τῇ μὲν β, ἴση ἑκάστη τῶν δ ε, η ε, ε ζ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ε κ, στερεὸν παραλληλεπ: τῇ δὲ α, κείσθω ἴση ἡ λ μ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ λ μ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ λ, τῇ πρὸς τῷ ε, στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ν λ ξ, ξ λ μ, μ λ ν, καὶ κείσθω τῇ μὲν β, ἴση ἡ λ ξ, τῇ δὲ γ, ἴση ἡ λ ν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ β, πρὸς τὴν γ, ἴση δὲ ἡ μὲν α, τῇ λ μ, ἡ δὲ β, ἑκάστῃ τῶν λ ξ, ε ζ, ε η, ε δ, ἡ δὲ γ, τῇ λ ν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λ μ, πρὸς τὴν ε ζ, οὕτως ἡ δ ε, πρὸς τὴν λ ν, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ μ λ ν, δ ε ζ, αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν. ἴσον ἄρα τὸ μ ν, παραλληλογραμ: τῷ δ ζ, παραλληλογράμ: καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι, εἰσὶν ἴσαι, αἱ ὑπὸ δ ε ζ, ν λ μ, καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστήκασιν αἱ λ ξ, ε η, ἴσαι τε ἀλλήλαις, καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν η ξ, σημείων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ν λ μ, δ ε ζ, ἐπίπεδα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥστε τὰ λ θ, ε κ, στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. καὶ κατὰ τὴν λα': ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἴσον ἄρα τὸ θ λ, στερεὸν τῷ ε κ, στερεῷ, καὶ ἔστι τὸ μὲν θ λ, τὸ ἐκ τῶν α, β, γ, στερεὸν, τὸ δὲ ε κ, τὸ ἀπὸ τῆς β, στερεὸν, τὸ ἄρα ἐκ τῶν α, β, γ, στερεὸν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπ: ἴσον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 30.



Πρότασις ΛΖ': Θεώρημα.

Ἐὰν τέσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλεπίπεδα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται, καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ α β, γ δ, ε ζ, η θ, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ. καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν α β, γ δ, ε ζ, η θ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα παραλληλεπίπεδα τὰ κ α, λ γ, μ ε, ν η. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ κ α, πρὸς τὸ λ γ, οὕτως τὸ μ ε, πρὸς τὸ ν η. Ἐπεὶ γάρ ἐστι τὸ κ α, στερεὸν παραλληλεπίπ: τῷ λ γ, ὅμοιον, τὸ κ α, ἄρα πρὸς τὸ λ γ, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μ ε, πρὸς τὸ ν η, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ, ὡς ἄρα τὸ α κ, πρὸς τὸ λ γ, οὕτω τὸ μ ε, πρὸς τὸ ν η. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ α κ, στερεὸν πρὸς τὸ λ γ, στερεὸν, οὕτω τὸ μ ε, στερεὸν πρὸς τὸ ν η, στερεόν. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ α β, εὐθεῖα πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ. ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ α κ, πρὸς τὸ λ γ, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, ἔχει δὲ καὶ τὸ μ ε, πρὸς τὸ ν η, τριπλασίονα λόγον, ἥπερ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ α κ, πρὸς τὸ λ γ, οὕτω τὸ μ ε, πρὸς τὸ ν η, καὶ ὡς ἄρα ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ. Ἐὰν ἄρα τέσαρες εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

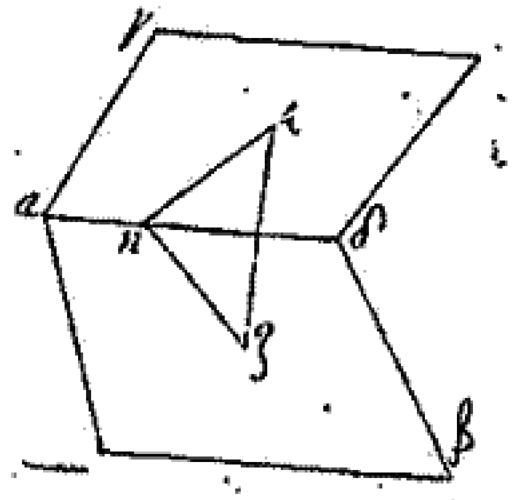
Πρό-

Πρότασις ΛΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς πεσεῖται τομῆς τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος.

Ἐπίπεδον γὰρ τὸ γδ, ἐπιπέδῳ τῷ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ αδ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ γδ, ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ ε. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ αβ, ἐπίπεδον ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τῆς δα, πεσεῖται. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτός, ὡς ἡ εζ, καὶ συμβαλλέτω τῷ αβ, ἐπιπέδῳ, κατὰ τὸ ζ, σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὴν δα, τῷ αβ, ἐπιπέδῳ κάθετος ἤχθω ἡ ζη, ἥτις καὶ τῷ γδ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εη. Ἐπεὶ οὖν ἡ ζη, τῷ γδ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ εη, οὖσα ἐν τῷ γδ, ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ζηε, γωνία. ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ εζ, τῷ αβ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἡ ἄρα ὑπὸ εζη, ὀρθή ἐστι. τριγώνου δὴ τοῦ εζη, αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν ιζ'. τοῦ α. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ αβ, ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς δα, ἐπὶ τὴν δα, ἄρα πεσεῖται. Ἐὰν ἄρα ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων, ἡ ἀγομένη κάθετος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 32.

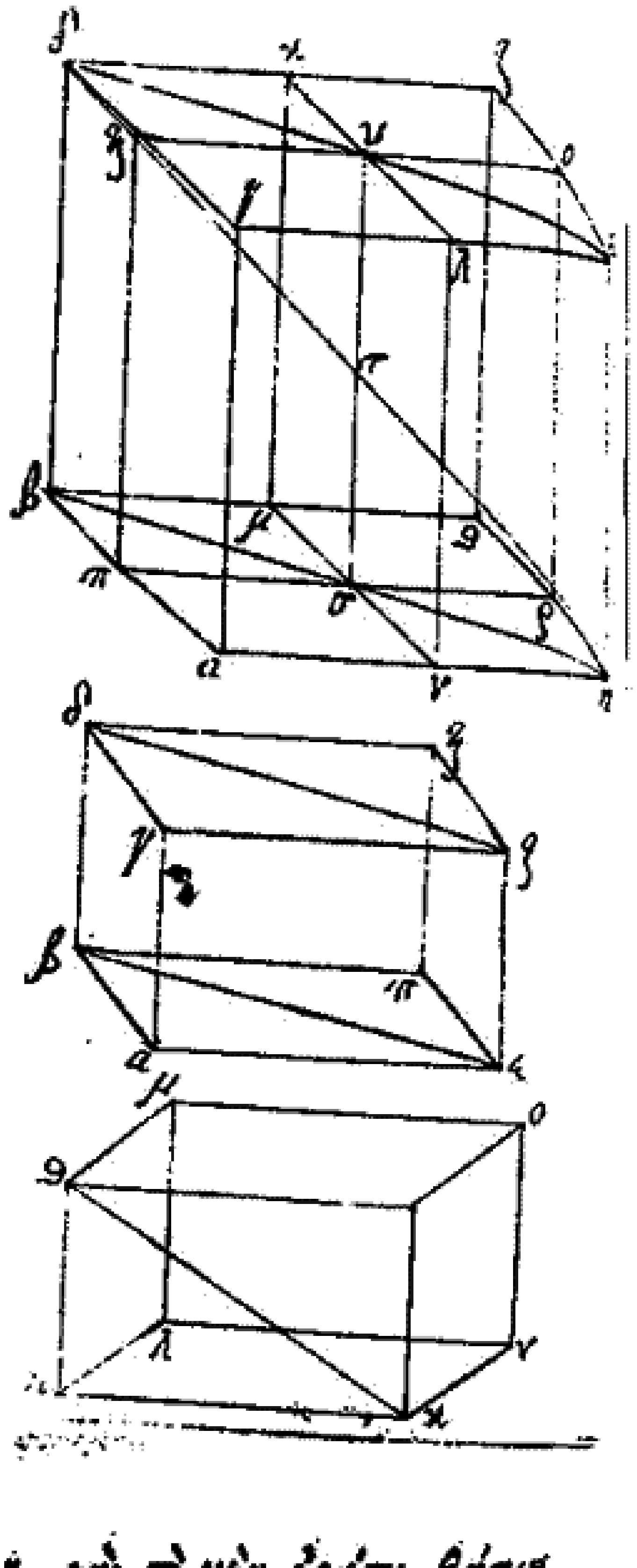


Πρότασις ΛΘ'. Θεώρημα.

Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ αζ, τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν γζ, αθ, αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ κ, λ, μ, ν, ξ, π, ο, ρ, σημεῖα. διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθωσαν τὰ κν, ξρ, κοινὴ δὲ τῶν ἐπιπέδων τομὴ ἔστω ἡ υσ, τοῦ δὲ αβ, στερεοῦ παραλληλεπιπ: διαγώνιος ἡ δη. Λέγω, ὅτι αἱ υσ, δη, δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν υτ, τῇ τσ, ἴση ἐστίν, ἡ δὲ δτ, τῇ τη. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ δυ, υε, βσ, ση, καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ δξ, τῇ οε, αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ δξυ, υοε, ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν δξ, τῇ εο, ἡ δὲ ξυ, τῇ υο, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ δυ, βάσει τῇ υε, ἴση ἐστί. τὸ δὲ δξυ, τρίγωνον τῷ υοε, τριγώνῳ ἴσον ἐστι. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ξυδ, γωνία τῇ ὑπὸ ουε. διὰ τοῦτο εὐθεῖα ἐστιν ἡ δυε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ βση, εὐθεῖα ἐστι, καὶ ἴση ἡ βσ, τῇ ση, καὶ ἐπεὶ ἡ γα, τῇ δβ, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. ἀλλ' ἡ γα, καὶ τῇ εη, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ δε, ηβ, παράλληλος ἄρα ἡ δε, τῇ ηβ, καὶ εἴληπται ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ δ, υ, η, σ, καὶ ἐπεζεύχθησαν αἱ δη, υσ, καὶ κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ δη, υσ, καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ δε, τῇ βη, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εδτ, γωνία τῇ ὑπὸ βητ, ἐναλλὰξ γάρ, ἐστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δτυ, τῇ ὑπὸ ητσ, ἴση, κατὰ κορυφὴν γάρ, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ δτυ, ητσ, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν δυ, τῇ ησ, ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν δε, ηβ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρ: ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει. ἴση ἄρα ἡ μὲν δτ, τῇ τη, ἡ δὲ υτ, τῇ στ. Ἐὰν ἄρα στερεοῦ παραλληλεπ: καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 32.



Πρότασις Μ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα.

Ἔστω πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ αβγδεζ, ηθκλμν, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ αζ, παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ, τὸ ηθκ, τρίγωνον. διπλάσιον ἔστω τὸ αζ, παραλληλ: τοῦ ηθκ, τριγώνου. Λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδεζ, πρίσμα τῷ ηθκλμν, πρίσματι. Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ αξ, ηο, στερεά. καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ αζ, παραλληλόγρ: τοῦ ηθκ, τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ θκ, παραλληλόγρ: διπλάσιον τοῦ ηθκ, τριγ: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αζ, παραλληλόγραμ: τῷ

θκ,

θ κ, παραλληλογρ: τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα κατὰ τὴν λα΄: ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. ἴσον ἄρα τὸ α ξ, στερεὸν τῷ η ο, στερεῷ, καὶ ἔστι τοῦ α ξ, στερεοῦ ἥμισυ τὸ α β γ δ ε ζ, πρίσμα, τοῦ δὲ η ο, στερεοῦ ἥμισυ τὸ η θ κ λ μ ν, πρίσμα, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ α β γ δ ε ζ, πρίσμα τῷ η θ κ λ μ ν, πρίσματι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ Ἑνδεκάτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.