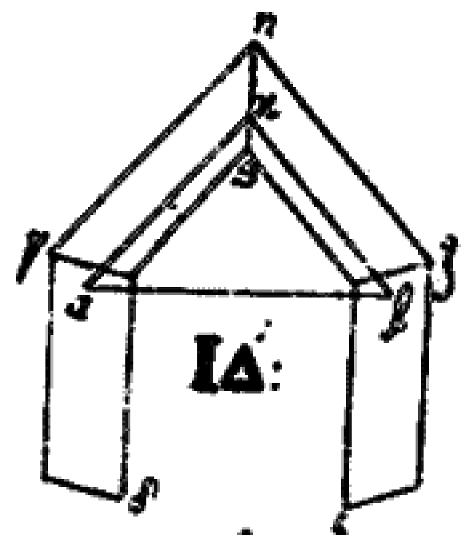
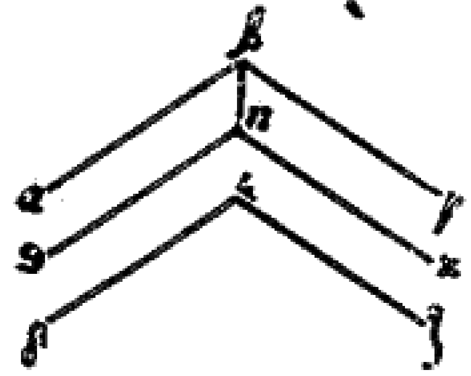
αβκ, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ὑπὸ βακ, ὀρθή ἐστι, τριγώνου δὲ τοῦ αβκ, αἱ δύο γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβκ, βακ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ γδ, εζ, ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται, παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ γδ, εζ, ἐπίπεδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 9.

Πρότασις ΙΕ΄. Θεώρημα.



ΙΔ.



Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων περὶ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων παράλληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ αβ, βγ, περὶ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, τὰς δε, εζ, ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι. Λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ἐπίπεδα, οὐ συμπεσοῦνται ἀλλήλοις. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπίπεδον κάθετος ἡ βη, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ η, σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ η, τῇ μὲν εδ, παράλληλος ἤχθω ἡ ηθ, τῇ δὲ εζ, ἡ ηκ. καὶ ἐπεὶ ἡ βη, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ηθ, ηκ, οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βηκ, βηθ, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ βα, τῇ ηθ, αἱ ἄρα ὑπὸ ηβα, βηθ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βηθ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ηβα, ἡ ηβ, ἄρα τῇ βα, πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ βη, καὶ τῇ βγ, ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ βη, δυσὶν εὐθείαις ταῖς βα, βγ, τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ βη, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν βα, βγ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ βη, καὶ τῷ διὰ τῶν ηθ, ηκ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν ηθ, ηκ, ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν δε, εζ, ἡ βη, ἄρα τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ βη, καὶ τῷ διὰ τῶν αβ, βγ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς, ἔστι δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ ὀρθή. ἡ βη, ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ἐπιπέδων ὀρθή ἐστι, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν αβ, βγ, ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν δε, εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

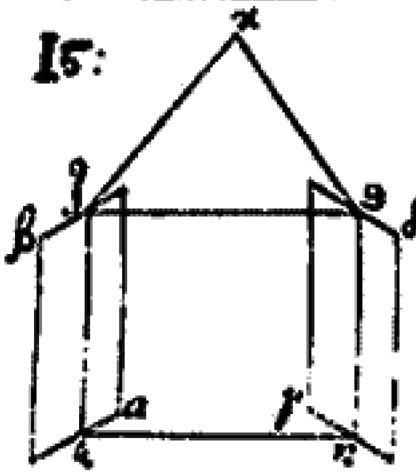
Πρότασις Ιϛ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ αβ, γδ, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ εζηθ, τετμήσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ εζ, ηθ. Λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ εζ, τῇ ηθ, εἰ γὰρ μὴ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται αἱ εζ, ηθ, ἤτοι ἐπὶ τὰ ζ, θ, μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ ε, η. Ἐκβεβλήσθω πρότερον, ὡς ἐπὶ τὰ ζ, θ, μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ ἡ εζκ, ἐν τῷ αβ, ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς εζκ, σημεῖα ἐν τῷ αβ, ἐπιπέδῳ ἐστίν, ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς εζκ, εὐθείας σημείων, ἐστὶ τὸ κ, τὸ κ, ἄρα ἐν τῷ αβ, ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ κ, καὶ ἐν τῷ γδ, ἐστὶν ἐπιπέδῳ, τὰ αβ, γδ, ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι, οὐκ ἄρα αἱ εζ, ηθ, εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ ζ, θ, μέρη. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι αἱ εζ, ηθ, εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ ε, η, μέρη συμπεσοῦνται ἐκβαλλόμεναι. αἱ δὲ ἐπὶ τὰ μηδέτερα μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ, τῇ ηθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

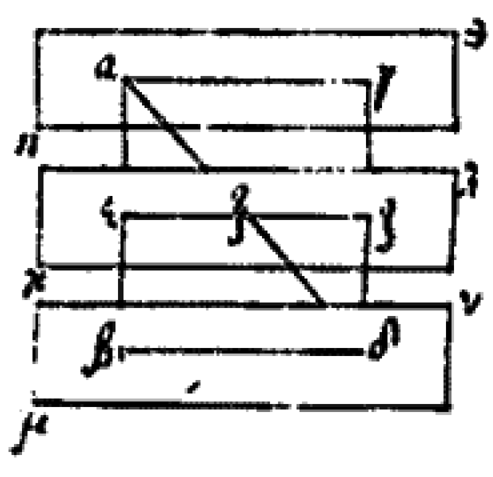
Eucl. Lib. 11. Fig. 10.

Iϛ:



Πρότασις ΙΖ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.



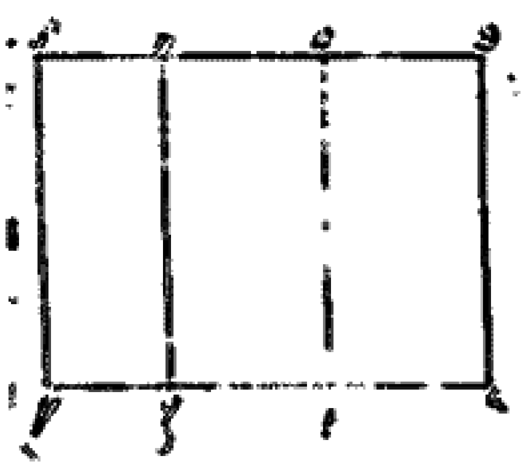
Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ αβ, γδ, ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ηθ, κλ, μν, τμηθήτωσαν κατὰ τὰ α, ε, β, δ, ζ, γ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ αε, εὐθεῖα πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ γζ, πρὸς τὴν ζδ. ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βδ, αδ, καὶ συμβαλλέτω ἡ αδ, τῷ κλ, ἐπιπέδῳ, κατὰ τὸ ξ, σημεῖον. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ εξ, ξζ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ κλ, μν, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ εβδζ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ εζ, βδ, παράλληλοί εἰσι καὶ τὴν ἀνωτέρω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ πάλιν καὶ τὴν αὐτήν, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ αγ, ζξ, παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αβδ, παρὰ μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρ: ῆκται ἡ εξ, παράλληλος, ἀνάλογον ἄρα κατὰ τὴν β΄: τοῦ ϛ΄: τέμνει τὰς αὐτοῦ πλευρ: ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ αξ, πρὸς τὴν ξδ. καὶ αὖθις κατὰ τὴν αὐτὴν ἐστὶ τοῦ αδγ, τριγώνῳ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, (παρὰ μίαν γὰρ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἦκται ἡ ξζ, παράλληλος) ἄρα ὡς ἡ αξ, πρὸς τὴν ξδ, οὕτως ἡ γζ, πρὸς τὴν ζδ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ αξ, πρὸς τὴν ξδ, οὕτως ἡ αε, πρὸς τὴν εβ, καὶ ὡς ἄρα ἡ αε, πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ γζ, πρὸς τὴν ζδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΗ': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔςαι.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔςω. Λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς αβ, ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔςαι. Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς αβ, ἐπίπεδον τὸ δε, καὶ ἔςω τοῦ κοινὴ τομὴ καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ἡ γε. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς

Eucl. lib. 11. Fig. 11.



εγ, τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, τῇ γε, πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ δε, ἐπιπέδῳ ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐςι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐςιν ἡ αβ, ὥςε καὶ πρὸς τὴν γε, ὀρθή ἐςιν, ἡ ἄρα ὑπὸ αβζ, γωνία ὀρθή ἐςιν. ἔςι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ηζβ, ὀρθὴ, παράλληλος ἄρα ἡ αβ, τῇ ζη, ἡ δὲ αβ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐςι, καὶ ἡ ζη, ἄρα τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐςι. καὶ κατὰ τὸν δ': ὅρον, ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐςιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ γε, πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ζη, ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς, τὸ ἄρα δε, ἐπίπεδον ὀρθόν ἐςι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς αβ, ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΘ': Θεώρημα.

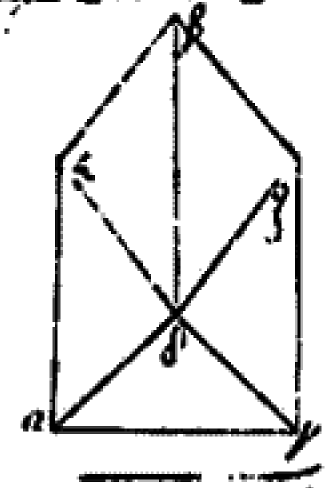
Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔςαι.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ αβ, βγ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔςω. κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔςω ἡ βδ. Λέγω, ὅτι ἡ βδ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπ: πρὸς ὀρθάς ἐςι. μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ δ, σημείου ἐν μὲν τῷ αβ, ἐπιπέδῳ, τῇ αδ,

εὐθείᾳ

εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἡ δε, ἐν δὲ τῷ βγ, ἐπιπέδῳ, τῇ γδ, πρὸς ὀρθὰς ἡ δζ, καὶ ἐπεὶ τὸ αβ, ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ αδ, πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ αβ, ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ δε, ἡ δε, ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ δζ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ δ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάμεναί εἰσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἀδύνατον, ἐκ τοῦ ιγ': τοῦ παρόντος. οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ δ, σημείου πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσεται, πλὴν τῆς δβ, κοινῆς τομῆς τῶν αβ, βγ, ἐπιπέδων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 12.

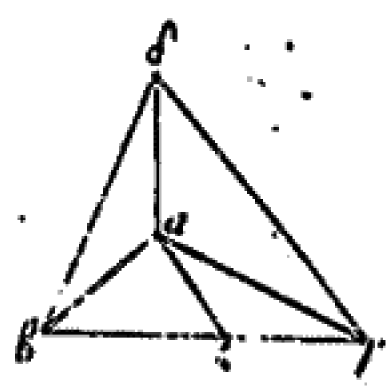


Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ α, ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, περιεχέσθω. Λέγω, ὅτι τῶν ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, γωνιῶν δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, φανερὸν, ὅτι δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰ δὲ οὔ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ βαγ. καὶ συνεστάθω πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ α, τῇ ὑπὸ δαβ, γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν βαγ, ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ βαε. καὶ κείσθω τῇ αδ, ἴση ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ ε, σημείου διαχθεῖσα ἡ βεγ, τεμνέτω τὰς αβ, αγ, εὐθείας κατὰ τὰ β, γ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βδ, δγ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αβ, δύο δὴ αἱ δα, αβ, ἴσαι δυσὶ ταῖς αε, αβ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δαβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαε, ἴση. βάσις ἄρα ἡ δβ, βάσει τῇ βε, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δβ, δγ, τῆς βγ, μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ δβ, τῇ βε, ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ δγ, λοιπῆς τῆς εγ, μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αγ, καὶ βάσις ἡ δγ, βάσεως τῆς εγ, μείζων ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαγ, γωνίας τῆς ὑπὸ εαγ, μείζων ἐστίν, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δαβ, τῇ ἀπὸ βαε, ἴση, αἱ ἄρα ὑπὸ δαβ, δαγ, τῆς ὑπὸ βαγ, μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σὺν δύο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 13.



Πρό-

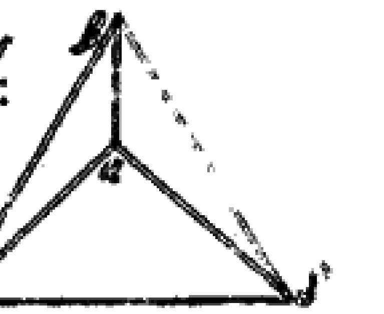
Πρότασις ΚΑ': Θεώρημα.

Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ τέσσαρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ α, περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ. Λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἑκάστης τῶν αβ, αγ, αδ, τυχόντα σημεῖα τὰ β, γ, δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βγ. γδ, δβ, καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ β, ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ γβα, αβδ, γβδ, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, αἱ ἄρα ὑπὸ γβα, αβδ, τῆς ὑπὸ γβδ, μείζονές εἰσι, κατὰ τὸ ἀνωτέρω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ αἱ μὲν ὑπὸ βγα, αγδ, τῆς ὑπὸ βγδ, μείζονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ γδα, αδβ, τῆς ὑπὸ γδβ, μείζονές εἰσιν, ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ γβα, αβδ, βγα, αγδ, αδγ, αδβ, τριῶν τῶν ὑπὸ γβδ, βγδ, γδβ, μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ τρεῖς, αἱ ὑπὸ γβδ, βγδ, γδβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, αἱ ἓξ ἄρα, αἱ ὑπὸ γβα, αβδ, βγα, αγδ, αδγ, αδβ, δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι· καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν αβγ, αγδ, αδβ, τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι, αἱ ὑπὸ γβα, αγβ, βαγ, αγδ, δαγ, γδα, αδβ, δβα, βαδ, ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν· ὧν αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, αγδ, γδα, αδβ, δβα, ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, τρεῖς γωνίαι, περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

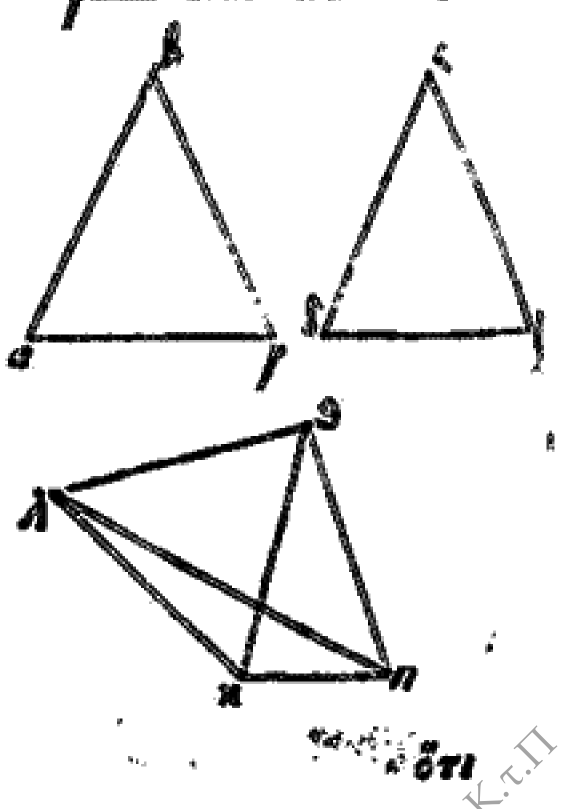
Eucl. Lib. 11. Fig. 24.

ΚΑ'



Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

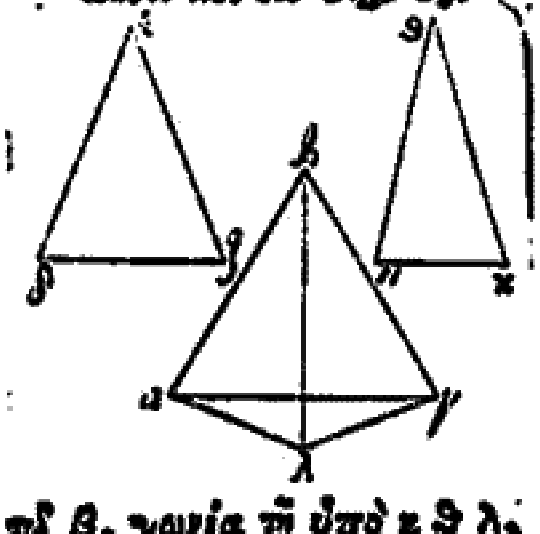
Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας, τρίγωνον συστήσασθαι.



Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ αβγ, δεζ, τῆς ὑπὸ ηθκ, αἱ δὲ ὑπὸ δεζ, ηθκ, τῆς ὑπὸ αβγ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ηθκ, αβγ, τῆς ὑπὸ δεζ· καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, εὐθεῖαι. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, ηκ. Λέγω,

ὅτι

ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι· ἢ ποιήσειν, ὅτι τῶν αγ, δζ, ηκ, δύο ὁποιαοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, φανερὸν, ὅτι καὶ τῶν αγ, δζ, ηκ, ἴσων γινομένων, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὔ· ἔστωσαν ἄνισοι· καὶ συνεστάσθω πρὸς τῇ θκ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ θ, τῇ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ κθλ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, ἴση ἡ θλ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ηλ, κλ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς κθ, θλ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ β, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κθλ, ἴση, βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ κλ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ αβγ, ηθκ, τῆς ὑπὸ δεζ, μείζονές εἰσι, ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ κθλ, ἡ ἄρα ὑπὸ ηθλ, τῆς ὑπὸ δεζ, μείζων ἐστὶ, καὶ ἐπεὶ αἱ ηθ, θλ, δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηθλ, γωνίας τῆς πρὸς τῷ ε, μείζων, βάσις ἄρα ἡ ηλ, βάσεως τῆς δζ, μείζων ἐστὶν, ἀλλ᾽ αἱ ηκ, κλ, τῆς ηλ, μείζονές εἰσι, πολλῷ ἄρα αἱ ηκ, κλ, τῆς δζ, μείζονές εἰσιν, ἡ δὲ κλ, ἴση τῇ αγ, αἱ αγ, ηκ, ἄρα τῆς λοιπῆς δζ, μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν αγ, δζ, τῆς ηκ, μείζονές εἰσιν. αἱ δὲ ηκ, δζ, τῆς αγ. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι.



Eucl. lib. 11. Fig. 15.

Ἄλλως. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, ηκ. Λέγω ὅτι δυνατόν ἐστι τρίγωνον συστήσασθαι ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τουτέστι πάλιν, ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς β, ε, θ, σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσιν. ἔσονται δὲ καὶ αἱ αγ, δζ, ηκ, ἴσαι. καὶ ἔσονται αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς β, ε, θ, σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ β, ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς ε, θ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ αγ, εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν δζ, ηκ. καὶ φανερὸν, ὅτι αἱ αγ, μεθ᾽ ἑκατέρας τῶν δζ, ηκ, τῆς λοιπῆς μείζων ἐστί. Λέγω, ὅτι καὶ αἱ δζ, ηκ, τῆς αγ, μείζονές εἰσι. συνεστάτω πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ β, τῇ ὑπὸ ηθκ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ αβλ· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, ἴση ἡ βλ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αλ, λγ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βλ, δυσὶ ταῖς ηθ, θκ, ἴσαι εἰσιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ αλ, βάσει τῇ ηκ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς ε, θ, σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ αβγ, μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ηθκ, τῇ ὑπὸ αβλ, ἐστὶν ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ ε, γωνία

γωνία τῆς ὑπὸ λβγ, μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ λβ, βγ, δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δεζ, γωνίας τῆς ὑπὸ λβγ, μείζων ἐστί, βάσις ἄρα ἡ δζ, βάσεως τῆς λγ, μείζων ἐστίν, ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ ηκ, τῇ αλ, αἱ ἄρα δζ, ηκ, τῶν αλ, λγ, μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ αἱ αλ, λγ, τῆς αγ, μείζονές εἰσι, πολλῷ ἄρα αἱ δζ, ηκ, μείζονές εἰσι τῆς αγ. τῶν αγ, δζ, ηκ, ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΓ': Πρόβλημα.

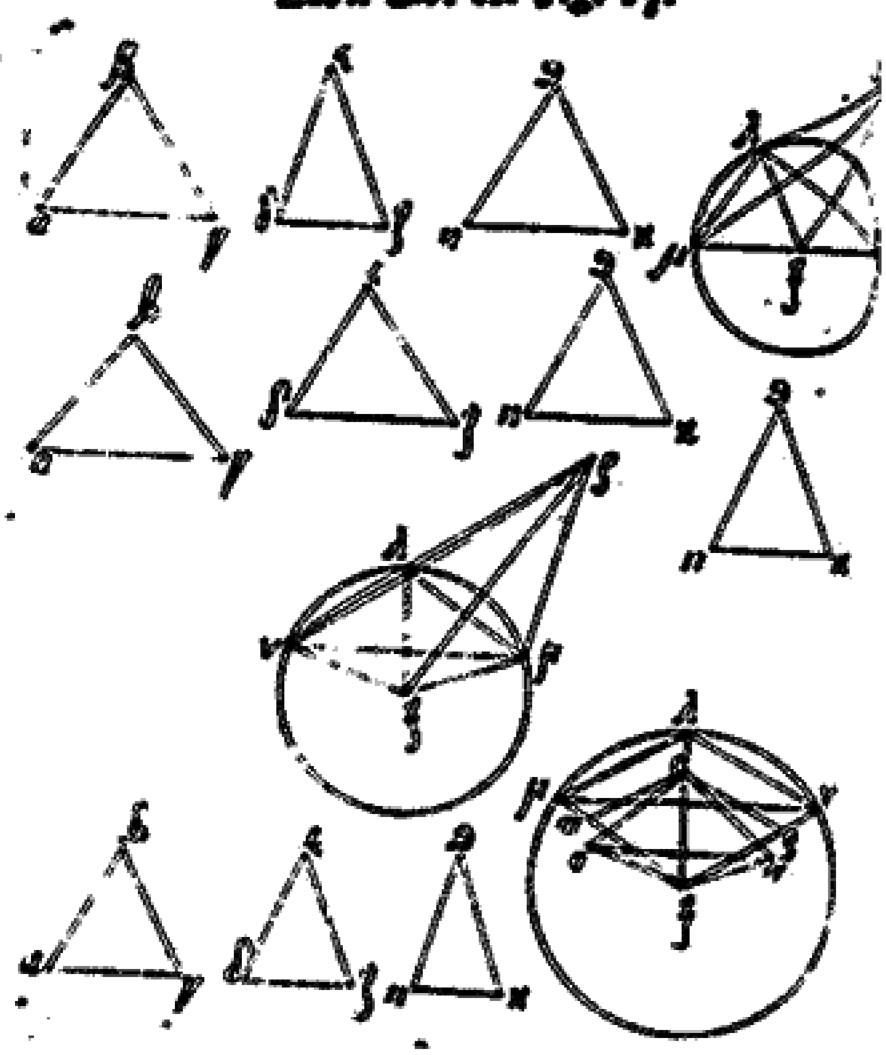
Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι: δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες. Δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, ηκ. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τὸ λμν, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν αγ, τῇ λμ, τὴν δὲ δζ, τῇ μν, καὶ ἔτι τὴν ηκ, τῇ λν. καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ λμν, τρίγ: κύκλος, ὁ λμν, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον, ἔσται δὲ ἤτοι ἐντὸς τοῦ λμν, τριγ: ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός. Ἔστω πρότερον ἐντὸς, καὶ ἔστω τὸ ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λξ, μξ, νξ. Λέγω, ὅτι ἡ αβ, μείζων ἐστὶ τῆς λξ. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ λξ. ἀλλ' ἡ μὲν αβ, τῇ βγ, ἐστὶν ἴση, ἡ λξ, ἄρα τῇ βγ, ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ λξ, τῇ ξμ, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς λξ, ξμ, ἴσαι εἰσιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσει τῇ λμ, ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ λξμ, ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ δεζ, τῇ ὑπὸ μξν, ἴση ἐστίν. καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ηθκ, τῇ ὑπὸ νξλ, τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ, ἴσαι εἰσιν. ἀλλ' αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ. τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσι· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ,

Eucl. Lib. 11. Fig. 16.

δεζ, ηθκ, τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἡ αβ, τῇ λξ, ἐστὶν ἴση. Λέγω, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς λξ, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν αβ, ἴση ἡ ξο, τῇ δὲ βγ, ἡ ξπ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οπ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν αἱ αβ, τῇ βγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ξο, τῇ ξπ. ὥστε καὶ ἡ ολ, λοιπὴ, λοιπῇ τῇ πμ, ἐστὶν ἴση, παράλληλος ἄρα ἡ λμ, τῇ οπ, καὶ ἰσογώνιον τὸ λξμ, τῷ οπξ. ἔστιν ἄρα κατὰ τὸ δ: τοῦ ϛ': ὡς ἡ λξ, πρὸς τὴν λμ, οὕτως ἡ ξο, πρὸς τὴν οπ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ λξ, πρὸς τὴν οξ, οὕτως ἡ λμ, πρὸς τὴν οπ, μείζων δὲ ἡ ξλ, τῆς ξο, μείζων ἄρα καὶ ἡ λμ, τῆς οπ, ἀλλ᾽ ἡ λμ, κεῖται τῇ αγ, ἴση, καὶ ἡ αγ, ἄρα τῆς οπ, μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς ξο, ξπ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσεως τῆς οπ, μείζων ἐστὶ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίας τῆς ὑπὸ οξπ, μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ δεζ, τῆς ὑπὸ μξν, μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ηθκ, τῆς ὑπὸ νξλ. αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, τριῶν τῶν ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ, μείζονές εἰσιν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται, πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ, τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν, ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ αβ, ἐλάσσων τῆς λξ, ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδ᾽ ἴση, ἄρα μείζων. Ἀνεστάθω δὴ κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρ: ἀπὸ τοῦ ξ, σημείου, τῷ τοῦ λμν, κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξρ, καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ξρ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ρλ, ρμ, ρν· καὶ ἐπεὶ ἡ ξρ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ λμν, κύκλου ἐπίπεδον, κατὰ τὸν γ': ὅρον καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν λξ, μξ, νξ, ὀρθή ἐστιν ἡ ρξ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ λξ, τῇ ξμ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξρ, βάσις ἄρα ἡ λρ, βάσει τῇ ρμ, ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ρν, ἑκατέρᾳ τῶν ρλ, ρμ, ἴση ἐστὶν, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ρλ, ρμ, ρν, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ξρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν λξ, ξρ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν λξ, ξρ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ρλ, διὰ τῆς ἑκατόμβης, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ λξρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ρλ, ἴση ἄρα ἡ αβ, τῇ ρλ. ἀλλὰ τῇ μὲν αβ, ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, τῇ δὲ ρλ, ἴση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ρμ, ρν, ἑκάστη ἄρα τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, ἑκάστῃ τῶν ρλ, ρμ, ρν, ἴση ἐστίν. ἐπεὶ δὲ δύο αἱ ρλ, ρμ, δυσὶ ταῖς αβ, βγ, ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ λμ, βάσει τῇ αγ, ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ λρμ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ μρν, γωνία τῇ ὑπὸ δεζ, ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ ὑπὸ λρν, τῇ ὑπὸ ηθκ. ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων, τῶν ὑπὸ λρμ, μρν, λρν, αἳ ἴσαι εἰσὶ τρισὶ ταῖς δοθείσαις, ταῖς ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, στερεὰ γωνία συνίσταται ἡ πρὸς τῷ ρ, περιεχομένη ὑπὸ τῶν λρμ, μρν, λρν, γωνιῶν. Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν τῆς μν, καὶ ἔςω τὸ ξ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξ λ. Λέγω πάλιν, ὅτι μείζων ἐςὶν ἡ α β, τῆς λ ξ. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐςὶν ἡ α β, τῇ λ ξ, ἢ ἐλάττων. ἔςω πρότερον ἴση, δύο δὴ αἱ α β, β γ, τουτέςιν αἱ δ ε, ε ζ, δυσὶ ταῖς ξ μ, ξ λ, τουτέςι τῇ μ ν, ἴσαι εἰσὶν, ἀλλ' ἡ μ ν, τῇ δ ζ, κεῖται ἴση, καὶ αἱ δ ε, ε ζ, ἄρα τῇ δ ζ, ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ α β, ἴση τῇ λ ξ, ὁμοίως δὴ οὐδὲ ἐλάττων, πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μεῖζον. ἡ ἄρα α β, μείζων ἐςὶ τῆς λ ξ, καὶ ἐὰν ὁμοίως, ᾧ μεῖζον τὸ ἀπὸ τῆς α β, τοῦ ἀπὸ τῆς λ ξ, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναςήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ρ ξ, συναθήσεται τὸ πρόβλημα. Ἀλλὰ δὴ ἔςω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ λ μ ν, τριγώνου, καὶ ἔςω τὸ ξ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λ ξ, μ ξ, ν ξ. Λέγω δὴ καὶ οὕτως, ὅτι μείζων ἐςὶν ἡ α β, τῆς λ ξ, εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐςὶν, ἢ ἐλάττων, ἔςω πρότερον ἴση. δύο οὖν αἱ α β, β γ, δυσὶ ταῖς μ ξ, ξ λ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ α γ, βάσει τῇ μ λ, ἐςὶν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ α β γ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ μ ξ λ, ἴση ἐςί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ η θ κ, τῇ ὑπὸ λ ξ ν, ἐςὶν ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ μ ξ ν, δυσὶ ταῖς ὑπὸ α β γ, η θ κ, ἐςὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ α β γ, η θ κ, τῆς ὑπὸ δ ε ζ, μείζονές εἰσι, καὶ ἡ ὑπὸ μ ξ ν, ἄρα τῆς ὑπὸ δ ε ζ, μείζων ἐςί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δ ε, ε ζ, δυσὶ ταῖς μ ξ, ν ξ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ δ ζ, βάσει τῇ μ ν, ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ μ ξ ν, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δ ε ζ, ἐςὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ἴση ἡ α β, τῇ λ ξ. Ἑξῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων, μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναςήσωμεν τὸ ξ ρ, καὶ ἴσην αὐτὴν ὑποθώμεθα, ᾧ μεῖζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς α β, τοῦ ἀπὸ τῆς λ ξ, συναθήσεται τὸ πρόβλημα. Λέγω δὲ, ὅτι οὐδ' ἐλάττων ἐςὶν ἡ α β, τῆς λ ξ, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔςω. καὶ κείσθω τῇ μὲν α β, ἴση ἡ ξ ο, τῇ δὲ β γ, ἴση ἡ ξ π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ο π. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐςὶν ἡ α β, τῇ β γ, ἴση ἐςὶ καὶ ἡ ξ ο, τῇ ξ π, ὥςε καὶ λοιπὴ ἡ ο λ, λοιπῇ τῇ π μ, ἐςὶν ἴση, παράλληλος ἄρα ἡ μ λ, τῇ π ο, καὶ ἰσογώνιον τὸ λ μ ξ, τριγ: τῷ π ξ ο, τριγ: ἔςιν ἄρα ὡς ἡ λ ξ, πρὸς τὴν λ μ, οὕτως ἡ ξ ο, πρὸς τὴν ο π, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ λ ξ, πρὸς τὴν ξ ο, οὕτως ἡ λ μ, πρὸς τὴν ο π, μείζων δὲ ἡ λ ξ, τῆς ξ ο, μείζων ἄρα καὶ ἡ λ μ, τῆς ο π. ἀλλ' ἡ λ μ, τῇ α γ, ἐςὶν ἴση, καὶ ἡ

Eucl. Lib. 11. Fig. 13.



α γ,

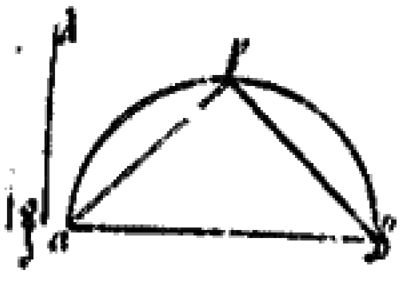
αγ, ἄρα τῆς οπ, μεῖζον. ἐπεὶ οὖν αἱ αβ, βγ, δύο δυσὶ ταῖς οξ, ξπ, ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσεως τῆς οπ, μείζων ἐστὶ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίας τῆς ὑπὸ οξπ, μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ κἂν τὴν ξρ, ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ξο, ξπ, ὑπολάβωμεν, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ορ, δείξομεν, ὅτι ἡ ὑπὸ ηθκ, γωνία τῆς ὑπὸ οξρ, μείζων ἐστί. Συνεστάσθω δὴ πρὸς τῇ λξ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ ξ, τῇ μὲν ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ λξσ, τῇ δὲ ὑπὸ ηθκ, ἡ ὑπὸ λξτ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ξσ, ξτ, τῇ οξ, ἴση. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ οσ, οτ, στ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς οξ, ξσ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ οξσ, ἴση, βάσις ἄρα ἡ αγ, τουτέστιν ἡ λμ, βάσει τῇ οσ, ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ λν, τῇ οτ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ μλ, λν, εἰσὶν ἴσαι δυσὶ ταῖς οσ, οτ, καὶ γωνία ὑπὸ μλν, γωνίας τῆς ὑπὸ σοτ, μείζων, βάσις ἄρα ἡ μν, βάσεως τῆς στ, μείζων ἐστίν. ἀλλ' ἡ μν, τῇ δζ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ δζ, ἄρα τῆς στ, μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ δε, εζ, δυσὶ ταῖς σξ, ξτ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ δζ, βάσεως τῆς στ, μείζων, ἄρα γωνία ὑπὸ δεζ, γωνίας τῆς ὑπὸ σξτ, μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ σξτ, ταῖς ὑπὸ αβγ, ηθκ, ἡ ἄρα ὑπὸ δεζ, τῶν ὑπὸ αβγ, ηθκ, μείζων ἐστὶν, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον.

ΛΗΜΜΑ.

Ὃν δὲ τρόπον ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ξρ, δείξομεν οὕτως.

Ἐκκείσθωσαν αἱ αβ, λξ, εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ αβ. καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ αβγ, καὶ εἰς τὸ αβγ, ἐνηρμόσθω τῇ λξ, εὐθείᾳ ἴση ἡ αγ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βγ. Ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ αβγ, γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν αὕτη, κατὰ τὴν λα΄ τοῦ γ΄· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς αγ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς βγ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς βγ, ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ λξ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς βγ. Ἐὰν οὖν τὴν βγ, ἴσην τῇ ξρ, ὑπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ξρ, ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

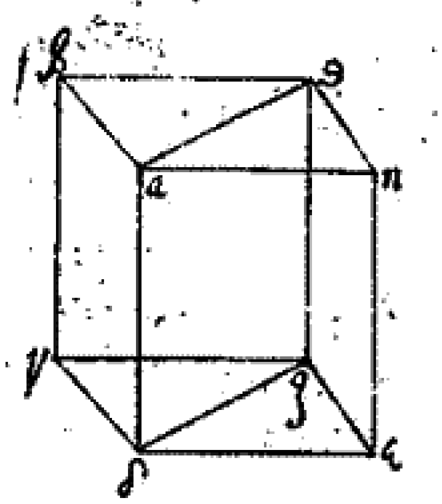
Eucl. Lib. 11. Fig. 18.



Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε, καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 19.



Στερεὸν γὰρ τὸ γδηθ, ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων ἐμπεριεχέσθω, τῶν αγ, ηζ, εθ, δζ, ζβ, αε. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα, ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ βη, γε, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ αγ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ παρόντος, παράλληλος ἄρα ἡ αβ, τῇ γδ. Πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ βζ, αε, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ αγ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὴν αὐτήν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αδ, τῇ βγ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δγ, παράλληλος, παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ αγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν δζ, ζη, βζ, αε, παραλληλόγραμμόν ἐστιν. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αθ, δζ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν, ἡ μὲν αβ, τῇ δγ, ἡ δὲ βθ, τῇ γζ, δύο δὴ αἱ αβ, βθ, ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς δγ, γζ, ἁπτομένας ἀλλήλων παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὴν ιε': τοῦ παρ: οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας ἄρα γωνίας περιέχουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβθ, γωνία τῇ ὑπὸ δγζ, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βθ, δυσὶ ταῖς δγ, γζ, ἴσαι εἰσι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβθ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγζ, ἴση, βάσις ἄρα ἡ αθ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβθ, τρίγωνον τῷ δγζ, τριγ: ἴσον ἐστι, καὶ ἔστι τοῦ μὲν αβθ, τριγ: διπλάσιον τὸ βη, παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ δγζ, τὸ γε, παραλληλόγ: ἴσον ἄρα τὸ βη, παραλληλόγ: τῷ γε, παραλληλογ: ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ αγ, τῷ ηζ, ἴσον ἐστι, καὶ τὸ αε, τῷ βζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

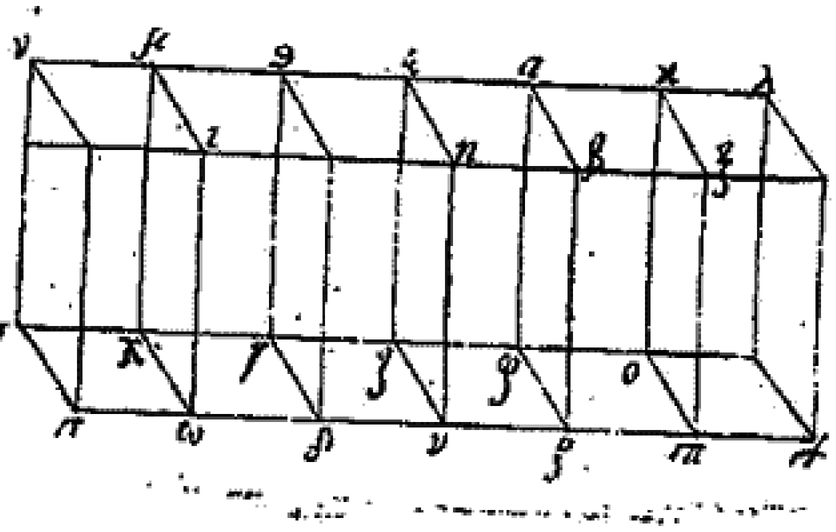
Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ αβγδ, ἐπιπέδῳ τῷ υε, τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ρα, δθ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αεζφ, βάσις πρὸς τὴν εθγζ, βάσιν, οὕτω τὸ αβζυ, στερεὸν πρὸς τὸ εηγδ, στερεόν. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ αε, εθ, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν εθ, ἴσαι, ὁσαιδηποτοῦν αἱ θμ, μν, τῇ δὲ αε, ἴσαι, αἱ ακ, κλ. καὶ συμ-

συμπεπληρώσθωσαν τὰ λο, κφ, θχ, μσ, παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ λπ, κρ, δμ, μτ, στερεά. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ λκ, κα, αε, εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν λο, κφ, αζ, παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις. τὰ δὲ λξ, κβ, αη, ἀλλήλοις. καὶ ἔτι τὰ λψ, κπ, αρ, ἀλλήλοις, ἀπεναντίον γάρ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ εγ, θχ, μσ, παραλληλόγ: ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ θη, θι, ιν, ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις. καὶ ἔτι τὰ δθ, μω, ντ. τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν λπ, κρ, αυ, στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἴσα ἐστὶν, ἀλλὰ καὶ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα. τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ λπ, κρ, αυ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ εδ, δμ, μτ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὁσαπλασίων ἄρα ἡ λζ, βάσις τῆς αζ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ λυ, στερεὸν τοῦ αυ, στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ νζ, βάσις τῆς ζθ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ νυ, στερεὸν τοῦ θυ, στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ λζ, βάσις τῇ νζ, βάσει, ἴσον καὶ τὸ λυ, στερεὸν, τῷ νυ, στερεῷ. καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ λζ, τῆς νζ, βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ λυ, στερεὸν τοῦ νυ, στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων, τῶν αζ, ζθ, δύο δὲ στερεῶν τῶν αυ, υθ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τῆς μὲν αζ, βάσεως, καὶ τοῦ αυ, στερεοῦ, ἥτε λζ, βάσις, καὶ τὸ λυ, στερεὸν. τῆς δὲ θζ, βάσεως, καὶ τοῦ θυ, στερεοῦ, ἥτε νζ, βάσις, καὶ τὸ νυ, στερεὸν, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ λζ, βάσις τῆς νζ, βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ λυ, στερεὸν, τοῦ νυ, στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση, ἴσον. καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αζ, βάσις πρὸς τὴν ζθ, βάσιν, οὕτω τὸ αυ, στερεὸν, πρὸς τὸ υθ, στερεὸν κατὰ τὸν, ε: ὅρον τοῦ ε: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 20.



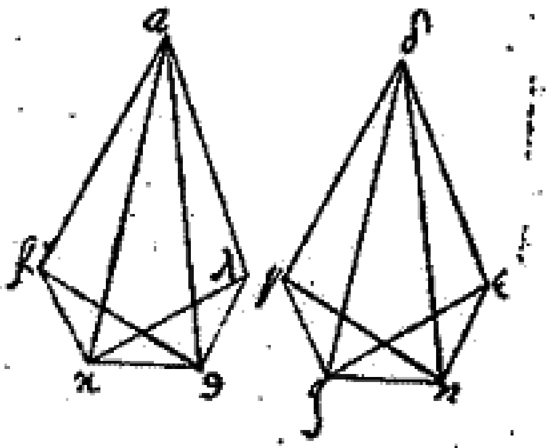
Πρότασις Κς': Πρόβλημα.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἡ αβ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ δ, περιεχομένη ὑπὸ τῶν εδγ, εδζ, ζδγ, γωνιῶν ἐπιπέδων. Δεῖ δὴ πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ, στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς δζ, τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὸ διὰ τῶν εδ, δγ, ἐπίπεδον κάθετος ἡ ζη, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δη. καὶ

συνισυνεστάσθω πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ μὲν ὑπὸ εδγ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ βαλ, τῇ δὲ ὑπὸ εδη, ἴση ἡ ὑπὸ βακ. καὶ κείσθω τῇ δη, ἴση ἡ ακ, καὶ ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ κ, σημείου τῷ διὰ τῶν βαλ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ κθ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ηζ, ἡ κθ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θα. Λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ α, στερεὰ γωνία ὑπὸ τῶν βαλ, βαθ, θαλ, γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, στερεᾷ γωνίᾳ, τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν εδγ, εδζ, ζδγ, γωνιῶν.

Eucl. Lib. 11. Fig. 21.



Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ αβ, δε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θβ, κβ, ζε, ηε. καὶ ἐπεὶ ἡ ζη, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ηζε, ηζδ, γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ θκβ, γωνιῶν ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ αἱ κα, αβ, δυσὶ ταῖς ηδ, δε, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βκ, βάσει τῇ εη, ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ κθ, τῇ ζη, ἴση, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν. ἴση ἄρα καὶ ἡ βθ, τῇ ζε. Πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ακ, κθ, δυσὶ ταῖς δη, ηζ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ αθ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστίν, ἔστι δὲ ἡ αβ, τῇ δε, ἴση. δύο δὴ αἱ αθ, αβ, δυσὶ ταῖς ζδ, δε, ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ θβ, βάσει τῇ ζε, ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βαθ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ, ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ θαλ, τῇ ὑπὸ ζδγ, ἴση ἐστίν. ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς αλ, δγ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς κλ, θλ, ηγ, ζγ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ βαλ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ εδγ, ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ βακ, τῇ ὑπὸ εδη, ὑπόκειται ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ καλ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηδγ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ κα, αλ, δυσὶ ταῖς ηδ, δγ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ κλ, βάσει τῇ ηγ, ἴση ἐστίν. ἴση δὲ καὶ ἡ κθ, τῇ ηζ, ἐστί. δύο δὴ αἱ λκ, κθ, δυσὶ ταῖς γη, ηζ, εἰσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ θλ, βάσει τῇ ζγ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ θα, αλ, δυσὶ ταῖς ζδ, δγ, ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ θλ, βάσει τῇ ζγ, ἐστὶν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ θαλ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζδγ, ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαλ, τῇ ὑπὸ εδγ, ἴση. πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ, ἴση στερεὰ γωνία συνίσταται.

Προ-