ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΕΝΔΕΚΑΤΟΥ ΤΟΥ ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΥ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος ἔχον.

Διαλαβὼν ἐν τοῖς πρότερον βιβλίοις περί τε τῶν ἐν ἐπιπέδῳ ἀρχοειδῶν σχημάτων, καὶ περὶ ἀριθμῶν. καὶ τοὺς ἀνήκοντας ἑκάστῳ ὅρους ἐμμεθόδως πρὸ τῆς τῶν προτάσεων θέσεως, οὐχ ἧττον δὲ καὶ ἑρμηνείας προέταξε. τὴν αὐτὴν δὲ ταύτην τηρῆσαι τάξιν ἐθέλων κἀνταῦθα, ὡς ἀναγκαίαν, πρὸ τοῦ ἅψασθαι τῶν προτάσεων, τῶν ὅρων ἤδη αὐτῶν ἄρχεται. καὶ πρῶτον μὲν τί Στερεὸν ἀποδίδωσιν, ὡς περὶ τῶν ἐν τούτῳ σχημάτων τὸν λόγον ποιούμενος. Ἐπεὶ δὲ ἐν ἑκάστῳ τῶν βιβλίων, οὐ περὶ ἑνὸς μόνου εἴδους τῶν σχημάτων, ἀλλὰ περὶ πολλῶν ἡ σκέψις ἐστί. τούτου γε χάριν πρὸ πάντων τῶν βιβλίων τοὺς πᾶσιν ἀνήκοντας ὅρους ἐπιρρυθμίζει. τίνος δὲ χάριν τὸ στερεὸν νῦν ὁρίζεται, οὐ μὴν δὲ τὸ σῶμα, καίτοι καὶ στερεὸν, σῶμα καθέστηκε; ἢ ὅτι τοῦ σώματος καθολικωτέρως λαμβανομένου, ὁ τοῦτο ὁρίσας, οὐ μόνον τὰ στερεὰ, ἀλλὰ καὶ τὰ ῥοώδη, καὶ αὐτὰ τὰ οὐράνια καλούμενα σώματα, ὧν τὰ μὲν καθ' αὐτὰ ἀνεπίδεκτα ὅλως φαίνεται σχημάτων, τὰ δὲ ἑτέρας φύσεως τῶν ὑπὸ σελήνην πέφυκε, τῷ λόγῳ περιλαβεῖν δόξειεν. Ἐπεὶ δὲ σκοπὸς αὐτῷ περὶ τῶν δεικτικῶν καθ' αὐτὰ τῶν οἱωνδήποτε σχημάτων διαλαβεῖν, τούτου ἕνεκα, οὐ σῶμα, ἀλλά γε στερεὸν ὡρίσατο. ἔφη τοίνυν τὸ στερεὸν μῆκος ἔχειν, ἵνα μὴ ἀμερὲς ὑποληφθῇ. προστέθεικε δὲ καὶ τὸ πλάτος, ὅπως ἂν τῶν γραμμῶν ἐξάρῃ. τὸ δὲ βάθος, ἵνα καὶ τῶν ἐπιφανειῶν διάφορον ἀποδείξῃ, μῆκος οὖν ἐστι τὸ ἐπὶ τὰ ἔμπροσθεν, ἢ ὄπισθεν προχωροῦν, πλάτος δὲ τὸ ἐπὶ τὰ δεξιά, ἢ ἀριστερὰ ἐκτεινόμενον, καὶ βάθος τὸ ἀπὸ τῶν ἄνω ἐπὶ τὰ κάτω φερόμενον, οὗτινος ἐναντίον τὸ ὕψος ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω ἀνιστάμενον.

Β': Στερεοῦ δὲ πέρατα, ἐπιφάνεια.

Ὥσπερ ἐπιφανείας πέρατα γραμμαὶ λέγονται, γραμμῆς δὲ σημεῖον. οὕτω καὶ στερεοῦ ἐπιφάνεια, καὶ οὐ γραμμαί, πολλῷ δ' οὐ μᾶλλον σημεῖα. καθάπερ γὰρ σημείου ῥυέντος γραμμὴν ἀποτελεῖσθαι ἔφημεν, γραμμῆς δὲ ῥυείσης ἐπιφάνειαν, οὕτω τι εἰπεῖν οὐκ ἀπεικὸς, καὶ ἐπιφανείας κινηθείσης, σῶμα ἀποτελεῖσθαι. δεῖ δὲ τὴν κίνησιν μὴ ἀφ' οὗ εἶδος καὶ πρὸς τὸ μέρος γίγνεσθαι ἐννοεῖν. ἀλλ' ἐξ οἱουδήποτε πρὸς οἱονδήποτε γενομένην, τὸ αὐτὸ ἀποτελεῖσθαι.

Γ': Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

Οὐ μόνον εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν ὀρθὴ λέγεται, ἀλλὰ καὶ πρὸς ἐπίπεδον, ἡνίκα τὸ ἴσον τῶν γωνιῶν πανταχόθεν τηρῇ. ὥσπερ οὖν τῆς πρὸς εὐθεῖαν ὀρθῆς γνώρισμα τὸ τὰς ἑκατέρωθεν γωνίας ἴσας ποιεῖν. οὕτω καὶ τῆς πρὸς ἐπίπεδον, τὸ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας τοῦτο τηρεῖν. εἴρηται δὲ τὸ πρὸς πάσας, ἵνα ἐξ οἱουδήποτε μέρους τοῦ ἐπιπέδου ἐξαγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὸ σημεῖον συνέρχεσθαι ἐννοηθῶσι. τὸ δὲ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς ἐγκλινομένης ἐν ἐπιπέδῳ εὐθείας δυνατὸν πλείους εὐθείας ἀχθῆναι πρὸς ὀρθὰς, μὴ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

Δ': Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

Ἔστι πάντως γε καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν, ὥσπερ καὶ γραμμὴ πρὸς γραμμήν. Ἐπεὶ καὶ ὑπὸ ἐπιπέδων γωνία στερεὰ περιέχεσθαι λέγεται. ὅπου δὲ γωνία ἀποτελεῖται, ἐκεῖ καὶ ὀρθότης ἐστὶ, καὶ ἔγκλισις. γνώρισμα δὲ τοῦ ὀρθοῦ ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον, ἡ τῶν γραμμῶν ὀρθότης. ἐὰν γὰρ ἐν τῷ ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων γραμμαὶ ἀγόμεναι ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς, ὀρθαὶ πρὸς τὸ λοιπὸν ἐπίπεδον ὦσι, καὶ τὸ ἐπίπεδον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ὀρθὸν λέγεται.

Ε': Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου, καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος τῆς εὐθείας, εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

Ἐπεὶ τῆς ὀρθότητος ἡ κλίσις ἐναντία. διαβεβαιώσας ἐν τοῖς δυσὶν ἀνωτέρω ὅροις, πότε γραμμὴ καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἑτέραν γραμμὴν, καὶ ἐπίπεδον ὀρθὰ λέγονται,

ται, ἐν τῷ παρόντι περὶ ἐγκλινομένης γραμμῆς τὸν λόγον ποιεῖται. τίνος δὲ χάριν οὐ τὴν ἐγκλινομένην γραμμὴν ὁρίζεται, ἀλλὰ τὴν κλίσιν ταύτης δηλῶσαι σπεύδει; ἢ ὅτι τῶν ἐναντίων αἱ αὐταί εἰσιν ἐπιστῆμαι. καὶ δύναται γὰρ ὁ τὴν ὀρθὴν γνοὺς, καὶ τὴν ἐγκλινομένην ἐπιγνῶναι. ἡ δὲ κλίσις ἀόριστός ἐστι, καὶ ἡ αὐτὴ γραμμὴ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μᾶλλον, ἢ ἧττον ἐγκλίνειν λέγεται. διὸ καὶ τίς ἡ κλίσις ὁρίζεται. Ἔστι δὲ κλίσις γραμμῆς πρὸς ἐπίπεδον, γωνία τις περιεχομένη ὑπό τε τῆς ἐφεστώσης, καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐξαγομένης. δεῖ δὲ τὴν ἐξαγομένην ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς ἐφεστώσης, μὴ ὡς ἔτυχεν ἐκτείνειν. ἀλλ᾽ ἐφ᾽ ἃ μέρη ἡ ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς ἐφεστώσης κάθετος πίπτει, ἐξάγεσθαι, καὶ τὰ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γενόμενα σημεῖα τῆς τε καθέτου καὶ τῆς ἐφεστώσης, ἐπιζευγνύειν.

ς': Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ, ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

Κἀνταῦθα οὐ περὶ τοῦ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου διαλαμβάνει. ἀλλά γε τίς ἡ τούτου κλίσις διασαφεῖ, καὶ τοῦτο δι᾽ ὃν εἴρημεν λόγον ἐν τῷ ἀνωτέρῳ ὅρῳ ποιεῖται. Ἔστι τοίνυν κλίσις τοῦ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου πρὸς ἕτερον ἐπίπεδον, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν εὐθειῶν, τῶν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων οὐσῶν, καὶ πρὸς ὀρθὰς κειμένων τῇ κοινῇ τομῇ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ. καλεῖται δὲ ἡ τοιαύτη γωνία, κλίσεως γωνία. ὥστε ὁ ἐρωτήσας, καὶ μαθὼν τὴν τοιαύτην γωνίαν πόσων μοιρῶν ἐστιν, οἶδε πάντως τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου.

Ζ': Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν.

Ὁπηνίκα, φησὶν, ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ἐγκλίνεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ἐὰν αἱ τῶν κλίσεων ἑκατέρου τῶν ἐπιπέδων γωνίαι ἐρωτηθεῖσαι, ἴσαι εὑρεθῶσι, τὰ ἐγκλινόμενα ἐπίπεδα ὁμοίως κεκλίσθαι λέγονται. ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρου ἡ τοιαύτη γωνία παραστατικὴ τῆς κλίσεως ἐστι. καὶ ὡς ἔφθην εἰπὼν, αὕτη ἡ κλίσις, ἐὰν αἱ γωνίαι τὸ ἴσον τηρῶσι πρὸς ἀλλήλας, καὶ αἱ κλίσεις ὡσαύτως τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Η': Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι, τὰ ἀσύμπτωτα.

Ὥσπερ παράλληλοι γραμμαί εἰσιν, αἱ ἐκβαλλόμεναι ἐπ᾽ ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ μὴ συμπίπτουσαι. οὕτω καὶ παράλληλα ἐπίπεδα, φησιν, εἶναι, ὅσα παραλλήλως κείμενα, κἂν ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐκβάλλεσθαι ἐννοηθῶσι, μηδέποτε συμπίπτειν, ἅπερ καὶ ἀσύμπτωτα καλεῖ.

Θ′: Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τὸ πλῆθος.

Εἰς δήλωσιν τούτου ζητητέον ἡμῖν πρῶτον, τίνα τῶν ἐπιπέδων ὅμοια λέγεται. Ἐπεὶ δὲ τῶν ἐπιπέδων τὰ μὲν ὡρισμένα εἰσὶν, ὅσα ὑπὸ γραμμῶν, ἢ γραμμῆς περιέχεται, ἃ καὶ σχήματα ἤκουσε· τὰ δὲ ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινόμενα, καὶ ἀόριστα. ὅσα δὲ ἀόριστα οὔτε ἰσότητα δέχεται, οὔτε μὴν ὁμοιότητα, ἀδύνατον γὰρ παραβάλλεσθαι, οὔτε τι κοινὸν ἔχουσι, πλὴν τῆς ἀπειρίας· ἄρα τὰ ὡρισμένα μόνα λεχθῆναι δυνατὸν ὅμοια. τίνα δὲ ταῦτα διὰ τοῦ α′: ὅρου τῶν τοῦ ϛ′: τῶν ἐπιπέδων βιβλίων δεδήλωκεν Εὐκλείδης. ὅσα τοίνυν τῶν σχημάτων ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχεται, ὅμοια λέγεται. Ἐπεὶ δὲ δυνατὸν καὶ Πρίσμα, καὶ Κύβος, καὶ ἕκαστον τῶν στερεῶν σχημάτων, τῶν μὴ σφαιρικῶν ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχεσθαι, καὶ ὅμοια λεχθῆναι οὐκ ἔξεστι, διὰ τὸ ἑτεροειδῆ εἶναι, τούτου γε χάριν καὶ τῶν ἴσων τὸ πλῆθος προσέθηκεν. εἰ δέ τις ἀπορήσειε, τίνος γε χάριν τὰ σχήματα, ἅπερ τῇ ποσότητι ἀνάγεται, τὴν ὁμοιότητα ἐπιδέχεται, ἥτις παρεπόμενόν ἐστι τῆς ποιότητος; καὶ τὸν Ἀριστοτέλην ῥητέον, ὅτι τὸ σχῆμα τέταρτον εἶδος τῆς ποιότητος ἀποπληροῖ.

Ι′: Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τῷ πλήθει, καὶ τῷ μεγέθει.

Εἴρηται, ὅτι τῶν στερεῶν σχημάτων, ὅσα ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων καὶ ἴσων τῷ πλήθει περιέχονται, ὅμοιά εἰσιν. ἐὰν οὖν καὶ τῷ μεγέθει ἴσα ὦσι τὰ ἐπίπεδα ὑφ' ὧν περιέχονται, στερεὰ ἐκεῖνα σχήματα, καὶ ἴσα, καὶ ὅμοιά ἐστιν.

ΙΑ′: Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. ἢ καὶ οὕτω, στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

Τὰ τῶν γωνιῶν εἴδη δύο, ὥσπερ καὶ τῶν σχημάτων, ἐπίπεδον καὶ στερεόν· καὶ αἱ μὲν τοῦ ἐπιπέδου εἴδους γωνίαι ὑπὸ δύο μόνων γραμμῶν περιέχονται, αἱ δὲ τοῦ στερεοῦ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο. ἀορίστως δὲ εἴρηται ὑπὸ πλειόνων, ὅτι ἡ στερεὰ γωνία ἐν μὲν ταῖς τρίγωνον ἐχούσαις βάσιν πυραμίσιν ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται, ἐν δὲ ταῖς τετράγωνον ὑπὸ τεσσάρων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως. αὐξανομένων τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως, αὔξονται καὶ αἱ περιέχουσαι τὴν πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος γωνίαν. εἴρηται δὲ τὰς γραμμὰς μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ εἶναι. ὁπηνίκα γὰρ πλείονες εὐθεῖαι ἀλλήλων ἅπτονται, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ ὦσιν, οὐ στερεὰν γωνίαν ἀποπληροῦσιν, ἀλλὰ πλείους ἐπιπέδους.

ΙΒ′: Π.

ΙΒ′: Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

Τἀντεῦθεν ἄρχεται περὶ τῶν εἰδῶν τῶν στερεῶν σχημάτων διαλαβεῖν, ὧν ποικίλων ὄντων, ὥσπερ καὶ τῶν ἐπιπέδων, πρῶτον καὶ ἁπλούστερόν ἐστιν ἡ Πυραμίς· δύναται γὰρ αὕτη ἐλάχιστον ὑπὸ τεσσάρων μόνον ἐπιπέδων περιέχεσθαι, μηδενὸς τῶν λοιπῶν εἰδῶν τῶν στερεῶν σχημάτων τοῦτο δυναμένου. ἔστι δ᾽ αὕτη ἡ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα. τὸ οὖν πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεόν, εἴρηται εἰς διαφορὰν τῶν ἐπιπέδων σχημάτων. ἐπιπέδοις δὲ περιεχόμενον, ἵνα μὴ σφαιρικὸν νομισθῇ, καὶ τοῦ κώνου διοίσει. τὸ δὲ ἀφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ τὰ λοιπά, εἰς διαφορὰν τῶν λοιπῶν στερεῶν σχημάτων, ἐπιπέδοις περιεχομένων.

ΙΓ′: Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι, καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπά, παραλληλόγραμμα.

Δευτέραν τάξιν τῶν στερεῶν σχημάτων τὸ πρίσμα ἔχει· τοῦτο γὰρ μόνον μετὰ τὴν πυραμίδα ὑπὸ πέντε τῷ πλήθει ἐπιπέδων δύναται περιέχεσθαι, τῶν δύο τῶν ἀπεναντίον τριγωνοειδῶν, ἴσων τε καὶ παραλλήλων, τῶν δὲ λοιπῶν τριῶν, παραλληλογράμμων.

ΙΔ′: Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιενεχθὲν σχῆμα.

Εἰκότως αὖτις ἀπορήσειε, τοῦ χάριν περὶ τῶν λοιπῶν σχημάτων διαλαβάνων ἐκ τῶν ὅρων ἑκάστου τὸν ὁρισμὸν ἐθηρᾶτο αὐτῶν, περὶ δὲ τῆς Σφαίρας ἐκ τῆς κατασκευῆς; πρὸς ὃν ῥητέον, ὅτι τὰ μὲν λοιπὰ τῶν σχημάτων ὑπὸ πλειόνων ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, δύναται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὑφ᾽ ὧν περιέχεται ἐπιφανειῶν, ὡς συστατικῆς διαφορᾶς λαμβανομένου τοῦ σχήματος, γένους ὄντος, παρίστασθαι, ἡ δέ γε σφαῖρα ὑπὸ μιᾶς μόνης περιεχομένη, ὥσπερ καὶ ὁ κύκλος ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς, διὰ τοῦτο ἐκ τῆς κατασκευῆς ὁρίζεται. Ἔστι δὲ Σφαῖρα σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κυρτῆς ἐπιφανείας περιεχόμενον. γίνεται δὲ ἡνίκα τῆς διαμέτρου τοῦ ἡμικυκλίου μενούσης, περιφερόμενον τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι.

ΙΕ′: Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

Ιϛ′: Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ, τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

ΙΖ′: Δια-

ΙΖ'. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ΙΗ'. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. κἂν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ, τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος. ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ΙΘ'. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν, ἡ μένουσα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

Κ'. Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης γραφόμενος.

ΚΑ'. Κύλινδρος δὲ, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ΚΒ'. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

ΚΓ'. Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι, οἱ ἀπὸ τῶν ἀπεναντίων περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

ΚΔ'. Ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες, καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

ΚΕ'. Κύβος, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

Κϛ'. Ὀκτάεδρον, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

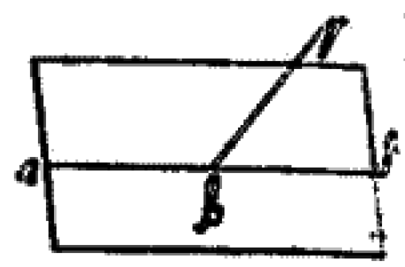
ΚΖ'. Δωδεκάεδρον, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

ΚΗ'. Εἰκοσάεδρον, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων, ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Πρότασις Α′: Θεώρημα.

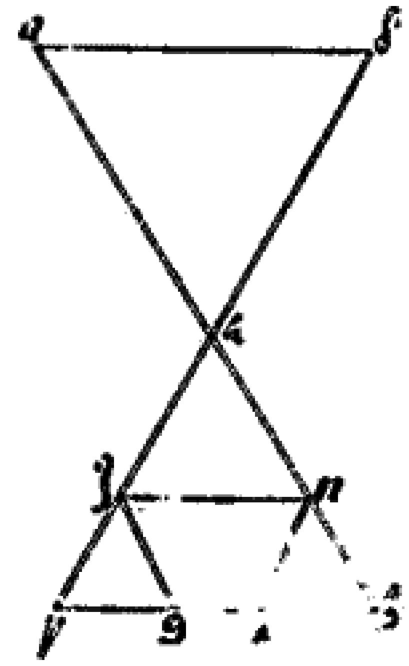
Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ.

Eucl. lib. XI. Fig. 1



Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τῆς αγ, εὐθείας μέρος μὲν τὸ αβ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ τὸ βγ, ἐν τῷ μετεώρῳ. Ἐξαγομένης οὖν τῆς αβ, ἐπὶ τὸ δ, ἔσται ἡ αδ, συνεχὴς εὐθεῖα, ὑπετέθη δὲ καὶ ἡ αγ, εὐθεῖα εἶναι. δύο ἄρα εὐθεῖαι αγ, αδ, κοινὸν τμῆμα τὸ αβ, ἔχουσιν, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ ιγ′: ἀξίωμα. Εὐθείας ἄρα γραμμῆς καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Β′: Θεώρημα.



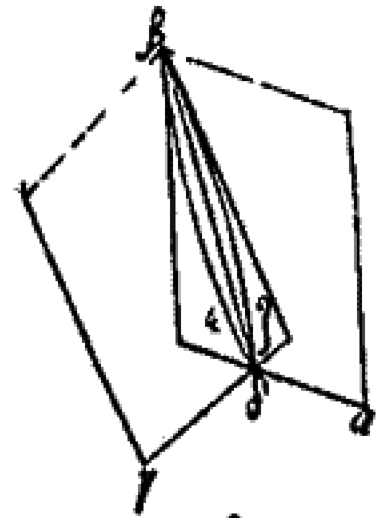
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Δύο ἤδη εὐθείας τὰς αβ, γδ, τεμνομένας κατὰ τὸ ε, ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι λέγω ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ ἡ μὲν αβ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ᾖ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ γδ, ἐν μετεώρῳ, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας. εἰ δὲ ἥ τε αβ, καὶ τὸ τῆς γδ, μέρος τὸ γε, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ὦσιν ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ εδ, ἐν μετεώρῳ, ἔσται εὐθείας τῆς γδ, μέρος μὲν ἐν τῷ μετεώρῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ ἀνωτέρω. Λέγω ὅτι καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἐπιπέδῳ. Ληφθέντωσαν γὰρ ἐπὶ τῶν αβ, γδ, τυχόντα σημεῖα τὰ ζ η, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζη, γβ, ζθ, ηκ. εἰ οὖν τοῦ εγβ, τριγώνου μέρος μὲν τὸ γζθ, ἢ βηκ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ᾖ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν μετεώρῳ, ἔσται ἑκατέρας τῶν γε, γβ, εὐθειῶν μέρος μὲν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ μετεώρῳ. ὡσαύτως κἂν τὸ εζη, μέρος τοῦ εγβ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ᾖ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν μετεώρῳ. ἔσται καὶ ἑκατέρας τῶν εγ, εβ, μέρος μὲν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ μετεώρῳ, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρα-

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

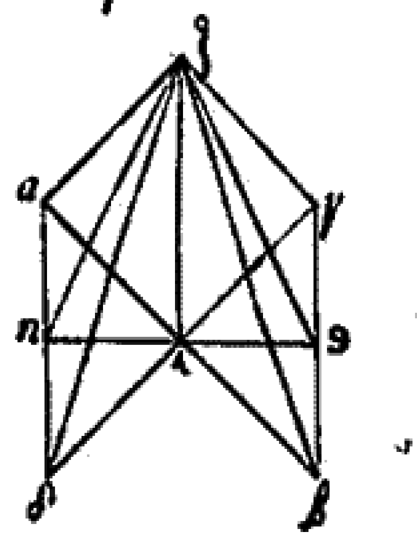
Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστι. *Eucl. Lib. 11. Fig. 2.*



Τῶν ἤδη αβ, βγ, ἐπιπέδων τεμνόντων ἄλληλα, λέγω τὴν βδ, βάσιν κοινὴν τομὴν, εὐθεῖαν εἶναι. εἰ γὰρ μὴ ἐπιζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ δ, ἐπὶ τὸ β, ἐν μὲν τῷ αβ, ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ δεβ, ἐν δὲ τῷ γβ, ἡ δζβ, αἱ τοίνυν βεδ, βζδ, εὐθεῖαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἕξουσι, τὰ βδ, καὶ χωρίον περιέξουσι, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ ιβ': ἀξίωμα. ὡσαύτως δειχθήσεται, κἂν ἄλλη τις εὐθεῖα ἐπὶ τῶν βδ, ἐπιζευχθῇ. Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.



Δύο ἤδη εὐθείαις ταῖς αβ, γδ, τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ ε, ἔστω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τοῦ ε, εὐθεῖα ἡ εζ. Λέγω, ὅτι ἡ εζ, καὶ τῷ διὰ τῶν αβ, γδ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τῶν γὰρ εα, εδ, εγ, εβ, ἴσων γινομένων, ἐπιζεύχθωσαν αἱ αδ, γβ, εὐθεῖαι, καὶ διὰ τοῦ ε, διήχθω τις εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ θη. ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, σημείου ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζα, ζη, ζδ, ζγ, ζθ. ζβ. ἐπεὶ τοίνυν αἱ δύο αε, εδ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς γε, εβ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεδ, τῇ ἀπὸ γεβ, ἴση, καὶ βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσει τῇ γβ, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τῶν ἐπιπέδων, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ εαη, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εβθ. πάλιν ἐπεὶ τῶν εαη, βεθ, τριγώνων αἱ δύο γωνίαι, αἱ ὑπὸ αεη, εαη, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ θεβ, εβθ, καὶ ἔτι ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις εὐθεῖα ἡ αε, τῇ εβ, ἴση, καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς εἰσὶν ἴσαι, κατὰ τὴν κϛ': τοῦ α: ἴση ἄρα ἡ μὲν αη, τῇ βθ, ἡ δὲ ηε, τῇ εθ. καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ, ἴσαι εἰσὶ, κοινὴ δὲ ἡ ζε, καὶ αἱ ὑπὸ ζεα, ζεβ, γωνίαι ὡσαύτως ἴσαι (ὀρθαὶ γὰρ) ἄρα καὶ ἡ ζα, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι, αἱ ζγ, ζδ, ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ζα, ἴση δέδεικται τῇ ζβ, ἡ δὲ αδ, τῇ βγ, καὶ ἡ ζγ, τῇ ζδ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ζαδ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζβγ, κατὰ τὴν η': τοῦ α: ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αη, ἴση τῇ βθ, δύο δὲ αἱ ζα, αη, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ζβ, βθ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζαη, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ζβθ, καὶ ἡ ζη, ἄρα βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ζθ. καὶ ἐπεὶ πάλιν δέδεικται ἡ ηε, ἴση τῇ εθ, ἡ δὲ εζ, κοινὴ, καὶ ἡ ζη, ἴση τῇ ζθ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ πὸ ζθη, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζθε, (ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα τῶν ζθη, ζθε,) ὡσαύτως δειχθήσεται ἡ ζθ, ὀρθὴ εἶναι, καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ὥστε κατὰ τὸν γʹ: ὅρον τοῦ παρόντος ἡ ζθ, εὐθεῖα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, τοῦτο τὸ δέ ἐστι τὸ διὰ τῶν αβ, γδ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Εʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Τρισὶν ἤδη εὐθείαις ταῖς βγ, βδ, βε, ἁπτομέναις ἀλλήλων κατὰ τὸ β, ἐφεστάσθω ἡ αβ, ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ β, ἁφῆς. Λέγω τὰς βγ, βδ, βε, ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστωσαν αἱ μὲν βδ, βε, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ· ἡ δὲ βγ, ἐν τῷ μετεώρῳ. καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν αβ, βγ, ἐπίπεδον, ὅπερ μετὰ τοῦ ὑποκειμένου κοινὴν τομὴν ποιήσει. ποιείτω τὴν βζ, αἱ ἤδη βε, βδ, βζ, εὐθεῖαι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ εἰσὶν ἐπιπέδῳ, ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ β. ἐπεὶ δὲ ἡ αβ, ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν βε, βδ, ὀρθὴ πάντως ἔσται καὶ τῷ διὰ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῷ ὑποκειμένῳ, καθ' τὸν ὑπ.... καὶ ἔτι πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, κατὰ τὸν γʹ: ὅρον τοῦ παρόντος. ἐν δὲ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ βζ, καὶ ἅπτεται τῆς αβ, ἄρα ἡ αβ, πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς τὴν βζ, ἦν δὲ πρὸς ὀρθὰς καὶ πρὸς τὴν βγ, ἡ ὑπὸ αβγ, ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβζ, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. lib. 11. Fig. 3.

Πρότασις ςʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

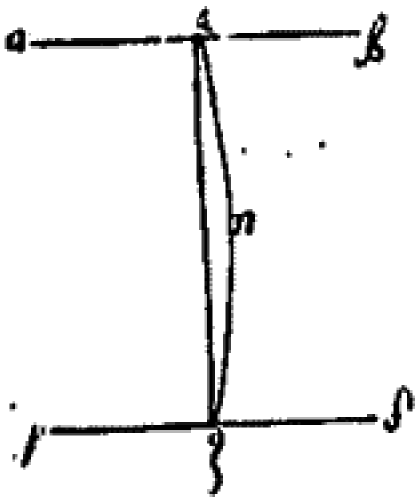
Εὐθεῖαι ἤδη αἱ αβ, γδ, πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι καὶ παράλληλοί εἰσι. Συμβαλλέθωσαν γὰρ τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα, καὶ ἐξήχθω τὸ διὰ τῶν αβ, γδ, ἐπίπεδον, ὅπερ μετὰ τοῦ ὑποκειμένου κοινὴν τομὴν ποιήσει εὐθεῖαν, ποιείτω δὲ τὴν βδ. ἐπεὶ ἦν ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθὰς ἔτι ἔσται καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. ἅπτεται δὲ ἑκατέρας τούτων ἡ βδ, οὖσα ἐν τῷ ὑπο-

ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ α β δ, γ δ β, γωνιῶν ὀρθή ἐστιν. ὅταν δὲ εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. αἱ α β, γ δ, ἄρα παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὴν κη': τοῦ α': Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΑΛΛΩΣ ΚΑΤ' ΕΥΚΛΕΙΔΗΝ.

Τῶν δὲ α β, γ δ, εὐθειῶν συμβαλλουσῶν κατὰ τὰ β δ, σημεῖα, ἐπιζεύχθω ἡ β δ, καὶ ἐπὶ τῆς β δ, πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ δ, σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἤχθω ἡ δ ε, καὶ γενομένης τῆς δ ε, ἴσης τῇ α β, ἐπιζεύχθωσαν αἱ β ε, α ε, α δ. ἐπεὶ τοίνυν ἡ α β, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἔτι καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν β δ, β ε, εὐθειῶν, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ παρόντος. ὡσαύτως καὶ ἡ γ δ, πρὸς ἑκατέραν τῶν δ β, δ ε. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ δ ε, ἴση ἐστὶ τῇ α β, κοινὴ δὲ ἡ β δ, καὶ ἡ ὑπὸ α β δ, γωνία τῇ ὑπὸ β δ ε, ἴση, (ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα) καὶ βάσις ἄρα ἡ α δ, βάσει τῇ β ε, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὸ δ': τοῦ α': τῶν ἐπιπέδων. Αὖθις ἐπεὶ ἡ μὲν α β, ἴση ἐστὶ τῇ δ ε, ἡ δὲ β ε, τῇ α δ, καὶ βάσις ἡ α ε, κοινὴ, αἱ ἄρα ὑπὸ α β ε, ε δ α, γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ἡ δὲ ὑπὸ α β ε, ὀρθὴ ἐδείχθη, καὶ ἡ ὑπὸ α δ ε, ἄρα ὀρθή ἐστιν. ἡ δ ε, ἄρα πρὸς τὴν δ α, ὀρθή ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν δ β, δ γ, ἡ ε δ, ἄρα ταῖς τρισὶν δ β, δ α, δ γ, ὀρθή ἐστι, καὶ κατὰ τὸ ἀνωτέρω, αὗται αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ. ὥστε καὶ ἡ α β, ἐν τῷ αὐτῷ ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ καὶ αἱ δ β, δ α, κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος. αἱ α β, β δ, δ γ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β δ, γ δ β, ὀρθὴ, αἱ α β, γ δ, ἄρα παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὴν κη': τοῦ α': τῶν ἐπιπέδων. ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 4.



Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

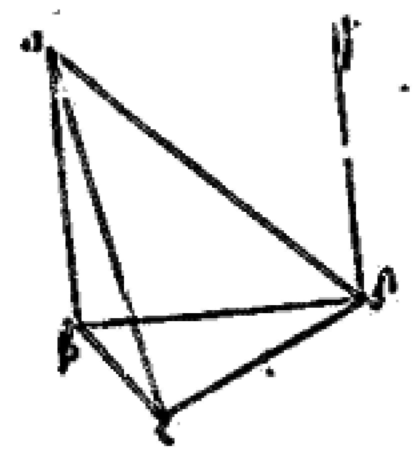
Ἐπὶ δύο ἤδη εὐθειῶν παραλλήλων τῶν α β, γ δ, ληφθήτωσαν τυχόντα σημεῖα τὰ ε, ζ. Λέγω τὴν διὰ τῶν ε, ζ, εὐθεῖαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἐν μετεώρῳ, ὡς ἡ ε η ζ· καὶ διήχθω τὸ διὰ τῆς ε η ζ, ἐπίπεδον, ὅπερ μετὰ τοῦ διὰ τῶν α β, γ δ, ἐπιπέδου κοινὴν τομὴν ποιήσει. ποιείτω δὲ τὴν ε ζ, ἡ ε ζ, ἄρα καὶ ἡ ε η ζ, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὸ ιβ': ἀξίωμα. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Η′: Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

Δύο ἤδη εὐθειῶν παραλλήλων τῶν α β, γ δ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν α β, πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Λέγω καὶ τὴν λοιπὴν γ δ, ὀρθὴν εἶναι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῶν αὐτῶν α β, γ δ, εὐθειῶν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα. Ἐπιζεύχθω ἡ β δ, καὶ συμπληρούσθω τὸ σχῆμα, κατὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ϛ′: τῆς παρούσης. αἱ τρεῖς ἤδη εὐθεῖαι α β, β δ, γ δ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ, κατὰ τὴν ἑβδόμην. ἤχθω τῇ β δ, πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ δ ε. καὶ κείσθω τῇ α β, ἴση ἡ δ ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ β ε, α ε, α δ. καὶ ἐπεὶ ἡ α β, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ α β, καὶ κατὰ τὴν κθ′: τοῦ α′: ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β δ, α β ε, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς α β, γ δ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ β δ, αἱ ἄρα ὑπὸ α β δ, γ δ β, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ α β δ. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ γ δ β, ἡ γ δ, ἄρα πρὸς τὴν β δ, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α β, τῇ δ ε, κοινὴ δὲ ἡ β δ, δύο δὴ αἱ α β, β δ, δυσὶ ταῖς ε δ, δ β, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α β δ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ε δ β, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ βάσις ἄρα ἡ α δ, βάσει τῇ β ε, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν α β, τῇ δ ε, ἡ δὲ β ε, τῇ α δ, δύο δὴ αἱ α β, β ε, δυσὶ ταῖς ε δ, δ α, ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ α ε, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ α β ε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ε δ α, ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ α β ε, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ε δ α, καὶ ἡ ε δ, ἄρα πρὸς τὴν α δ, ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν β δ, ὀρθή, ἡ δ ε, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν β δ, δ α, ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι. κατὰ τὸν γ′: ὅρον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν α δ, δ β, ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ε δ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν β δ, δ α, ἐπιπέδῳ, ἐστὶν ἡ δ γ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν β δ, δ α, ἐπιπέδῳ εἰσὶ καὶ αἱ α β, β δ, ἐν ᾧ δὲ ἡ α β, β δ, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ δ γ, ἡ ε δ, ἄρα τῇ δ γ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ὥστε ἡ γ δ, τῇ δ ε, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἔστι δὲ ἡ γ δ, καὶ τῇ β δ, ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς δ ε, δ β, ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ δ, τομῆς, πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν. ὥστε ἡ γ δ, καὶ τῷ διὰ τῶν δ ε, δ β, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, τὸ δὲ διὰ τῶν δ ε, δ β, ἐπίπεδον, τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν, ἡ γ δ, ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 8.



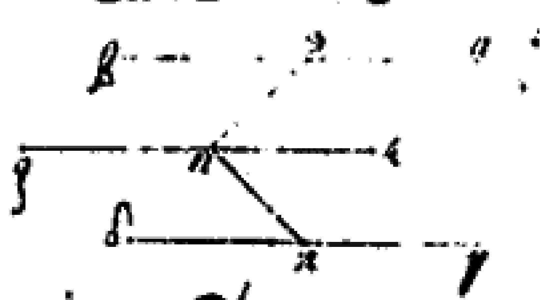
Πρό-

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔςω γὰρ ἑκατέρα τῶν α β, γ δ, παράλληλος τῇ ε ζ, μὴ οὖσα αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι παράλληλός ἐςιν ἡ α β, τῇ γ δ. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ε ζ, σημεῖον τυχὸν τὸ η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ε ζ, ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ε ζ, α β, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ θ η, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ζ ε, γ δ, τῇ ε ζ, πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ η κ. καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ, πρὸς ἑκατέραν τῶν η θ, η κ, ὀρθή ἐςιν, ἡ ε ζ, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν η θ, η κ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐςι. καὶ ἔςιν ἡ ε ζ, τῇ α β, παράλληλος, καὶ ἡ α β, ἄρα τῷ διὰ τῶν θ, η, κ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐςι καὶ τὸν αὐτὸν, ἑκατέρα ἄρα τῶν α β, γ δ, τῷ διὰ τῶν θ, η, κ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐςιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι κατὰ τὸ ς': παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι. παράλληλος ἄρα ἐςὶν ἡ α β, τῇ γ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

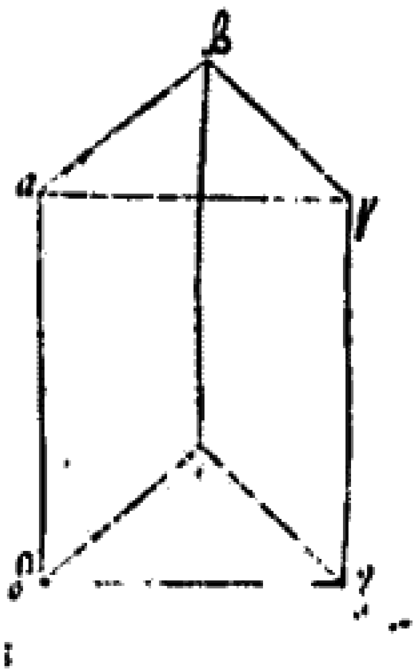
Eucl. Lib. 11. Fig. 6.



Θ'

Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσι.



Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ α β, β γ, παρὰ δύο εὐθείας τὰς δ ε, ε ζ, ἁπτομένας ἀλλήλων ἔςωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ α β γ, γωνία τῇ ὑπὸ δ ε ζ. Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ β α, β γ, ε δ, ε ζ, ἴσαι ἀλλήλαις. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α δ, γ ζ, β ε, α γ, δ ζ. καὶ ἐπεὶ ἡ β α, τῇ ε δ, ἴση ἐςὶ, καὶ παράλληλος, καὶ ἡ α δ, ἄρα τῇ β ε, ἴση ἐςὶ καὶ παράλληλος. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ γ ζ, τῇ β ε, ἴση ἐςὶ καὶ παράλληλος, ἑκατέρα ἄρα τῶν α δ, γ ζ, τῇ β ε, ἴση ἐςὶ καὶ παράλληλος, αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι, παράλληλος ἄρα ἐςὶν ἡ α δ, τῇ γ ζ, καὶ ἴση, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ α γ, δ ζ, καὶ ἡ α γ, ἄρα τῇ δ ζ, ἴση ἐςὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ α β, β γ, δυσὶ ταῖς δ ε, ε ζ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ α γ, βάσει τῇ δ ζ, ἴση, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ α β γ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δ ε ζ, ἐςὶν ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

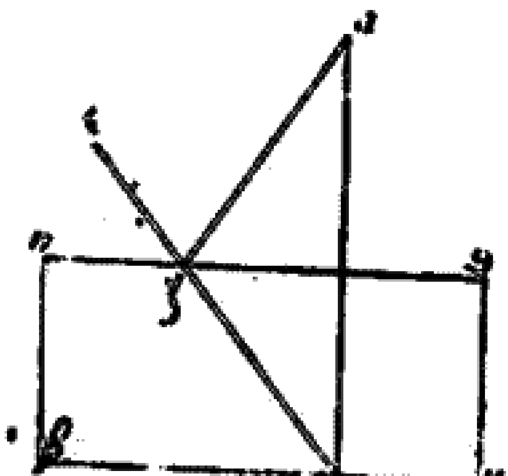
Πρό-

Πρότασις ΙΑʹ: Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον. Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ α σημείου, ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ βγ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α σημείου ἐπὶ τὴν βγ, κάθετος ἡ αδ. εἰ μὲν οὖν ἡ αδ, κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ δ σημείου τῇ βγ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ δε· καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὴν δε, κάθετος ἡ αζ, καὶ διὰ τοῦ ζ, σημείου, τῇ βγ, παράλληλος ἤχθω ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἡ βγ, ἑκατέρᾳ τῶν δα, δε, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ βγ, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν αδ, δε, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καί ἐστιν αὐτῇ παράλληλος ἡ ηθ· ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, κατὰ τὴν η: τοῦ παρ: καὶ ἡ ηθ, ἄρα τῷ διὰ τῶν αδ, δε, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν εδ, δα, ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ηθ· ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ αζ, οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν εδ, δα, ἐπιπέδῳ, ἡ ηθ, ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ζα, ὥστε καὶ ἡ ζα, ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ηθ, ἔστι δὲ ἡ αζ, καὶ πρὸς τὴν δε, ὀρθή. ἡ αζ, ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ηθ, δε, ὀρθή ἐστι, κατὰ τὴν ϛ': ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, ἡ ζα, ἄρα τῷ διὰ τῶν εδ, ηθ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν εδ, ηθ, ἐπίπεδον ἐστὶ τὸ ὑποκείμενον, ἡ αζ, ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 7.



Πρότασις ΙΒʹ: Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

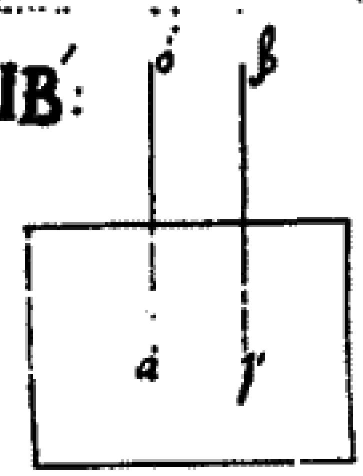
Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ α. Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι. Νενοήσθω τι σημεῖον μετέωρον τὸ β, καὶ ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸ ὑπο-

κείμε-

κείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ βγ, καὶ διὰ τοῦ α, σημείου τῇ βγ, παράλληλος ἤχθω ἡ αδ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν, αἱ αδ, γβ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ βγ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ αδ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀνέσταται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 8.

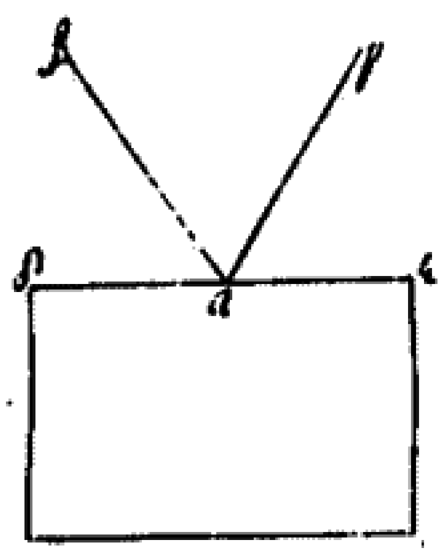
IB'



Πρότασις ΙΓ'. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατὸν τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ α, δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, αγ, πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν αβ, αγ, ἐπίπεδον, τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ α, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν δαε, αἱ ἄρα αβ, αγ, δαε, εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ αγ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ δαε, οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ ἄρα ὑπὸ γαε, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ βαε, ὀρθή ἐστιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ γαε, τῇ ὑπὸ βαε, καί εἰσιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσονται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

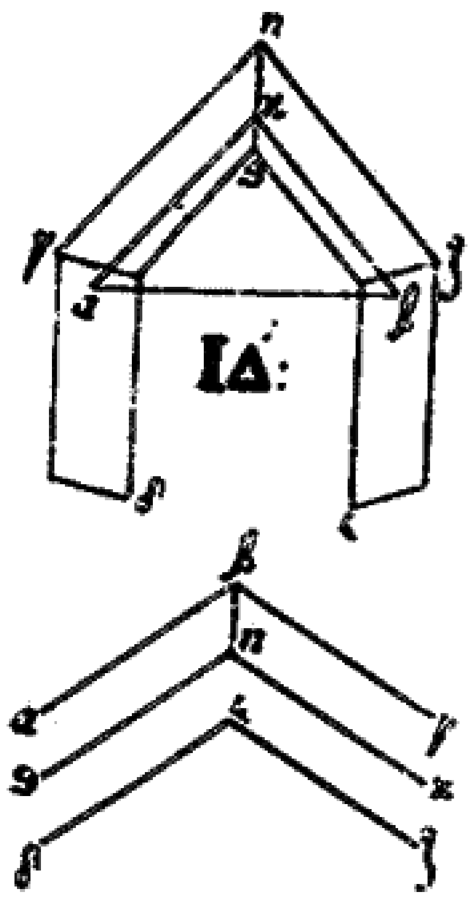


Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, πρὸς ἑκάτερον τῶν γδ, εζ, ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω. λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν. ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν, ποιείτωσαν τὴν ηθ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ηθ, τυχὸν σημεῖον τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ, βκ. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ εζ, ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν βκ, ἄρα εὐθεῖαν, οὖσαν ἐν τῷ εζ, ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ αβ, ἡ ἄρα ὑπὸ αβκ, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ὑπὸ βακ, ὀρθή ἐστι, τριγώνου δὲ τοῦ αβκ, αἱ δύο γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβκ, βακ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ γδ, εζ, ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται, παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ γδ, εζ, ἐπίπεδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 9.



ΙΔ:

Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων παράλληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ αβ, βγ, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, τὰς δε, εζ, ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι. Λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ἐπίπεδα, οὐ συμπεσοῦνται ἀλλήλοις. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπίπεδον κάθετος ἡ βη, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ η, σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ η, τῇ μὲν εδ, παράλληλος ἤχθω ἡ ηθ, τῇ δὲ εζ, ἡ ηκ. καὶ ἐπεὶ ἡ βη, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ηθ, ηκ, οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βηκ, βηθ, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ βα, τῇ ηθ, αἱ ἄρα ὑπὸ ηβα, βηθ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βηθ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ηβα, ἡ ηβ, ἄρα τῇ βα, πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ βη, καὶ τῇ βγ, ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ βη, δυσὶν εὐθείαις ταῖς βα, βγ, τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ βη, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν βα, βγ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ βη, καὶ τῷ διὰ τῶν ηθ, ηκ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν ηθ, ηκ, ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν δε, εζ, ἡ βη, ἄρα τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ βη, καὶ τῷ διὰ τῶν αβ, βγ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς, ἔστι δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ ὀρθή. ἡ βη, ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ἐπιπέδων ὀρθή ἐστι, καὶ κατὰ τοῦ αὐτοῦ παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν αβ, βγ, ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν δε, εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-