

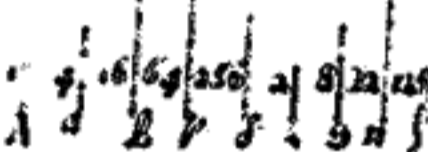
μον μέρους ἐστὶ πῆς μίξῃσι καὶ τὸν γ': ὄρον τῆ ζ': καὶ δὲ τὸν λ θ': τῆ αὐτῆ, ὁ β, ἀριθμὸς πάντα τῆς μίξ' ἑαυτὸν μίξῃ, καὶ τὸν ὁμώλυμον αὐτῆ ἀριθμὸν. ὅπῃ εἶδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὑφ' ὅσων αἱ ὀχάτοις πρώτου ἀριθμῶν μετρεῖται, ὑπὸ τῆ αὐτῆ καὶ ὀ παρα τῆ μονάδα μετρηθῆσεται.

Ἐῶσων πῆς ἐξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὶ ἀπὸ τῆς λ, μονάδος οἱ α β γ δ, καὶ ὁ ε. καὶ δ, ἀριθμὸς μετρεῖται ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ ἀριθμῶν, παρ: γάρ: τῆ ε. λέγω δὲ καὶ τὸν παρα τὸν λ, μονάδα α, ὑπὸ τῆς μίξῃσθαι. εἰ γάρ μὴ, οἱ α ε, ἀρα ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἶσονται, καὶ τὸν ε β': ὄρον τῆ ζ': ἐπεὶ δὲ ὁ ε, τὸν δ, μετρεῖ, μίξῃσθαι αὐτὸν καὶ τὸν ζ, ὡς ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πιπείκει. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ α, μετρεῖ τὸν δ, καὶ τὸν ὁμώλυμον αὐτῆ ἀριθμὸν, ὡς εἶδει τῆς ἀνωτέρω δῆλον. ὁμώλυμοι δὲ τῆ β, εἶσιν ὁ γ, κατὰ τὸν αὐτὸν. ἀρα καὶ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασ: τὸν δ, πιπείκει. καὶ τὸν ε θ': ἀρα τῆ ζ': ὡς ὁ ε, ἀρὸς τὸν α, ἕως ἐστὶ καὶ ὁ γ, ἀρὸς τὸν ζ. κατὰ δὲ τὸν κ α': ἐπεὶ οἱ α ε, ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἶσιν, μίξῃσθαι ὁ ε, τὸν γ, μετρεῖται κατὰ τὸν η, ὡς ὁ ε, τὸν η, πολλαπλασ: τὸν γ, πιπείκει. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασ: τὸν αὐτὸν γ, πιπείκει, ( μετρεῖται γάρ ὁ α, τὸν γ, κατὰ τὸν β, ὁμώλυμον αὐτῆ ἀριθμῶν, ὡς εἶδειται διὰ τῆς ἀνωτέρω. ) ἀρα κατὰ τὸν ε θ': τῆ ζ': εἶσιν ὡς ὁ ε, ἀρὸς τὸν α, ὁ β, ἀρὸς τὸν η, κατὰ δὲ τὸν κ α': τῆ αὐτῆ, ὁ ε, τὸν β, μίξῃσθαι, μετρεῖται κατὰ τὸν θ, ὡς ὁ ε, τὸν θ, πολλαπλασ: τὸν β, πιπείκει. ἀλλὰ καὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλ: β, πιπείκει, κατὰ τὸ β': πάλιν: τῆς ε θ': τῆ ζ': ἀρα κατὰ τὸν κ': τῆ αὐτῆ ζ': εἶσιν ὡς ὁ ε, ἀρὸς τὸν α, ὁ α, ἀρὸς τὸν β, κατὰ δὲ τὸν κ α': τῆ αὐτῆ, μίξῃσθαι ὁ ε, τὸν α, καὶ ὁ α, τὸν β, οἱ δὲ α ε, πρῶτοι ἀρὸς ἀνάλογον εἶσιν, οἱ δὲ πρῶτοι μονάδι μόνῃ μίξῃσθαι, ἀπὸρον ἀρα μετρεῖται ὑπὸ τῆ ε, τὸν α, οἱ ε α, ἀρα ἕκ ἐστὶ πρῶτοι ἀρὸς ἀνάλογον, ἀλλὰ σύμφυτοι. κατὰ τὸν λ γ': ἀρα τῆ ζ': ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μίξῃσθαι, ἐπεὶ δὲ ὁ ε, πρῶτος ἐστὶ, καὶ παρ' ἑδωδὸς μετρεῖται, ἢ ἑαυτῶ, ἀρα ὁ ε, τῆς ε α, μίξῃσθαι, μίξῃσθαι δὲ ὁ ε, καὶ τὸν δ, ὑφ' ὅσων ἀρα ἀριθμῶν ὀχάτοις δ, μετρεῖται, ὑπ' αὐτῆ καὶ ὀ παρα τὸν λ, μονάδα α, μίξῃσθαι. ὅπῃ εἶδει δεῖξαι. καὶ ταῦτα μὴ κατὰ τὸν Εὐκλείδην. δείκνυται δὲ καὶ οὕτω.

Eucl. lib. 7. Fig. 7.



Μίξῃσθαι δὲ τὸν δ, ἀριθμὸν ἀρὸς ἀριθμῶν ὁ ε, κατὰ τὸν ζ. λέγω, ὅτι μίξῃσθαι

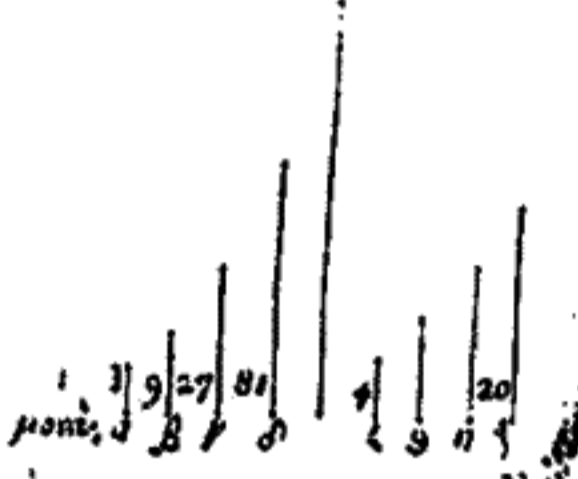
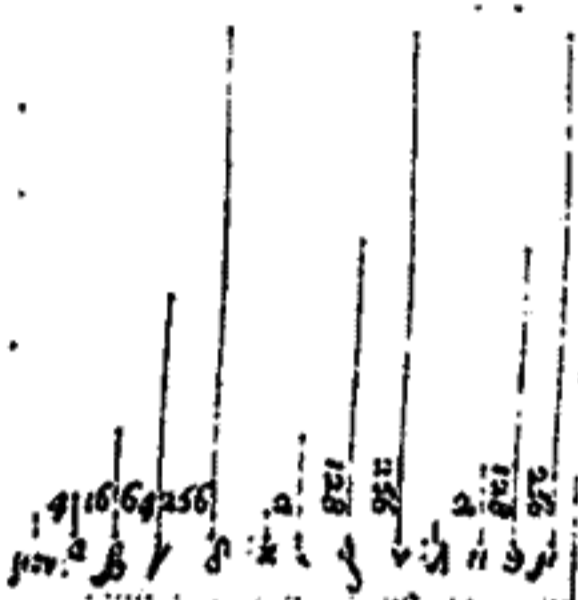
μιτρῆ ἔτι ὁ ε, καὶ τὸν α· εἰ γὰρ μὴ, ἔπειδ ὁ α, συνθετός ἐστι, μιτρήσει αὐτόν τις ἀ· ἀριθμὸς, κατὰ τὸν λ γ': τῷ ζ: καὶ ἔστω ἕτερος ὁ η· μιτρώων δὲ ὁ η, τὸν α, μιτρήσει πάντως καὶ τὸν δ, τὸν μιτρώμεσον ὑπὸ τῷ α, κατὰ τὸν ε δ': τῷ παρόντος· μιτρώειτω δὲ ὁ η, τὸν δ, κατὰ τὸν θ, ἀριθμὸν· ὡσα ὁ η, τὸν θ, πολλαπλασιαζών, τὸν μ, ἴσον ἄρα τῆς δ, ποιῶν, ἔσαι ἄρα ὡς ἡμονὰς λ, ἀρὸς τὸν η, ὁ θ, ἀρὸς τὸν μ, ἔπειδ δὲ καὶ ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασ: τὸν ν, πιπτοίκεω, ἴσον τῆς δ, ἔσαι διὰ τῷ αὐτῷ πορῶ: πῆς ε': τῷ ζ': ὡς ἡ μονὰς κ, ἀρὸς τὸν ε, ὁ ζ, ἀρὸς τὸν ν, ἔπειδ δὲ ἔστιν ὡς ἡ κ, μονὰς ἀρὸς τὸν ν, ἕπως ἡ λ, μονὰς ἀρὸς τὸν μ, ἔρα εἰσὶ πῆσaris ἀριθμοὶ, οἱ λ κ ε ζ ν, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος, οἱ λ η θ μ, δι' ἴσου λαμβανόμενοι ἐν τῆ αὐτῆς λόγῳ· διὰ τῷ περισματις γουῶ πῆς ε δ': τῷ ζ': καὶ συνὸ δύο λαμβανόμενοι ἐν τῆ αὐτῆς λόγῳ ἔσονται· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κ, μονὰς ἀρὸς τὸν ε, ἕπως ἡ λ, μονὰς ἀρὸς τὸν η, ἔσαι ἄρα μονάδας περιέχει ὁ ε, πσαύτας καὶ ὁ η, ἴσος ἄρα ὁ ε, τῆς η, ὁ δὲ η, τὸν α, μιτρεῖ, μιτρεῖ πάντως καὶ ὁ ε, τὸν αὐτὸν α· ὅπιρ ε· δεῖ δεῖξαι.

Eucl. lib. 9. Fig. 10.

Πρότασις ΙΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιούν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὡσιν, ὁ δὲ μετὰ τῆν μονάδα πρῶτος ἢ, ὁ μέγιστος ὑπ' ἀριθμὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν ταῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

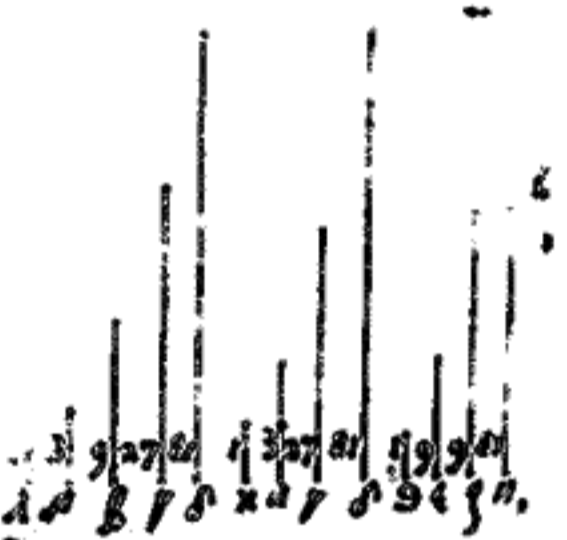
Ἐῶσασα ἤδη ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὶ, οἱ α β γ δ, ὡν ὁ α, ἀρῶτος· Λέγω τὸν δ, ἔσχατον ὑπ' ἀριθμὸς ἄλλου μιτρώειθαι, ἢ τῶν α β γ· εἰ γὰρ μὴ, μιτρώειθαι ὑπὸ τῷ ε, κατὰ τὸν ζ· δείξου· τὰς ἀ: τὸν μὲν ε, μὴ ἀ: εἶναι, καὶ ὑπὸ μόνου τῷ α, μιτρώειθαι· τὸν δὲ ζ, μὴ τὸ ἀρῶτον, μὴτε σὺν τῶν α β γ· εἰ γὰρ ὁ ε, ἀρῶτός ἐστι, μιτρήσει πάντως κατὰ τὸν ἀνωτέρω τὸν α, ἀρῶτων ὄντα, ὅπιρ ἄτοπον· ἄρα σύνθετος, καὶ ὑπὸ μόνου τῷ α, ἀρῶτου μιτρηθήσεται· εἰ γὰρ ὑφ' ἐτέρου μιτρηθήσεται, πάντως ὑπ' ἐκείνου καὶ ὁ δ, ἔτι δὲ καὶ ὁ α, ἀρῶτος ὡν, ὅπιρ ἄτοπον· ὡσαύτως καὶ ὁ ζ, σύνθετός ἐστι· Λέγω δὲ, ὅτι ὁ ζ, ὑδίστις τῶν α β γ, ἔστιν· εἰ γὰρ ὁ ζ, εἰς τῶν α β γ, μιτρεῖ τὸν δ, κατὰ τὸν ε, ἀλλὰ διὰ πῆς ε δ': τῷ παρόντος, δέδεικται, ὅτι ἐν τῆ ποιαύτη ἀναλογίᾳ ὁ ἐλάττων μιτρεῖ τὸν μείζονα, κατὰ τινὰ τῶν ὑπαρχόντων ἐν ταῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς· ἄρα ὁ ζ, ἢ εἰ τις τῶν α β γ· ἔπειδ δὲ ὁ ε, τὸν δ, μιτρεῖ κατὰ τὸν ζ, ὁ ε, ἄρα τὸν ζ, πολλαπλασ: τὸν δ, πιπτοίκεω· ἀλλὰ καὶ ὁ α, τὸν γ, πολ·



πολλαπλασ: τὸν δ, πιποίκεσ, ἄρα κατὰ τὸν ιθ': τὸ ζ': ἔστιν ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν ε, ὁ ζ, ἀρὸς τὸν γ, \* ὁ δὲ α, τὸν ε, μιθεῖ, μιθεῖ ἄρα καὶ ὁ ζ, τὸν γ. μιθεῖται δὲ ὁ ζ, τὸν γ, καὶ τὸν η, ὁ δὲ η, διαιχθίσεται ( ὡς καὶ οἱ ε.ζ, ) μήτε ἀρῶτες εἶναι, μήτε τις τῶν α β, καὶ ὑπὸ μόνου τῷ α, ἀρῶτε μιθεῖσθαι. ἔπει εἶν ὁ ζ, μιθεῖ τὸν γ, καὶ τὸν η, ὁ ζ, ἄρα τὸν η, πολλαπλ. τὸν γ, πιποίκεσ. ἔστιν ἄρα καὶ τὸν ιθ': τὸν εἰρημίνου βιβλίου, ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν ζ, ὁ η, ἀρὸς τὸν β, ὁ δὲ α, τὸν ζ, μιθεῖ, μιθεῖ ἄρα καὶ ὁ η, τὸν β. μιθεῖται δὲ αὐτὸν καὶ τὸν θ. ὡς ἀνωτέρω δὲ δείχομεσ, ὅτι ὁ θ, ἔκ ἔστιν ὁ αὐτὸς τῷ α, ἔπει δὲ ὁ η, τὸν β, μιθεῖ καὶ τὸν θ, ὁ η, ἄρα τὸν θ, πολλαπλασ: τὸν β, πιποίκεσ. ἀλλὰ καὶ ὁ α, εἰαυτὸν πολλαπλασ: καὶ τὸ β'. πόρουμα τῶς ιε': τὸ ζ'. τὸν β, πιποίκεσ. ἄρα κατὰ τὸν κ': τὸ ζ'. ἔστιν ὡς ὁ θ, ἀρὸς τὸν α, ὁ α, ἀρὸς τὸν η, μιθεῖ δὲ ὁ α, τὸν η, μιθεῖ ἄρα καὶ ὁ θ, τὸν α, ἀρῶτεσ ὄντα, ὅπιν ἀππον. ὁ δ, ἄρα ὑπ' ἄλλου τιτὸς εἰ μιθεῖται, πᾶριξ τῶν α β γ, καὶ ταῦτα μετ' κατὰ τὸν Ευκλείδου. *Eucl. Lib. 9. Fig. 11.*

Eucl. Lib. 9. Fig. 11.

Μιθεῖται δὲ παρὰ τῶς α β γ, ἀριθμὸς ὁ ε, τὸν δ, ἀριθμὸν, κατὰ τὸν ζ. Λέγω τὸν ε, μετ' ἀρῶτεσ εἶναι, εἰ γὰρ ἔστιν μιθεῖσθαι τὸν δ, μιθεῖσθαι καὶ τὸν α, ἀρῶτεσ ὄντα, ὅπιν ἀππον. σύνθιτος ἄρα ἔστιν ὁ ε, \* μιθεῖται δὲ ὑπὸ μόνου τῷ α, ἀρῶτεσ ἀριθμῷ. εἰ γὰρ ὑπ' ἐτέρου μιθεῖσθαι, μιθεῖσθίεται πάντως καὶ ὁ δ, ὑπ' ἐαίενου, καὶ ἐπομίτωσ καὶ ὁ α, κατὰ τὸν ιε'. τὸ παρόντωσ, πρῶτωσ ὡν, ὅπιν ἀππον. ἔπει δὲ ὁ ε, ἔκ ἔστιν ὁ αὐτὸς, ὑδενὶ τῶν α γ, μιθεῖται δὲ παρὰ τῷ α, μίλων ἄρα ἔστι τὸ α. Ἐπι δ' αὐθίς ὁ ε, τὸν δ, μιθεῖ καὶ τὸν ζ, τὸν ζ, ἄρα πολ. λαπλασιάζων ὁ ε, τὸν δ, ποιίσει, ποιίτω γουὸ τὸν η, ἴσον τῷ δ. κατὰ τὸ β'. πόρουμα, ἄρα τῶς ιε': τὸ ζ'. ἔστιν ὡς ὁ θ, μονάσ ἀρὸς τὸν ε, ὁ ζ, ἀρὸς τὸν η, ἔπει τὸν δ' διὰ τῷ αὐτῷ εἶτι, ἔπει ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασιάζασ, κατὰ τὸν ια'. τὸ παρόντωσ, τὸν δ, πιποίκεσ. ἔστι πάντωσ ὡς ὁ η, μονάσ ἀρὸς τὸν α, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ἔπει δὲ ὁ η, ἴσὸς ἔστι τῷ δ, δὲ ἴσων ἄρα ἔστιν, ὡς ὁ η, μονάσ πρὸς τὸν α, ἔτωσ ὁ θ, μονάσ πρὸς τὸν η, κατὰ τὸ πόρουμα ἄρα τῶς ιδ'. τὸ ζ'. οἱ κα γ δ, καὶ θ ε ζ η, ἀριθμοὶ σὺν δύο λαμβανόμεσιν ἐσ τῷ αὐτῷ λόγῳ ἴσονται, ἄρα ὡς ὁ η, μονάσ ἀρὸς τὸν α, ἔτωσ ἔστι καὶ ὁ θ, μονάσ ἀρὸς τὸν ε, ὅσα; ἄρα μονάδασ ὁ α, πιλάγει, πσάτωσ καὶ ὁ ε, οἱ α ε, ἄρα ἴσων, δίδηκται δὲ ὁ ε, καὶ μίλων τῷ α, ἀππον ἄρα. εἰ μιθεῖται ἄρα ὁ δ, ὑπ' ἄλλου τιτὸς, πᾶριξ τῶν α β γ, ὅπιν εἶναι δίδηκται.



Πρὸς





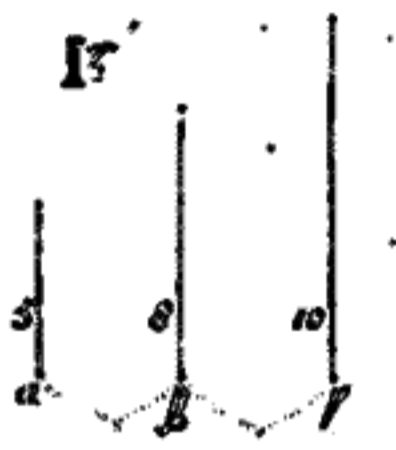
εξ τῆ δε, μὴ τῆ εἰς τῆ δε, εζ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆ εζ, πρῶτός ἐστιν, ὁ δὲ ἀπὸ τῆ δε, εἰς τὸν α, καὶ ὁ εἰς τὸν δε, εζ, ὁ β, ὁ δὲ ἀπὸ τῆ εζ, ὁ γ, οἱ αβ, ἄρα ὁμοῦ πρὸς τὸν γ, πρῶτοί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δευχθήσεται, καὶ πρὸς βγ, πρῶτος εἶναι, πρὸς τὸν α. λείπεται δὲ δεῖξαι καὶ πρὸς α γ, πρὸς τὸν β, πρῶτος εἶναι.

**Πρότασις Ιε': Θεώρημα.**

**Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὡσιν, ἕκ ἕναὶ ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν ἑξῆς, ὅπως ὁ ἑξῆς πρὸς ἄλλου τιμὰ.**

Ἐστωσαν ἔδη δύο πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ, οἱ αβ. λέγω, ὅτι ἕκ ἕνα εἰσὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὅπως ὁ β, πρὸς ἄλλου τιμὰ. εἰ γὰρ διωκτὸν, ἔσω πρὸς τὸν γ. Ἐπεὶ ἔν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὅπως ὁ β, πρὸς τὸν γ, οἱ δὲ αβ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἄρα καὶ τὸν κατὰ τῆ ζ: μῆτις ὁ α, τὸν β, καὶ εἰς πρῶτοι, ὅπερ ἄπει. ἔστω ἄρα δύο ἀριθμοὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

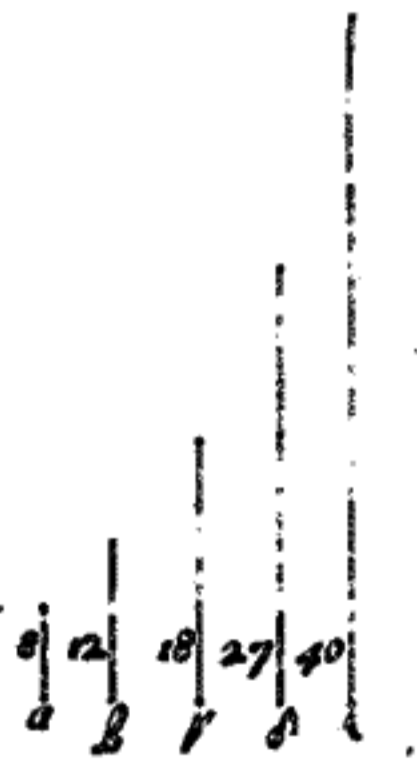
Eucl. lib. 9. Fig. 13.



**Πρότασις ΙΖ': Θεώρημα.**

**Ἐὰν ὡσιν ὁμοεικποτέρῳ ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὡσιν, ἕκ ἕναὶ ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν ἑξῆς, ὅπως ὁ ἑξῆς πρὸς ἄλλου τιμὰ.**

Ἦν ἔδη αβγδ, ἀριθμῶν ἑξῆς ἀνάλογον ὄντων, ἔστωσαν οἱ ἄκροι αὐτῶν αδ, πρῶτοι. λέγω, ὅτι ἕκ ἕνα εἰσὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὅπως ὁ δ, πρὸς ἄλλου τιμὰ, εἰ γὰρ διωκτὸν ἔσω πρὸς τὸν ε. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, καὶ τὸν εγ: ἄρα τῆ ζ: ἔσται καὶ ἑσαλλάξ, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὅπως ὁ β, πρὸς τὸν ε. καὶ ἐπεὶ οἱ αδ, πρῶτοί εἰσι, καὶ τὸν κατὰ τῆ ζ: αὐτῶν, ὁ α, μῆτις τὸν β, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ὅπως ὁ β, πρὸς τὸν γ, μῆτις δὲ ὁ α, τὸν β, μῆτις ἄρα καὶ ὁ β, τὸν γ. καὶ ἰσομεύως μῆτις καὶ ὁ α, τὸν γ. ἐπεὶ δὲ διὰ τὸ ἀνάλογον εἶναι, μῆτις ὁ γ, τὸν δ, τὸν δὲ γ, μῆτις ὁ α, μῆτις ἄρα ὁ α, τὸν δ, μῆτις δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ α, οἱ αδ, ἄρα πρῶτοι ὄντες ὑπὸ τῶ α, μῆτις εἰναι. ὅπερ ἄπει. ἔστω ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.



Πρόσ.

Πρότασις ΙΗ': Πρόβλημα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι εἰ δυνατὸν ἐστίν, αὐταῖς τρίτῳ ἀνάλογον προσδύρειν.

Τῶν α β, ἔδωκε ἀριθμῶν δοθέντων, εἶλον ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσδύρειν. εἰ μὲν οὖν οἱ α β, ἀρῶται ἀπὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ τὴν κ' παρόντος, οὐκ ἔστι αὐταῖς τρίτος ἀνάλογος ἀριθμὸς. εἰδὲ μὴ, πολλαπλασιάσας ὁ β, ἑαυτὸν τὸν γ, ποιήσω, ὁ α, ἄρα ἤτοι μίξει τὸν γ, ἢ ὀμίξει τὸν δ, ἀρῶται κατὰ τὸν δ. ὡς ὁ α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιήσω. ἀλλὰ καὶ ὁ β, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν γ, ποιήσω, ἄρα κατὰ τὴν κ': τὴν ζ' ἔστιν ὡς ὁ α, ἀπὸς τὸν β, ὡς ὁ β, ἀπὸς τὸν δ, ὁ δ, ἄρα τρίτος ἀνάλογός ἐστι πῶς α β. ἀλλὰ μὴ μίξει τὸ α, τὸν γ, λέγω ὅτι ἀδύνατον εἶναι ἀνάλογον πῶς α β, ἀριθμῶν. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ δ, ἐπὶ τὴν ζ' ἔστιν ὡς ὁ α, ἀπὸς τὸν β, ὡς ὁ β, ἀπὸς τὸν δ, ἄρα καὶ τὴν κ': τὴν ζ': τὸ ὑπὸ τῶν ἀκρῶν α δ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β, μίσει. ἀλλ' ὁ γ, ἐστὶν ἀπὸ τῶν β, ἄρα καὶ ὁ α, τὸν δ, πολλαπλασ: τὸν γ, ποιήσω. ὁ α, ἄρα τὸν γ, μίξει καὶ τὸν δ, ἀλλὰ δὲ ὑπόκειται καὶ μὴ μίξειν, ὅπρι ἀποπον, ἄρα ὁ δ, οὐκ ἔστι τρίτος ἀνάλογος πῶς α β. ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.

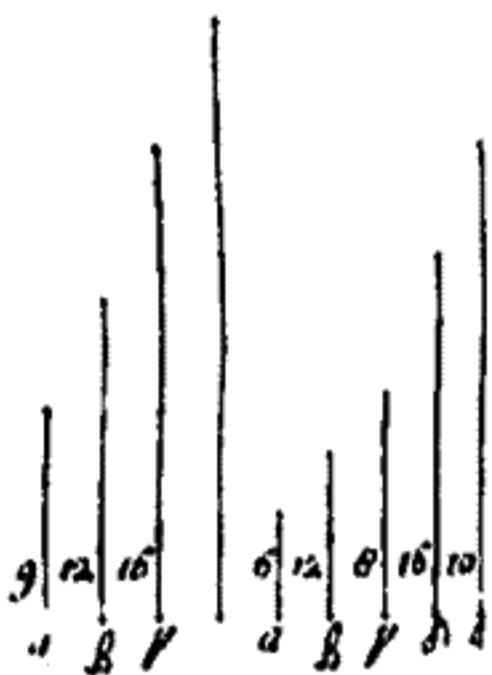
Eucl. Lib. 9. Fig. 14



Πρότασις ΙΘ': Πρόβλημα.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι εἰ δυνατὸν ἐστίν, αὐταῖς τέταρτον ἀνάλογον προσδύρειν.

Τῶν ἔδωκε α β γ, ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκεπίσθαι, εἰ δυνατόν, τέταρτον ἀνάλογον αὐτοῖς ἀριθμῶν. οἱ δὲ α β γ, ἢ καὶ ἕξῃς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ οἱ ἀκροὶ αὐτῶν ἀρῶται ἀπὸς ἀλλήλους, ἢ οὐκ ἀνάλογον μὲν ἕξῃς, οἱ δὲ ἀκροὶ αὐτῶν ἀρῶται, ἢ ἀνάλογον μὲν ἕξῃς, οἱ δὲ ἀκροὶ αὐτῶν ἢ πρῶτοι, ἢ ἕτεροι ἀνάλογον ἕξῃς, ὅτε οἱ ἀκροὶ αὐτῶν πρῶτοι. ὅτι μὲν οὖν τῶν ἕξῃς ἀναλόγων, εἴαν οἱ ἀκροὶ πρῶτοί εἰσιν, ἀδύνατον τέταρτον ἀνάλογον ἀριθμῶν, εἰδείκται διὰ τῆς ἀνωτέρου. εἰ δὲ μὴ ἕξῃς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ οἱ ἀκροὶ αὐτῶν πρῶτοι, δείκνυται, ὅτι καὶ πῶς ἀδύνατον τέταρτον ἀνάλογον ἀριθμῶν, εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ δ, ἔστιν ἄρα ὡς α, ἀπὸς τὸν β, ὡς ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ. γινώσκω δὲ καὶ ὡς ὁ β, ἀπὸς



Ff 2

πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ἔπει δὲ οἱ ἔξῃς ἀριθμοὶ α β γ, καὶ γ δ ε, σὺν δύο λαμβανόμενοι ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶν, ἄρα καὶ τὸν ε δ': πῶς ζ'. καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ἔσσονται. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ γ, πρὸς τὸν ε, εἰ δὲ α γ, πρῶτί εἰσιν. ἄρα καὶ τὸν κ α': πῶς ζ': ὁ α, μῆκεν τὸν γ, μῆκεν δὲ καὶ ἑαυτὸν, οἱ α γ, ἄρα πρῶτοι ὄντες, ὑπὸ πῶ α, ἀριθμοῦ μῆκουται. ὅπιρ ἄπαντες.

Ἄλλα γὰρ δὲ ἔγνωσαν οἱ α β γ, ἔξῃς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν α γ, μὴ πρῶτοι, καὶ πολλαπλασιάσαι ὁ β, τὸν γ, τὸν δ, πειρίτω. λέγω, ὅτι εἰ μὲν ὁ α, τὸν δ, μῆκεν, ἀδύνατον εἶναι πῆκρον ἀνάλογον αὐτοῖς ἀριθμῶναι. μῆκεν γάρ ὁ α, τὸν δ, καὶ τὸν ε, ὡς ὁ α, τὸν ε, πολλαπλασ. τὸν δ, πειρίτω. ἔπει δὲ καὶ ὁ β, τὸν γ, πολλαπλασ. τὸν δ, πειρίτω. ἔστιν ἄρα καὶ τὸν ε δ': πῶς ζ': ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ὁ ε, ἄρα πῆκρῶς εἰσιν ἀνάλογος. εἰ δὲ ὁ α, τὸν δ, εἰ μῆκεν, ἀδύνατον πῆκρον ἀνάλογον ἀριθμῶναι, εἰ γὰρ μὴ, ἔγνω ἔ. ἔπει δὲ ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ἄρα καὶ τὸν κ α' ἴσους εἶναι τῇ ὑπὸ πῶν β γ, ὁ δὲ ὑπὸ πῶν β γ, εἰσὶν ὁ δ, ὁ α, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάσαι τὸν δ, πειρίτω. ὡς ὁ α, μῆκεν τὸν δ, καὶ τὸν ε, ἀλλὰ εἴ καὶ εἰ μῆκεν, ὅπιρ ἄπαντες. διὰ τὴν αὐτὴν διεχθίσαι, ὑπετιθιμείων τῶν α β γ, μὴ ἔξῃς ἀνάλογον, καὶ τῶν α γ, μὴ πρῶτων, ἔτι εἰ μὲν ὁ α, μῆκεν τὸν δ, ἀδύνατον πῆκρον ἀνάλογον ἀριθμῶναι, εἰδὲ μὴ, ἀδύνατον. ὅπιρ ἔ. δὲ δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 18.



Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ πάντες τῶ προτεροτέρῳ πλείους πρῶτων ἀριθμῶν.

Προτιθέμενος ἡδὲ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ α β γ. λέγω, ὅτι πάντες πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί. εἰλήρωθαι γὰρ δια τῶν λ α': πῶς ζ': ὁ ελάχιστος ὑπὸ τῶν α β γ, μῆκεν, καὶ ἔγω ὑπὸ ὁ δ, προτιθέτω δὲ τῇ δ, καὶ μονάδα εἰ δ ζ, ὁ εἰς ε ζ, ἔπει πρῶτός εἰσιν, ἢ συνίθιται, εἰ μὲν εἰς πρῶτες, ἄρα κ' ἴσονται εἰ α β γ, καὶ ε ζ, πρῶτοι ἀριθμοὶ, πλείους τῶν α β γ, προτιθέμενος. εἰ δὲ ὁ ε ζ, συνίθιται εἰς, μῆκεν πῶς ὑπὸ τῶν πρῶτων ἀριθμῶν, καὶ τὸν λ δ': πῶς ζ': μῆκεν δὲ ὑπὸ πῶ ε, λέγω δὲ τὸν ε, μῆκεν τῶν α β γ, τὸν αὐτὸν εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, ἔπει οἱ α β γ, μῆκεν τὸν ε δ, ἄρα καὶ ὁ ε, μῆκεν τὸν ε δ, μῆκεν δὲ καὶ τὸν ε ζ, ἄρα μῆκεν καὶ τὸν δ ζ, μονάδα, ἀριθμὸς εἰς ὁ ε, ὅπιρ ἄπαντες.



ποπον. ἔκ ἔστιν ἄρα ὁ η, ὁ αὐτὸς ἐπὶ πῶν α β γ, καὶ ἐπομένως εὐρίθεται οἱ α β γ η, πρῶτοι ἀριθμοὶ, πλείονες πῶν προπεθέντων. ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

**Πρότασις Κ Α': Θεώρημα.**

**Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὅποσοιῦν σωταθώσιμ, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι.**  
 Σωπηθύπασαν ἤδη ἄρτιοι ἀριθμοὶ, οἱ α β, β γ, γ δ, δ ε. Λέγω τὸν α ε, ἄρτιον εἶναι. ἕκαστος γὰρ πῶν α β, β γ, γ δ, δ ε, ἡμισυ μέρος ἔχει κατὰ τὸν ε': ὅρην τῷ ζ': ἄρα καὶ ὁ α ε, ἀριθμὸς ἡμισυ μέρος ἔχει, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρην, ἄρτιός ἐστι.

**Πρότασις Κ Β': Θεώρημα.**

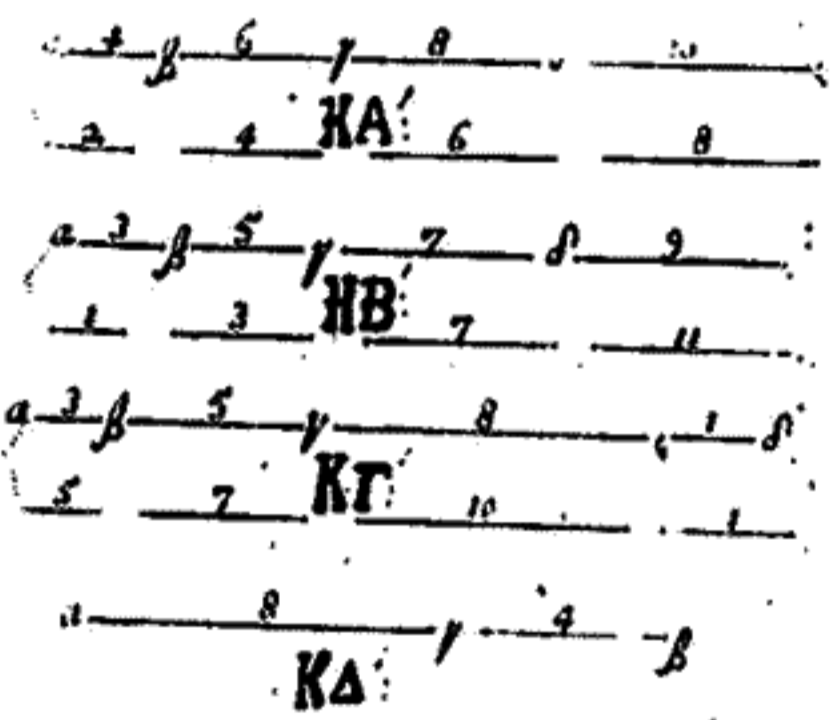
**Ἐὰν περιστοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιῦν σωταθώσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ἢ, ὁλος ἄρτιος ἔσται.**  
 Συγκείθασαν ἤδη περιπλοὶ ἀριθμοὶ, ὧν τὸ πλῆθος ἄρτιον, οἱ α β, β γ, γ δ, δ ε. Λέγω, ὅτι ὁ α ε, σωθιτός ἐστιν. Ἐὰν γὰρ ἀφ' ἑκάστου πῶν εἰρημεσῶν ἀριθμῶν μονὰς ἀφαιρήσῃ, οἱ πάντες ἄρτιοι ἐγκαταλειφθήσονται. ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος πῶν ἀφαιρηθῆσῶν μονάδων ἄρτιον. ἄρα ὁ α ε, ὑπ' ἀρτίων ἀριθμῶν σύγκειται, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρτιός ἐστιν. ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

**Πρότασις Κ Γ': Θεώρημα.**

**Ἐὰν περιστοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιῦν σωταθώσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περιπλοὶ ἢ, καὶ ὁλος περιπλοός ἐσται.**

Συγκείθασαν ἤδη περιπλοὶ ἀριθμοὶ οἱ α β, β γ, γ δ, ὧν τὸ πλῆθος περιπλοόν. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ α δ, περιπλοός ἐστιν. ἀπὸ γὰρ τῶν γ δ, μονάδος ἀφαιρημένης, ἐγκαταλείπεται ὁ γ ε, ἄρτιος, ἔστι δὲ καὶ ὁ α γ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἄρτιος, ὁλος ἄρα ὁ α ε, ἄρτιός ἐστι κατὰ τὴν κατὰ τῆς παρόντος, προσεθιμένης δὲ τῆς ε δ, μονάδος, γενησεται ὁ α δ, περιπλοός. ὅπρι καὶ τῆς.

Eucl. Lib. 9. Fig. 16.



**Πρότασις Κ Δ': Θεώρημα.**

**Ἐὰν ἀπὸ ἄρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρηθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.**  
 Ἀπὸ τῆς α β, ἤδη ἄρτιου ἀριθμοῦ, ἀφαιρέσω ὁ γ β, ἄρτιος. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ α γ, ἄρτιός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ γ β, ἄρτιός ἐστιν, ἔχει πάντως ἡμισυ, ἔχει δὲ ἡμισυ καὶ ὁ α β, ὡς ἄρτιος, ἄρα καὶ ὁ α γ, ἔχει ἡμισυ, τὸ γὰρ πῶν γ β, κατὰ ἡμίσειως τῷ α γ, ἡμισυ ἐστὶ τῷ α β, ὁλος ἄρα ὁ α γ, ἄρτιός ἐστι, κατὰ τὸν ε': ὅρην τῷ ζ': ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

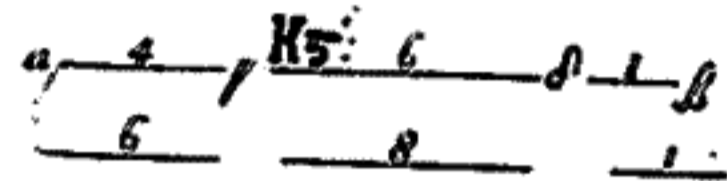
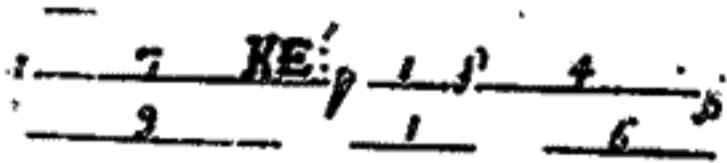


Πρότασις ΚΕ': Θεώρημα.

Εάν από άρτίου περισπός αφαιρεθή, ή ό λοιπός περισπός έξαι.  
 Απο άρτίου ήδη άριθμύ τώ α β, αφαιρέθω ό γ β, περισπός. Λίγω, ότι ή ό α γ, περισπός έξιν. άπό γάρ τώ γ β, μονάδες τής γ δ, αφαιρέσεις, έγκαπ-  
 λείπεται, ό δ β, άρτιος, ή ή τλώ άνωτέρω, ή ή ό α δ, άρτίός έξιν. αφαιρε-  
 μές δέ τής γ δ, μονάδες άπό τώ α δ, άρτίου, έγκαπλείπεται ό α γ, περι-  
 σπός. όπιρ έδει δείξει.  
 Ευκλ. lib. 9. Fig. 17.

Πρότασις Κς': Θεώρημα.  
 Εάν από περισπύ άριθμύ περι-  
 σπός αφαιρεθή, ό λοιπός άρ-  
 τιος έξαι.

Απο περισπύ ήδη άριθμύ τώ α β,  
 αφαιρέθω περισπός ό γ β. Λίγω, ό-  
 ό α γ, άρτίός έξιν. έπει γάρ ό  
 , ή ή γ β, περισπεί έξιν, αφαιρε-  
 μές τής δ β, μον. έγκαπλείπεται ό,  
 π α δ, ή ό γ δ, άρτιος. ή έπομείως  
 ή τλώ κ δ': άρα τώ παρόντες, ή ή ό  
 α γ, άρτίός έξιν, όπιρ έδει δείξει.



Πρότασις ΚΖ': Θεώρημα.

Εάν από περισπύ άριθμύ άρτιος αφαιρεθή, ό λοιπός περισπός έξαι.  
 Απο περισπύ ήδη άριθμύ τώ α β, αφαιρέθω ό γ β, άρτιος. Λίγω, ότι ό  
 α γ, περισπός έξιν. έπει γάρ ό α β, περισπός έξιν, αφαιρεμές τής α δ, μονά-  
 δες, έγκαπλείπεται. ό δ β, άρτιος άριθμός. Αύθις έπει παρ τώ δ β, άρτίου,  
 αφαιρέται ό γ β, άρτιος, ή ή τλώ κ δ': τώ παρόντες, ή ή ό δ γ, άρτίός έξιν, προ-  
 σιδιμείως δέ τής α δ, μονάδες, ό α γ, άριθμός, περισπός γίνεται. όπιρ έδει  
 δείξει.

Πρότασις ΚΗ': Θεώρημα.

Εάν περισπός άριθμός άρτίου πολλαπλασιάσας ποιή τμηα, ό γεμδύμενος  
 άρτιος έξαι.

Περισπός ήδη άριθμός ό α, τόν β, άρτιον πολλαπλασ: ποιεί. Ευκλ. lib. 9. Fig. 18.  
 τώ τόν γ. Λίγω, ότι ό γ, άρτίός έξιν. Επει γάρ ό α, τόν  
 β, πολλαπλασ: τόν γ, παποικεν, ό γ, άρα έκ τούτων ά-  
 ρθμών ίσων τής β, σύγκεται, όσαι μονάδες είσιν έν τής α, ό  
 δέ β, άρτίός έξιν, ή ή ό άπό άρτίων συγκείμενος, άσαύτως  
 άρτίός έξιν, ή ή τλώ κ δ': ό γ, άρα άρτίός έξιν. όπιρ έδει  
 δείξει.



Πρότασις ΚΘ': Θεώρημα.

Εάν περισσότερος αριθμός περισσότερου αριθμού πολλαπλασιάσας ποιή τιμα, ο γεγόμενος περισσότερος ἔσται.

Πλειωτός ἦδη ἀριθμός ὁ α, πλειωτὸν τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιήσω. Λέγω, ὅτι ὁ γ, πλειωτός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πιπoίηκεν. ὁ γ, ἄρα ἐκ πoσούτων ἀριθμῶν ἴσων τῷ β, σύγκειται, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ α, οἱ δὲ αβ, ἀριθμοὶ πλειωτοὶ εἰσιν, ἄρα ὁ γ, σύγκειται ἐκ πλειωτῶν ἀριθμῶν, ὡς τὸ πλῆθος πλειωτὸν, ὁ δὲ ποιῶν πλειωτότης, καὶ τὸν κγ': τῷ παρόντι, ἄρα ὁ γ, ἀριθμὸς πλειωτός ἐστιν. ὅπῃ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 19.

ΚΘ'.



Πρότασις Λ': Θεώρημα.

Εάν περισσότερος αριθμός ἄρτιου αριθμῶν μετρή, καὶ τὸν ἡμισυ αὐτῷ μερήσει.

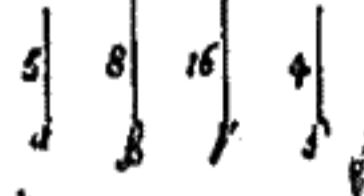
Πλειωτός ἦδη ἀριθμός ὁ α, τὸν ἄρτιον β, ἀριθμὸν μετρήσω. Λέγω, ὅτι ὁ α, καὶ τὸν ἡμισυ τῷ β, μετρήσει. μετρήσει γὰρ ὁ α, τὸν β, καὶ τὸν γ, ὁ δὲ γ, ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω πλειωτός. ἐπεὶ οὖν ὁ α, τὸν β, μετρήσει καὶ τὸν γ, ὁ α, πάσι τὸν γ, πολλαπλασ: τὸν β, πιπoίηκεν. ὁ β, ἄρα σύγκειται ἐκ πoσούτων ἀριθμῶν ἴσων τῷ γ, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ α, οἱ δὲ αγ, πλειωτοὶ εἰσιν. ἄρα σύγκειται ὁ β, ἐκ πλειωτῶν ἀριθμῶν, ὡς τὸ πλῆθος πλειωτὸν. ὡσα καὶ τὸν κγ': τῷ παρόντι, ὁ β, πλειωτός ἐστιν, ἀλλ' ἄρτιος, ἐπεὶ δὲ ὁ α, τὸν β, μετρήσει καὶ τὸν ἄρτιον ἀριθμὸν. μετρήσει ἄρα καὶ τὸν ἡμισυ τῷ β. ὅπῃ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΛΑ': Θεώρημα.

Εάν περισσότερος αριθμός πρὸς τιμα ἀριθμῶν πρώτος ἢ, καὶ πρὸς τὸν διπλασίον αὐτῷ πρώτος ἔσται.

Πλειωτός ἦδη ἀριθμός ὁ α, πρὸς τινα ἀριθμὸν τὸν β, ἁπλῶς ἔστω. Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς τὸν διπλασίον τῷ β, πᾶσι τὸν γ, ἁπλῶς ἐστιν ὁ α. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσει τις αὐτῶν ἀριθμῶν, μετρήσει δὲ τὸν αγ, ὁ δὲ ἐπεὶ δὲ ὁ α, ἁπλῶς ἐστιν, ὁ δὲ πρῶτος ὑπ' ἑδωτός ἀριθμῶν μετρήεται, ἢ ἑαυ-

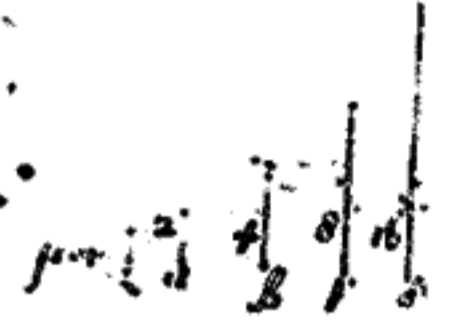


$\alpha$ . ο δ, ἄρα ο αὐτός ἐστι καὶ  $\alpha$ , ὡς ο γ, σύνθετος ὑπὸ ἀνώτερου ἀριθμοῦ τῷ δ, μίξεται, ἄρα καὶ τὸν ἀνωτέρω, καὶ ο τῷ γ, ἡμισυς, δηλ: ο β, ὑπὸ τῷ δ, μίξεται, ο δὲ δ, μίξεται καὶ τὸν α, εἰ αβ, ἄρα εἰσὶ σύνθετοι. ὅπερ ἄνωπον, ὑπετίθεισαν γὰρ ἀνωπὸν. *Euc. lib. 9. Fig. 20.*

**Πρότασις ΑΒ: Θεώρημα.**

**Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἀρτιάκις ἀρτιός ἐστι μόνον.**

Ἀπὸ δυάδος ἦδη τῆς α, διπλασιασθέντων ἐσσιδυσκῶν ἀριθμοὶ εἰ β γ δ. Λέγω, ὅτι εἰ β γ δ, ἀριθμοὶ ἀρτιάκις ἀρτιοὶ εἰσὶ μόνον. ὅτι μὲν οὖν εἰ β γ δ, ἀρτιοὶ εἰσὶ, δῆλον. διότι γὰρ διαίρεται ἑκάστος αὐτῶν, ὡς ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων. ὅτι δὲ καὶ ἀρτιάκις ἀρτιοὶ, διαίρεται. Κεῖθω μὲν δὲ ε, ἔστω ἄρα ὡς ε, μονὰς ἀπὸς τὸν α, ἥτοις ο α, ἀπὸς τὸν β, καὶ καὶ τῷ β: πάλιν τῆς ε: τῷ ζ: ο α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποιήκει. ὡς ο β, μίξεται ὑπὸ τῷ α, ἀρτιὸς καὶ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, καὶ τῷ τῷ ἀρτιῶν ἀριθμῶν, ο δὲ ὑπὸ ἀρτιῶν ἀριθμῶν καὶ ἀρτιῶν μίξεται ἀρτιάκις ἀρτιός ἐστι, ἄρα ο β, ἀρτιάκις ἀρτιός ἐστι. Ἄλλοις ἐπεὶ ο β, διπλασιασθὲν τὸν γ, πεποιήκει, ο α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποιήκει. ὡς ο γ, μίξεται ὑπὸ τῷ α, καὶ τὸν β, εἰ δὲ α β, ἀρτιοὶ εἰσὶ. μίξεται ἄρα ο γ, ὑπὸ ἀρτιῶν ἀριθμῶν καὶ ἀρτιῶν, καὶ ἔστω ἀρτιάκις ἀρτιός, καὶ τὸν ε: ἔστω τῷ ζ: οὕτως καὶ ἐπὶ ἑξῆς συλλογιστέον. ὅτι δὲ καὶ μόνον δῆλον. εἰ γὰρ ἀπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ, τῷ μὴ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένου, διπλασιασθῶσιν, εἰ τὸν μίχθη μονάδες διαίρεσιν διχθένται, ἄρα ἦν ἀρτιάκις ἀρτιοὶ ἴσοιται. ὅπερ εἶδη δεῖξαι.



**Πρότασις ΑΓ: Θεώρημα.**

**Ἐὰν ἀριθμὸς τῶν ἡμισυμ ἔχη περισσὸν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνος.**

Ἀριθμὸς ἦδη ο α, τὸν ἡμισυμ αὐτῷ ἐχίτω περισσόν. Λέγω, ὅτι ἀρτιάκις περισσός ἐστι. Ἐπεὶ γὰρ ο τῷ α, ἡμισυμ περισσός ἐστι, ἄρα ο α, μίξεται ὑπὸ ἀρτιῶν ἀριθμῶν καὶ περισσόν. καὶ καὶ τῷ ε: ὅσον τῷ ζ: ἀρτιάκις περισσός ἐστι. Λέγω δὲ, ὅτι καὶ μόνος. εἰ γὰρ καὶ ἀρτιάκις ἀρτιός ὑποπθῆ, ἄρα ὑπὸ ἀρτιῶν ἀριθμῶν μίξεται ἀρτιός. ὡς καὶ ο ἡμισυμ αὐτῷ, ἀρτιός ἐστι, καὶ διότι διαίρεται, καὶ τὸν ε: τῷ ζ: ο δὲ τῷ α, ἡμισυμ περισσός ὑπετίθει, ἄρα περισσός ὡς διότι διαίρεται, ὅπερ ἄνωπον. εἰ ἄρα καὶ τῷ εξῆς.

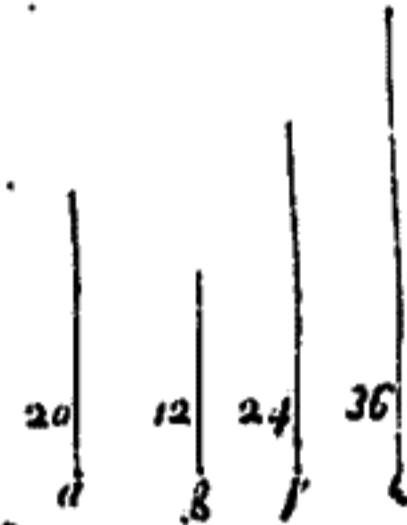


Πρότασις ΛΔ': Θεώρημα.

Εὰν ἄρτιος ἀριθμὸς, μήτε τῷ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένῳ ἢ, μήτε τῷ ἡμισυμ ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Ἔστω ἤδη τοῦτο α. λέγω, ὅτι ὁ α, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. ὅτι μετ' οὗ ἀρτιάκις ἄρτιος, δῆλον, καὶ τὸν ε': ὅρον τῷ ζ': ὁ γὰρ πῶς ἡμισυς εἶναι περισσός, ὡς ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μίϋεται καὶ ἄρτιον. λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. εἰ γὰρ τὸν α, δίχα διέλωμεν, καὶ πῶς τὸν ἡμισυν δίχα, καὶ πῶς αἰ ποιῶμεν, καταστήσομεν πάντας ἐπί τινα περισσὸν ἀριθμὸν μίϋοντα τὸν α, καὶ ἄρτιον. εἰ γὰρ μὴ, καταστήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ α, τῷ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένῳ, πῶς δὲ ἔχῃ ὑπέκεινται. ὁ α, ἄρα καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν ὁμοίως δείκνυνται οἱ β γ ε, ταῦτοι. ὅπρι εἶδη δεῖξαι.

Eucf. Lib. 9. Fig. 21.

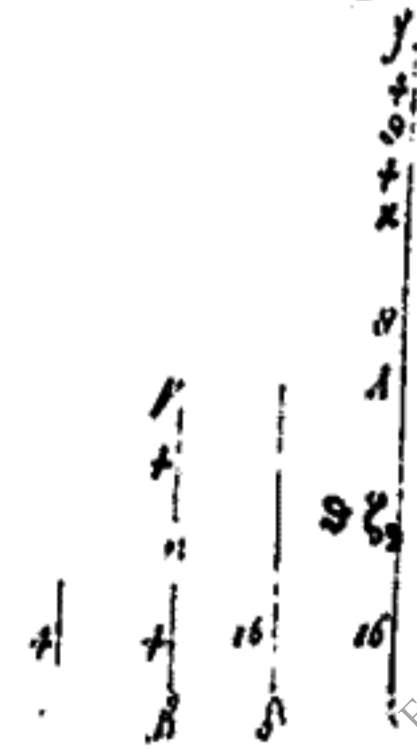


Πρότασις ΛΕ': Θεώρημα.

Εὰν ὄσιν ὁσοειδηποῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἀφαιραθῆ δὲ ἀπὸ τοῦ πῶς δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου ἴσος τῷ πρώτῳ· ἔσται ὡς ἢ τὸ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, ὅπως ἢ τὸ τρίτου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον ἀπαστας.

Ἀριθμοὶ ἤδη ὁσοειδηποῦν ἐξῆς ἀνάλογον ἔσσαν οἱ α, β γ, δ, ε ζ, καὶ ἀφαιρεῖσθαι ἀπὸ π τῷ β γ, δευτέρου καὶ ἀπὸ π ε ζ, τρίτου, ἴσος τῷ α, ἐκείνου τῷ γ η, ζ θ. λέγω, ὅτι ὡς ἢ β η, ὑπεροχὴ ἄρτος τὸν α, ὅπως ἐστὶ καὶ ἢ ε θ, πρὸς τὸν α, β γ, δ. Κείσθω γὰρ τῷ μετ' β γ, ἴσος δ ζ κ, τῷ δὲ δ, ὁ ζ λ. ἐπειὶ οὗτο ὁ ζ κ, ἴσός ἐστι τῷ β γ, ἀφαιρέσασθαι δὲ ἐκ πάντων ἴσοι οἱ ζ θ, γ η, ἄρα καὶ τὸ γ': ἀξίωμα ὁ κ θ, ἴσός ἐστι τῷ β η. ἐπειὶ δὲ οἱ προσκείμενοι ἀριθμοὶ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, ἔσται ἄρα ὡς ὁ ε ζ, ἄρτος τὸν λ ζ, ὅπως ὁ λ ζ, ἄρτος τὸν κ ζ, καὶ ὁ κ ζ, ἄρτος τὸν θ ζ. καὶ τὸν ι ζ: ἄρα τῷ ε': ἔσται καὶ διαίρεσις, ὡς ὁ ε λ, ἄρτος τὸν λ ζ, ὅπως ὁ κ λ, ἄρτος τὸν κ ζ, καὶ ὁ κ θ, ἄρτος τὸν θ ζ. καὶ καὶ τὸν ι β': τῷ αὐτῷ, ὡς εἰς τῷ ἡγεμένῳ ἄρτος ἔσται τῶν ἐπομένων, ὅπως ἔσονται ἀπαστες οἱ ἡγεμένοι ἄρτος ἀπαστας τῶν ἐπομένων. ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ θ, ἄρτος τὸν θ ζ, ὅπως οἱ ε λ, λ κ, κ θ, ἄρτος τῶν λ ζ, κ ζ, θ ζ, οἱ δὲ ε λ, λ κ, κ θ, ἢ τῷ ε ζ, εἰσὶν ὑπεροχὴ, καὶ οἱ λ ζ, κ ζ,

Eucf. Lib. 9. Fig. 23.



GE



Θζ, ίσοι πῖς δ, β γ, α, ἴσι δὲ καὶ ὁ κ θ, καὶ β η, ὁ δὲ θ ζ, καὶ α, ἄρα ὡς ὁ β η, ἀρὸς τὸν α, ὅπως ἴσιν ὁ ε θ, ἀρὸς πῖς δ, β γ, α, ἀπωπας. ὅπιρ ἴδει δάξει.

Πρότασις λς: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὀποσοιῦν ἀριθμοὶ ἕξαι ἐκτεθώσῃ ἐν τῇ διπλασίῳ ἀναλογίᾳ, ἕως ὅ ὁ σύμπαρ συμπεθεὶς πρῶτορ γένηται, καὶ ὁ σύμπαρ ἐπὶ τῷ ἔχοντι πολλαπλασιαθεὶς ποιῆ τιμα. ὁ γεγόμεμορ, τέλος ἔσαι.

Ἐκτεθώσῃ ἴδει ἀπὸ μονάδος ὀποσοιῦν ἀριθμοὶ ἐς διπλασίῳ ἀναλογίᾳ, εἰ α β γ δ, καὶ ὁ εἰς τῶν συμπεθεὶς ἴσιν ὁ ε, ἀρῶπας. ὁ δὲ ε, ἐπὶ τὸν δ, ἔχαπαι πολλαπλασιασθεὶς τὸν ζ, ποιῆτω. Λέγω τῶν πλείον εἶναι. ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ α β γ δ, ὡσῶπαι ἴσῶσῶ ἀπὸ τῆ ε, ἐς διπλασίῳ λόγῳ εἰ ε, κ θ, λ, μ. καὶ τὸν ε δ: ἄρα τῆ ζ: καὶ δ' ἴσῶν ἴσαι ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν δ, ὁ ε, ἀρὸς τὸν μ, καὶ καὶ τὸν ε θ: τῆ αὐτῆ, ὁ ὑπὸ τῶ δ ε, γεγόμεμορ, ἴσός ἴσαι καὶ ὑπὸ τῶ α μ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶ δ ε, ἴσιν ὁ ζ, ἄρα καὶ ὁ α, τὸν μ, πολλαπλ: τὸν ζ, πιποίκεσ. ὁ μ, ἄρα μιτρεῖ τὸν ζ, καὶ πῖς ἐν τῇ α, μονάδαρ. ὁ δὲ α, ἴσιν δυάαρ, ὁ ζ, ἄρα διπλασίῳ ἴσιν τῆ μ, ἴσιν δὲ καὶ οἱ μ, λ, κ θ, ε, ἀλλήλων διπλασίῳ, ἄρα οἱ ε, κ θ, λ, μ, ζ, ἕξαι εἰσιν ἀνάλογον ἐς διπλασίῳ ἀναλογίᾳ. ἀσσυρίθῳ δὲ ἀπὸ τῆ κ θ, καὶ κ ζ, ἕξαιπρερ τῶ θ η, ζ ξ, ἴσαι καὶ ε. δια τῆρ ἀνωπέρῳ, ἄρα ὡς ὁ κ, ὑπὲροχῆ τῆ δ αἰπέρῳ ἀρὸς τὸν ε, ὅπῖς ἴσιν καὶ ὁ ξ η, ὑπὲροχῆ τῆ ἔχοντι ἀρὸς ἀπωπας πῖς ε, κ θ, λ, μ, ὁ δὲ η η, ἴσός ἴσαι καὶ ε, ἄρα καὶ ὁ ξ η, ἴσός ἴσαι πῖς ε, κ θ, λ, μ, ἴσιν δὲ ὁ ζ ξ, ἴσῶν τῆ ε, καὶ ὁ ε, πῖς α, β, γ, δ, καὶ μονάδι, ὅλορ ἄρα ὁ ζ η, ἴσός ἴσαι πῖς μ, λ, κ θ, ε, δ, γ, β, α, καὶ μονάδι, καὶ μιτρεῖται ὑπ' αὐτῶν. Λέγω δὲ, ὅτι ὁ ζ η, ὑπ' ὑδῶδορ ἀλλῶν μιτρεθῆσῶται, πῆριξ τῶ προκειμένῳν καὶ πῖρ μονάδορ. εἰ γάρ δυνατὸν, μιτρεῖτω τὸν ζ η, ὁ ο, μῆδιν τῶν εἰρημέτωρ ὁ αὐτῶρ ὡρ, καὶ πῖρ ἐν τῇ π, μονάδαρ, ὁ ο, ἄρα τὸν π, πολλαπλασιόσῶ τὸν ζ, πιποίκεσ. ἀλλὰ καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλ: τὸν αὐτῶν ζ, πιποίκεσ. ἴσιν ἄρα ὡς ὁ ε, ἀρὸς τὸν π, ὁ ο, ἀρὸς τὸν δ, κατὰ τὸν ε θ: τῆ ζ: ἐπὶ δὲ οἱ α β γ δ, ἀπὸ μονάδορ ἴσιν ἕξαι ἀνάλογον, καὶ ὁ μιτὰ τὸν μονάδα α, ἀρῶπας, ἄρα καὶ τὸν ι γ: τῆ παρῶπας, ὁ δ, ὑπ' ὑδῶδορ ἀλλῶν



μιτρηθήσεται παράξ τῶν α, β, γ, ὁ δὲ ο, ἕκαστος ὁ αὐτὸς εἶδεν ἤδη α β γ, εἰ δὲ ὁ ο, ἄρα τὸν δ, μιτρήσει, ὡς δὲ ὁ ο, ἀρὸς τὸν δ, ἕως εἶεν ὁ ε, ἀρὸς τὸν π, εἶεν ὁ ε, ἄρα τὸν π, μιτρήσει, καὶ ὁ ε, εἶεν ἀρῶτος, ἄρα οἱ ε π, ἀρῶτοι εἴσιν καὶ τὸν λ α: καὶ ζ': καὶ ἐπομένως ἐλάχιστοι καὶ τὸν κ δ': καὶ αὐτῶ. ἔστι δὲ ὡς ὁ ε, ἀρὸς τὸν π, ὁ ο, ἀρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ τὸν κ α: καὶ αὐτῶ ζ': ὁσάκις ὁ ε, τὸν ο, μιτρεῖ, ὁσάκις καὶ ὁ π, τὸν δ, ὁ δὲ δ, ὑπ' εἶδεν ἄλλω μιτρεῖται παράξ ἤδη α β γ, ὁ π, ἄρα ὁ αὐτὸς εἶεν ἐνὶ ἤδη α β γ· ἔστω δὲ τῆ β, καὶ ἄσοι εἴσιν οἱ β γ δ, ποσῶσι ἐλάττωσιν ἀπὸ τῆ ε, οἱ ε, κ θ, λ, εἴσιν δὲ οἱ β γ δ, ἐν τῆ αὐτῆ λόγῳ τῆς ε, κ θ, λ, ἄρα καὶ δὲ ἴσων, ὡς ὁ β, ἀρὸς τὸν δ, ὁ ε, ἀρὸς τὸν λ, καὶ τὸν ε δ': καὶ ζ': ὁ εἰς τῶν β λ, ἄρα ἴσός ἐστι τῆ εἰς τῶν δ ε, ὁ δὲ εἰς τῶν δ ε, ἴσός ἐστι τῆ εἰς τῶν π ο, ἄρα καὶ ὁ εἰς τῶν β λ, ἴσός ἐστι τῆ εἰς τῶν π ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ π, ἀρὸς τὸν β, ὁ λ, ἀρὸς τὸν ο. ὁ δὲ π, ὁ αὐτὸς εἶεν τῆ β, καὶ ὁ λ, ἄρα τῆ ο, ὁ αὐτὸς εἶεν, ὅπρι ἀδύνατον. εἶδεν γὰρ ἤδη α, β, γ, δ, ε, κ θ, λ μ, ὁ ο, ὑπόκειται, ἄρα ὁ ζ, ὑπ' εἶδεν ἄλλω μιτρεῖται, παράξ ἤδη α, β, γ, δ, ε, κ θ, λ, μ. ὅπρι εἶεν δεῖξαι.

Τέλος τῆ ἐνάτης τῶν τῶ Εὐκλείδου Στοιχείων.

