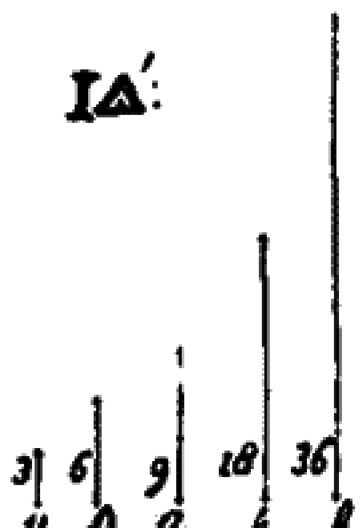
τὴν ιά: τοῦ παρόντος, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστι μεταξὺ τῶν α, β. ἔστω οὗτος ὁ ε, οἱ α ε β, ἄρα καὶ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς, ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους τὸν λόγον τῶν πλευρῶν. ἐπεὶ δὲ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ, μετρήσει πάντως καὶ τὸν ε, κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος. ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ γ, ἄρα τὸν δ, μετρεῖ. ἐπεὶ καὶ ὁ α, τὸν ε, μετρεῖ. μετρείτω δὴ ὁ γ, τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ. ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιά: οἱ α ε β, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τοῦ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ δὲ γ, τὸν δ, μετρεῖ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ α, τὸν ε, καὶ κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, μετρεῖ ὅτι καὶ τὸν β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 8. Fig. 12.

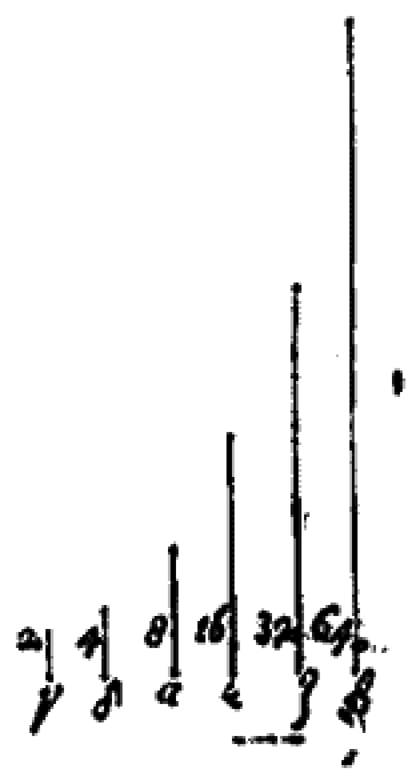
ΙΔ'



Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα:

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Ὁ α, κύβος ἀριθμὸς, οὗ πλευρὰ ὁ γ, μετρείτω τὸν β, κύβον ἀριθμὸν, οὗ πλευρὰ ὁ δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ γ, τὸν δ, μετρεῖ. εἰλήφθωσαν κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος οἱ δύο μέσοι ἀνάλογον ὄντες ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν α β, καὶ ἔστωσαν οὗτοι οἱ ε ζ. δῆλον οὖν κατὰ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς ιβ': ὅτι οἱ α ε ζ β, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τοῦ γ, πρὸς τὸν δ. Ἐπεὶ δὲ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ, μετρήσει πάντως καὶ τὸν ε, κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶν ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ δὲ α, τὸν ε, μετρεῖ, μετρήσει πάντως καὶ ὁ γ, τὸν δ. ὅπερ ἐστὶ τὸ πρῶτον. Μετρείτω δὲ ὁ γ, τὸν δ. Λέγω καὶ τὸν α, μετρεῖν τὸν β. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ οἱ α ε ζ β, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ γ, πρὸς τὸν δ, λόγῳ, ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν ε, ὁ δὲ γ, τὸν δ, μετρεῖ, μετρήσει πάντως καὶ ὁ α, τὸν ε, μετρῶν δὲ ὁ α, τὸν ε, μετρήσει ὅτι καὶ τὸν β, κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις Ιϛ': Θεώρημα.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει. κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Δείκνυται τοῦτο ῥᾳδίως, εἰ γὰρ τετραγώνου ἀριθμοῦ τετράγωνον μὴ μετροῦντος; ὑποτεθῇ δὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρεῖν, συμβήσεται διὰ τῆς ιδ': τοῦ παρόντος, νος, καὶ τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν μετρεῖν, τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν, ὃν οὐκ ἐμέτρει. καὶ πάλιν, εἰ τῆς πλευρᾶς τὴν πλευρὰν μὴ μετρήσεις, δῶμεν τὸν τετράγωνον μετρεῖν τὸν τετράγωνον, συμβήσεται διὰ τῆς αὐτῆς, καὶ τὴν πλευρὰν μετρεῖν τὴν πλευρὰν, ἣν οὐκ ἐμέτρει. ὅπερ ἀδύνατον.

Πρότασις ΙΖʹ: Θεώρημα.

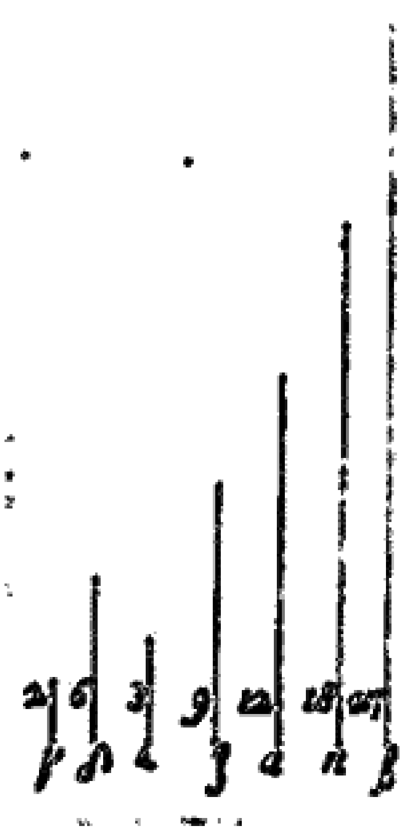
Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει. κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδ᾽ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Καὶ τοῦτο, ὡς καὶ τὸ ἀνώτερον, δείκνυται διὰ τῆς ιϛʹ: οὗ χάριν τὸν λόγον καὶ τούτου οὐκ ἐκτείνομεν, ἵνα μὴ ταυτολογεῖν δόξωμεν.

Πρότασις ΙΗʹ: Θεώρημα.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν ἤδη ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ α β, καὶ τοῦ μὲν α, πλευραὶ οἱ γ δ, ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ β, οἱ ε ζ. Λέγω, ὅτι μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν. ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν η, ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν κατὰ τὸν κα: ὅρον τοῦ ζ: ἐστὶν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα Eucl. lib. 8. Fig. 11.
κατὰ τὴν ιγʹ: τοῦ ζʹ: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶν ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὁ δὲ δ, τοὺς γ ε, πολλαπλασιάσας τοὺς α η, πεποίηκεν, ἄρα κατὰ τὴν ιζʹ: τοῦ ζʹ: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ὁ α, πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα κατὰ τὴν ιαʹ: τοῦ εʹ: καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν η. Αὖθις ἐπεὶ ὁ ε, τοὺς δ ζ, πολλαπλασιάσας τοὺς η β, πεποίηκεν, ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ η, πρὸς τὸν β. ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ α, πρὸς τὸν η. ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν η, οὕτως ἐστὶν ὁ η, πρὸς τὸν β, κατὰ τὴν ιαʹ: τοῦ εʹ: ἄρα μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ὁ η. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, δηλ: ὁ γ, πρὸς τὸν ὁμόλογον, δηλ: τὸν ε, ἢ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. κατὰ γὰρ τὸν ιʹ: ὅρον τοῦ εʹ: ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν η, οὕτως



ἐστὶν ὁ γ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ἢ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. Δύο ἄρα ὁμοίων, κατὰ τὰ ἑξῆς.

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ.

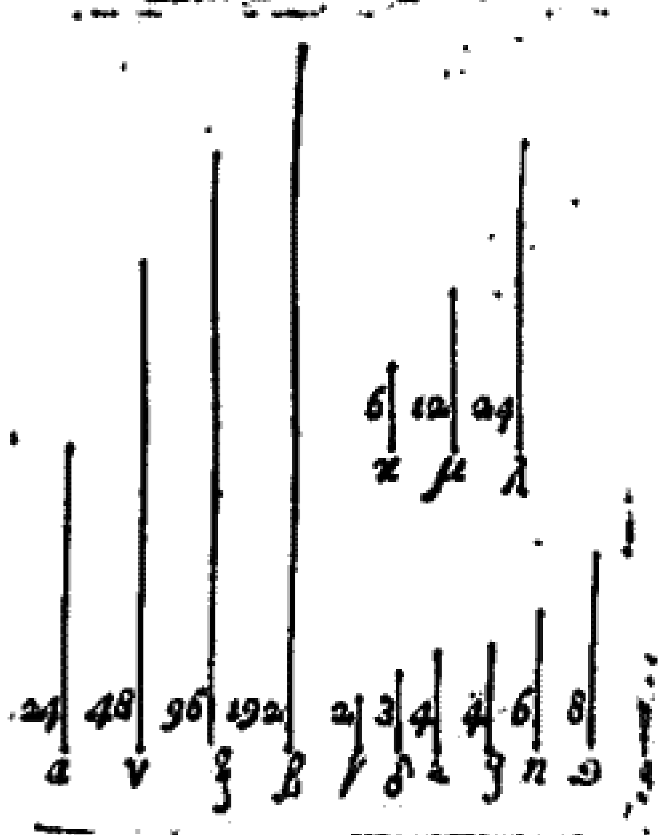
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ μετὰ τοῦ μέσου αὐτῶν ἀναλόγου ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, ἐν τῷ λόγῳ τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.

Πρότασις ΙΘ΄: Θεώρημα.

Δύο ὁμοίων στερεῶν, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν ἤδη ὅμοιοι στερεοὶ οἱ α β, καὶ τοῦ μὲν α, πλευραὶ οἱ γ δ ε, ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ β, οἱ ζ η θ. Λέγω δὴ, ὅτι μεταξὺ τῶν α β, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν θ. ὁ γ, γὰρ τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν κ, ποιείτω, ὁ δὲ ζ, τὸν η, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν λ, ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν οἱ α β, ὅμοιοί εἰσιν, ἄρα κατὰ τὸν κα΄: ὅρον τοῦ ζ΄: ἔστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ζ, πρὸς τὸν η, καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ὁ η, πρὸς τὸν θ, καὶ ἑπομένως διὰ τοῦ αὐτοῦ, οἱ κ λ, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἐν αὐτοῖς. ἔστω δὴ οὗτος ὁ μ, ὃν οἱ ε θ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς ν ξ, ποιείτωσαν. οἱ κ μ λ, ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τοῦ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ τοῦ δ, πρὸς τὸν η. κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω. ἐπεὶ δὲ ἔστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ζ, πρὸς τὸν η. ἄρα καὶ ἐναλλὰξ κατὰ τὴν ιγ΄: τοῦ ζ΄: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὁ δ, πρὸς τὸν η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν η, ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, καὶ ὁ μ, πρὸς τὸν λ. ἄρα οἱ κ μ λ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τοῦ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ε, πρὸς τὸν θ. ἐπεὶ δὲ ὁ ε, τὸν ὑπὸ τῶν γ δ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν, ὑπὸ δὲ τῶν γ δ, ὁ κ, γέγονεν, ὁ ε, ἄρα τὸν κ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν. Ἐπεὶ δὲ καὶ τὸν μ, πολλαπλασιάσας τὸν ν, πεποίηκεν, ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν μ, ὁ α, πρὸς τὸν ν, κατὰ τὴν ιζ΄: τοῦ ζ΄: ὡς δὲ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ. ἄρα καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὁ α, πρὸς τὸν ν. κατὰ δὲ τὴν ιη΄: τοῦ αὐτοῦ, ἐπεὶ οἱ ε, θ, τὸν μ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς ν ξ, πεποιήκασιν. ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, ὡς δὲ ὁ ε,

Eucl. Lib. 8. Fig. 14.



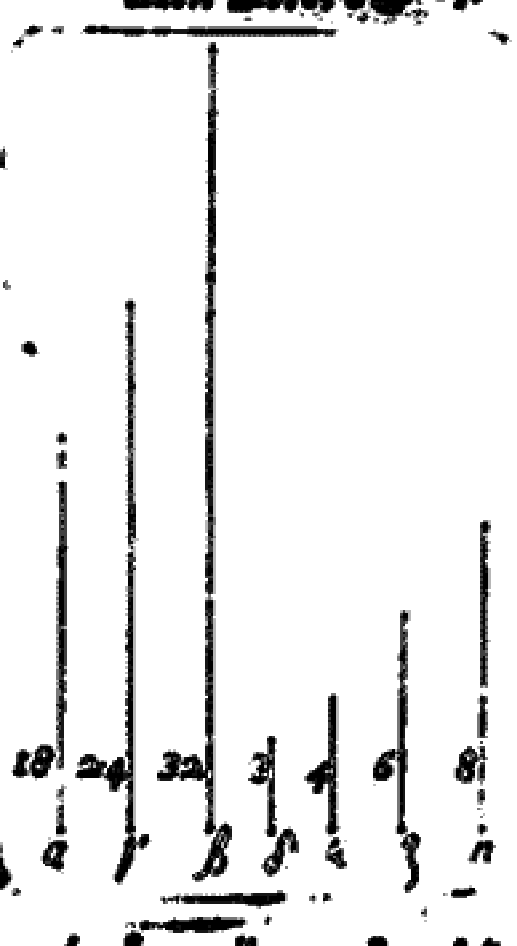
τὸν θ, δέδεικται καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὁ α, πρὸς τὸν ν, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ν, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ. ἔτι ἐπεὶ ὁ θ, τὰς μ λ, πολλαπλασιάσας τὰς ξ β, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ μ, πρὸς τὸν λ, ὁ ξ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ μ, πρὸς τὸν λ, ἔστι καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, καὶ ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν μ, ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ α, πρὸς τὸν ν, καὶ ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, ἄρα αἱ α ν ξ β, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. ἐπεὶ δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔχει τριπλασίονα λόγον, ἤπερ πρὸς τὸν ν, κατὰ τὸν ι α: ὅρον τοῦ ε: ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ν, ἐδείχθη καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν θ. ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν θ. Δύο ὁμοίων ἄρα στερεῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογος ἐμπίπτῃ ἀριθμός, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.

Ἀριθμῶν ἤδη τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογος ἐμπιπτέτω ὁ γ, λέγω τὰς α β, ὁμοίους ἐπιπέδους ἀριθμοὺς εἶναι. Εὑρηθήτωσαν διὰ τῆς λε: τοῦ ζ': οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ β, καὶ ἔστωσαν οἱ δ ε, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς ε, ὁ α, πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν β, οἱ δὲ δ ε, ἄρα κατὰ τὴν κα: τοῦ ζ': ἰσάκις μετροῦσι τὰς α γ, ὁσάκις οὖν ὁ δ, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ζ, ὥστε ὁ δ, τὸν ζ, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ, οἱ δ ζ, ἄρα πλευραί εἰσι τοῦ α, καὶ οἱ ε ζ, τοῦ γ. διὰ τὰ αὐτὰ πάλιν ἐπεὶ οἱ δ ε, ἰσάκις μετροῦσι τὰς γ β, ὁσάκις μετρεῖ ὁ ε, τὸν β, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ η, ὁ ε, ἄρα τὸν η, πολλαπλασιάζων, τὸν β, ποιεῖ, ὥστε οἱ ε η, πλευραί εἰσι τοῦ β, ἐδείχθησαν δὲ καὶ οἱ δ ζ, τοῦ α, οἱ α β, ἄρα ἐπίπεδοί εἰσι. Λέγω δή, ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ οὖν οἱ ζ η, τὸν ε, πολλαπλασιάσαντες τὰς γ β, πεποιήκασιν, ἄρα κατὰ τὴν ιη: τοῦ ζ': ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ὁ γ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἄρα καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν η. καὶ ἐναλλάξ, κατὰ τὴν ιγ': τοῦ ζ': ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὁ ε, πρὸς τὸν η, κατὰ τὸν κα: ὅρον ἄρα τοῦ αὐτοῦ ζ': οἱ α β, εἰσὶν ὅμοιοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 8. Fig. 15.

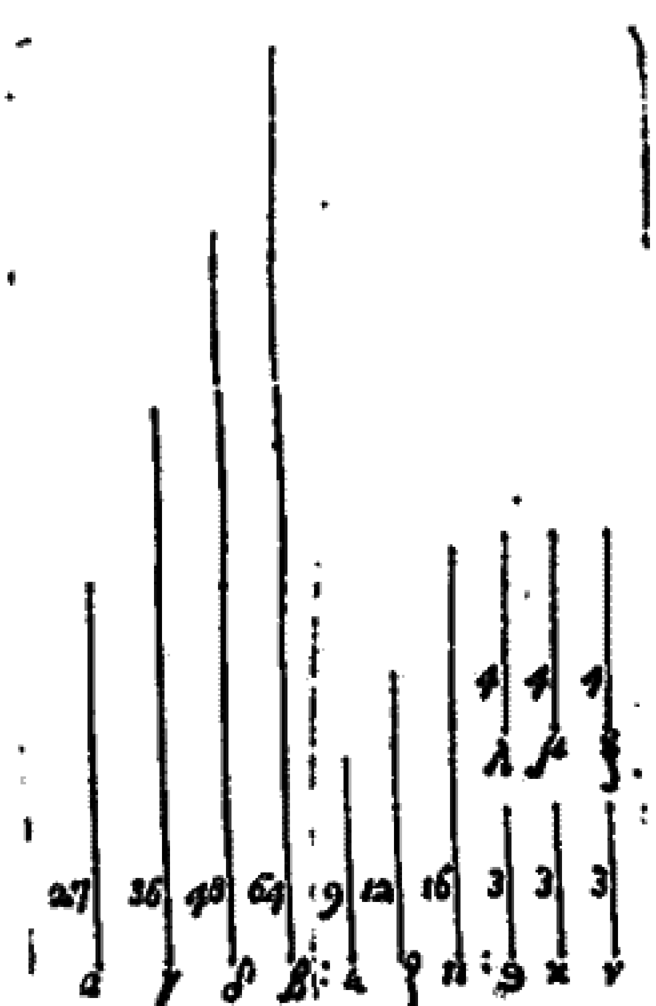


Πρότασις ΚΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοὶ, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν α β, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ, οἱ γ δ. Λέγω τοὺς α β, ὁμοίους στερεοὺς εἶναι. εἰλήφθωσαν γὰρ διὰ τῆς λε': τοῦ ζ': τρεῖς ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ δ β, οἱ ε ζ η, ὥστε διὰ τῆς ανωτέρω οἱ ε ζ η, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. ἔστωσαν οὖν τοῦ μὲν ε, πλευραὶ αἱ θ κ, τοῦ δὲ η, οἱ λ μ. ἐπεὶ δὲ οἱ α γ δ, καὶ ε ζ η, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν η, καὶ τὴν ιδ': τοῦ ζ': οἱ δὲ ε η, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ καὶ τὴν κδ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ διὰ τῆς κγ': τοῦ ζ': ἐλάχιστοι, ἄρα οἱ ε η, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς α δ, καὶ τὴν κα': τοῦ ζ': ὁσάκις δὲ ὁ ε, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ν, ὁ ν, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ. ὁ δὲ ε, ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν θ κ, ὁ ν, ἄρα τὸν ἐκ τῶν θ κ, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ. ὥστε τοῦ α, πλευραί εἰσιν οἱ θ κ ν, ὁ α, ἄρα στερεός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ πάλιν, ἐπεὶ οἱ ε η, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς γ β, ὁσάκις ὁ η, τὸν β, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ξ. ὥστε ὁ ξ, τὸν η, πολλαπλασιάζων τὸν β, ποιεῖ. ὁ δὲ η, ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν λ μ, ἄρα οἱ λ μ ξ, εἰσὶ πλευραὶ τοῦ β, καὶ ὁ β, τοίνυν στερεός ἐστι. Λέγω δὲ, ὅτι οἱ α β, καὶ ὅμοιοί εἰσιν. ἐπεὶ οὖν ὁ ε, μετρεῖ τὸν μὲν α, κατὰ τὰς ἐν τῷ ν, μονάδας, τὸν δὲ γ, κατὰ τὰς ἐν τῷ ξ, οἱ ν ξ, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάσαντες τοὺς α γ, πεποιήκασιν. ὥστε ὡς ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν γ, καὶ τὴν ιη': τοῦ ζ'. τουτέστιν ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ θ, πρὸς τὸν λ, καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ια. τοῦ παρόντος. ἄρα οἱ θ κ ν, πλευραὶ τοῦ α, ἀνάλογοί εἰσιν τοῖς λ μ ξ, πλευραῖς τοῦ β, οἱ α β, ἄρα καὶ τὸν κα. ὅρον τοῦ ζ'. ὅμοιοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 8. Fig. 16.



Πρότασις ΚΒ′: Θεώρημα.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ τρίτος, τετράγωνος ἔσται.

Ἐπὶ τῆς κ′: προτάσεως τοῦ παρόντος, ἐπεὶ οἱ α γ β, ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ α β, ἀριθμοὶ, ὅμοιοι ἐδείχθησαν εἶναι, εἰ οὖν ὁ α, τετράγωνος ὑποτεθῇ, καὶ ὁ β, πάντως τετράγωνος ἔσται. εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἔσονται ὅμοιοι.

Πρότασις ΚΓ′: Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.

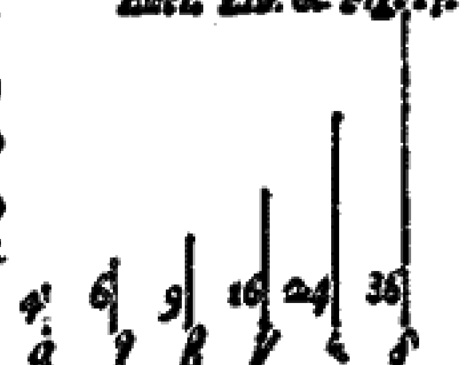
Ἐπὶ τῆς κα′: δέδεικται, ὅτι μεταξὺ τῶν α β, ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσι δηλ: οἱ γ δ, τοὺς α β, ὁμοίους εἶναι, εἰ οὖν ὁ α, κύβος ὑποτεθῇ, καὶ ὁ β, ὡσαύτως κύβος ἔσται. τοὐναντίον δὲ οὐκ ἔσονται ὅμοιοι.

Πρότασις ΚΔ′: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, ἐχέτω λόγον πρὸς τὸν β, ὃν ὁ γ, τετράγωνος πρὸς τὸν δ, τετράγωνον. ἔστω δὲ καὶ ὁ α, τετράγωνος. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ γ δ, τετράγωνοί εἰσιν, ἄρα καὶ ὅμοιοι, καὶ κατὰ τὴν ιά: τοῦ παρόντος, μεταξὺ αὐτῶν εἷς μέσος ἀνάλογος ἐμπίπτει, καθάπερ ὁ ε, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἐστὶ καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογος ἐμπίπτει, ὥσπερ ὁ ζ, ὥστε οἱ α ζ β, ἀνάλογόν εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ὁ α, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστι, κατὰ τὴν κ′: τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 8. Fig. 17.



Πρότασις ΚΕ′: Θεώρημα.

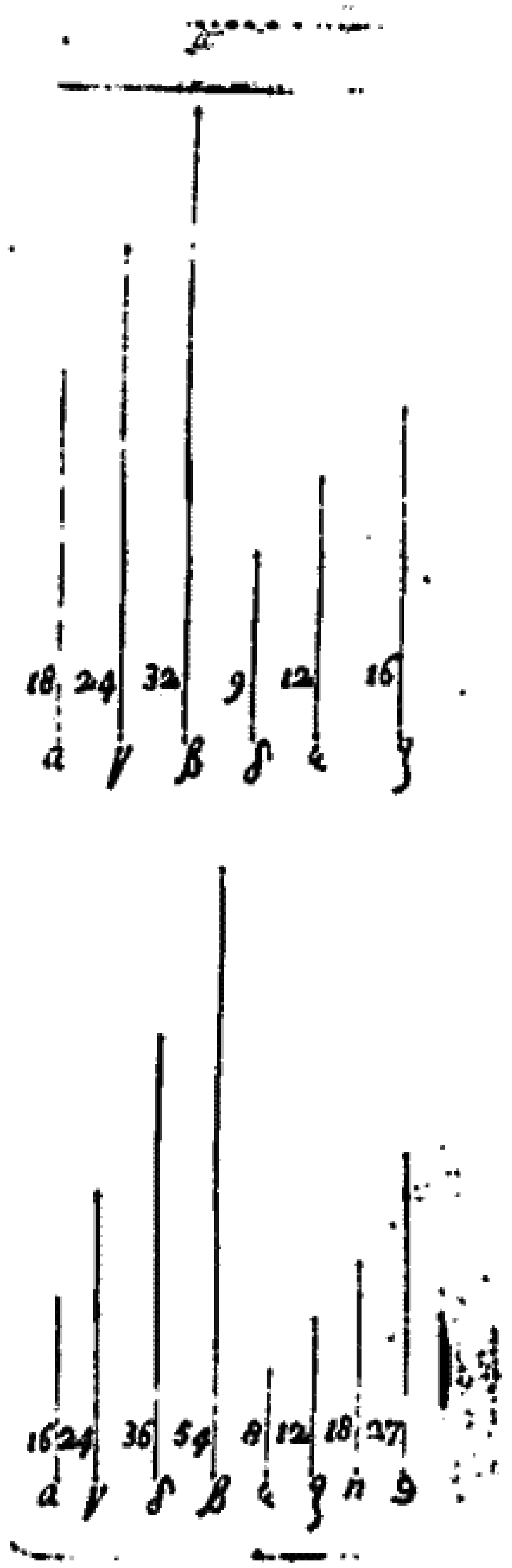
Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Ὁ α, ἤδη ἀριθμὸς ἐχέτω πρὸς τὸν β, ἀριθμὸν λόγον, ὃν ἔχει ὁ γ, κύβος, πρὸς τὸν δ, κύβον. ἔστω δὲ καὶ ὁ α, κύβος. Λέγω καὶ τὸν β, κύβον εἶναι, οἱ γ δ, γὰρ κύβοι ἀριθμοὶ ὅμοιοι, στερεοί εἰσι, καὶ μεταξὺ αὐτῶν

δύο

δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσι, κατὰ τὴν ιθ′: τοῦ παρόντος, ὥσπερ οἱ εζ. ἐπεὶ δὲ ἐστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ α, πρὸς τὸν β, μεταξὺ ἄρα καὶ τῶν αβ, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν, ὡς οἱ ηθ, ἄρα οἱ αηθβ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ὁ δὲ α, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ β, κατὰ τὴν κγ′: τοῦ παρόντος, κύβος ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 8. Fig. 18.



Πρότασις Κϛ′: Θεώρημα.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Τοὺς α, β, ἤδη ὁμοίους ἀριθμοὺς, λέγω, λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, μεταξὺ γὰρ τῶν αβ, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριθμὸς, κατὰ τὴν ιη′: τοῦ παρόντος, ἔστω οὗτος ὁ γ. καὶ εὑρηθήτωσαν διὰ τῆς λε′: τοῦ ζ′: οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς αγβ, καὶ ἔστωσαν οὗτοι οἱ δεζ, οἱ δζ, ἄρα κατὰ τὸ α′: πόρισμα τῆς β′: τοῦ παρόντος, εἰσὶ τετράγωνοι, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ τὴν ιζ′: τοῦ ζ′: ἄρα οἱ αβ, λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΖ′: Θεώρημα.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Τοὺς αβ, ἤδη ὁμοίους στερεοὺς λέγω, καὶ τὰ ἑξῆς. καὶ γὰρ κατὰ τὴν ιθ′: τοῦ παρόντος μεταξὺ αὐτῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, ὡς οἱ γδ. διὰ δὲ τῆς λε′: τοῦ ζ′: εὑρεθέντων τῶν ἐλαχίστων ἀριθμῶν τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς αγδβ, (οἵτινες ἔστωσαν οἱ εζηθ,) οἱ εθ, κύβοι εἰσὶ κατὰ τὸ α′: πόρισμα τῆς β′: τοῦ παρόντος. ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ ζ′: ἄρα οἱ αβ, λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς, πρὸς κύβον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ Ὀγδόου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Ε′ Ρ.

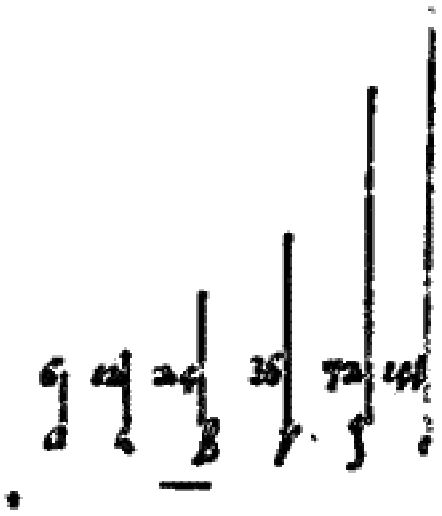
ΕʼΡΜΗΝΕΙʼΑ ΤΩʼΝ ΠΡΟΤΑʼΣΕΩΝ ΤΟΥ͂ ἘΝΝΑʼΤΟΥ ΒΙΒΛΙʼΟΥ ΤΩ͂Ν ΤΟΥ͂ ΕΥʼΚΛΕΙʼΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙʼΩΝ.

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

Ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔστω ἀριθμοὶ οἱ α β, πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν δ, ποιείτωσαν, ὃν λέγω τετράγωνον εἶναι. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω, ὁ γ, τοίνυν τετράγωνός ἐστι κατὰ τὸν ιη': ὅρον τοῦ ζ': καὶ ἐπεὶ ὁ α, ἑαυτὸν καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας τοὺς γ δ, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ζ': ἐπεὶ δὲ οἱ α β, ὅμοιοί εἰσι, κατὰ τὴν ιη': ἄρα τοῦ η': εἷς μέσος ἀνάλογος τούτων ἐστίν. Ἐπεὶ δὲ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν γ δ, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν. ἔστω δὲ ὁ ζ, οἱ γ ζ δ, ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ἐπεὶ δὲ ὁ γ, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ δ, τετράγωνος ἔσται. κατὰ τὴν κβ': τοῦ η': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 1.



Πρότασις Β': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον· ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν.

Ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος οἱ α β, ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν δ, ποιείτωσαν τετράγωνον ἀριθμόν. Λέγω τοὺς α, β, ὁμοίους εἶναι ἐπιπέδους· ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω. καὶ ὁ γ, ἄρα τετράγωνός ἐστι, κατὰ τὸν ιη': ὅρον τοῦ ζ': ἐπεὶ δὲ ὁ αὐτὸς α, καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ἄρα κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ζ': ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ.

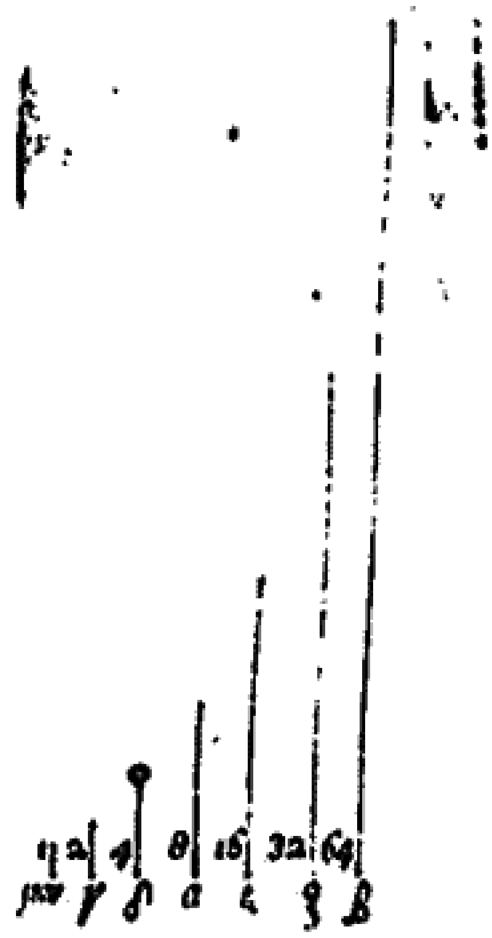
τὸν δ. ἐπεὶ δὲ οἱ γ, καὶ δ, τετράγωνοί εἰσιν, ἄρα καὶ ὅμοιοι. κατὰ τὴν ιη': τοῦ η': εἷς μέσος ἀνάλογος τούτων ἐστὶν, ὥσπερ ὁ ζ. ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἐστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν, ἔστω δὲ ὁ ε. κατὰ τὴν κ': ἄρα τοῦ η': οἱ α β, ὅμοιοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, ποιείτω. Λέγω δὴ τὸν β, κύβον εἶναι. Ἔστω γὰρ ὁ γ, ἡ τοῦ α, πλευρὰ, καὶ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. δῆλον τοίνυν ὡς ὁ γ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκε. ἐπεὶ δὲ ὁ γ, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκε, κατὰ τὸ β': ἄρα πόρισμα τῆς ις': τοῦ ζ': ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ αὐτὸς γ, πρὸς τὸν δ. Αὖθις ἐπεὶ ὁ γ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκε, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἄρα πορίσματος, ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν α, ὡς δὲ ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, δέδεικται καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα κατὰ τὴν ια': τοῦ ε': ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν α, μεταξὺ ἄρα μονάδος καὶ α, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, οἱ γ δ. Πάλιν ἐπεὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκεν, ἄρα κατὰ τὸ προῤῥηθὲν πόρισμα, ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν β, μεταξὺ δὲ μονάδος καὶ α, δύο ἑξῆς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, ἄρα καὶ μεταξὺ τοῦ α, καὶ β, δύο ἐμπεσοῦνται ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐμπιπτέτωσαν οἱ ε ζ. ἐπεὶ δὲ ὁ α, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ β, κύβος ἐστὶ, κατὰ τὴν κγ': τοῦ η': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

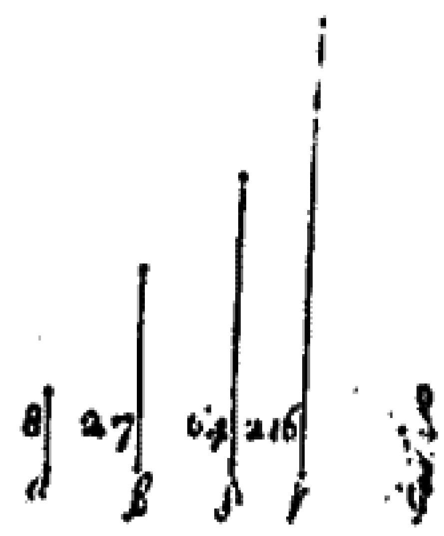
Eucl. Lib.9. Fig. 2:



Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, κύβον ἀριθμὸν τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ γ, κύβος ἐστίν. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω, ὁ δ, ἄρα κύβος ἐστὶ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἐπεὶ δὲ ὁ α, ἑαυτὸν καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας, τοὺς δ γ, πεποίηκε. ἔστιν



ἄρα κατὰ τὴν ιζ´: τοῦ ζ´: ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν γ, τῶν δὲ α β, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, κατὰ τὴν ιθ´: τοῦ η´: ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν δ γ, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν. οἱ δ γ, ἄρα ὅμοιοι στερεοί εἰσι κατὰ τὸν κα´: τοῦ η´: ἐπεὶ δὲ ὁ δ, κύβος ἐστίν, ἄρα καὶ ὁ γ, κύβος ὁμοίως ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

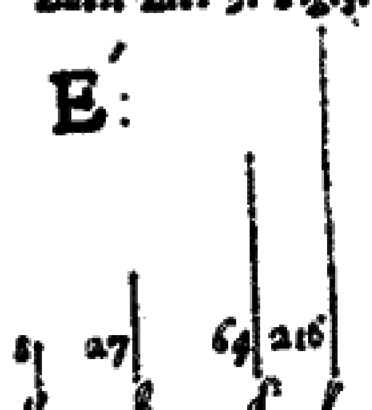
Πρότασις Ε´: Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς, ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται.

Ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος ὁ α, κύβος ἀριθμὸς τὸν β, ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας, τὸν γ, κύβον ποιείτω. Λέγω καὶ τὸν β, κύβον εἶναι. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. ὃς κύβος ἐστὶ κατὰ τὴν γ´: τοῦ παρόντος. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ γ, κύβος ἐστίν, ἄρα οἱ δ γ, ὅμοιοι στερεοί εἰσι. καὶ κατὰ τὴν ιθ´: τοῦ η´ δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν αὐτοῖς. ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν γ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ τὴν ιζ´: τοῦ ζ´: (ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας τοὺς δ γ, πεποίηκε.) ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν α β, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ α, κύβος ἐστὶ, καὶ ὁ β, ἄρα κύβος ἔσται, κατὰ τὴν κγ´: τοῦ η´: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 3.

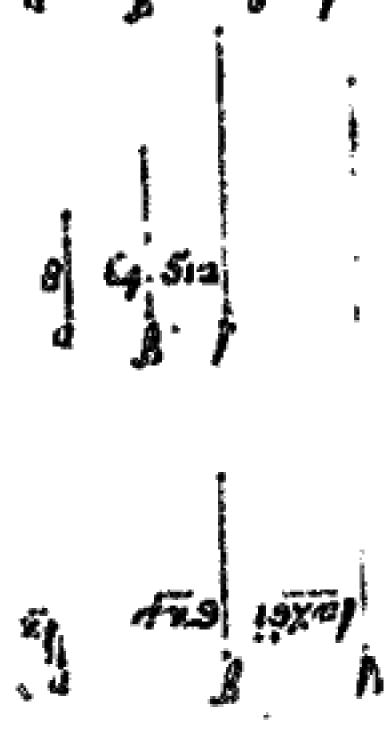
Ε´:



Πρότασις ς´: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, κύβον ποιείτω. Λέγω δὲ καὶ τὸν α, κύβον εἶναι. ὁ γὰρ α, τὸν β, πολλαπλασ: τὸν γ, ποιείτω. ἐπεὶ τοίνυν ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκε, τὸν δὲ β, ὡσαύτως πολλαπλασ: τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ γ, πάντως κύβος ἐστὶ, κατὰ τὸν ιθ´: ὅρον τοῦ ζ´: ἔστι δὲ καὶ ὁ β, κύβος, ὅμοιοι ἄρα εἰσὶ στερεοὶ οἱ β γ, καὶ δύο αὐτῶν μέσοι ἀνάλογόν εἰσι, κατὰ τὴν ιθ´: τοῦ η´: ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ τὴν ιζ´: τοῦ ζ´: ὁ γὰρ α, ἑαυτόν τε καὶ τὸν β, πολλαπλασ: τοὺς β, γ, πεποίηκε, ἄρα καὶ τῶν α β, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, ὁ δὲ β, κύβος, ἄρα καὶ ὁ α, ὡσαύτως κύβος ἐστὶ, κατὰ τὴν κγ´: τοῦ η´: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



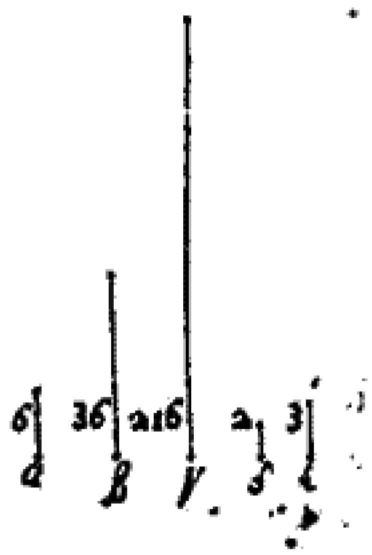
Πρό-

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.

Eucl. Lib. 9. Fig. 4.

Σύνθετος ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, ποιείτω, ὃν λέγω στερεὸν εἶναι. ὁ γὰρ β, τὸν α, πολλαπλασ: τὸν γ, ποιείτω· καὶ ἐπεὶ ὁ α, σύνθετός ἐστιν, ἄρα ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρεῖται, κατὰ τὸν ιγ': ὅρον τοῦ ζ': μετρείσθω ὑπὸ τοῦ δ, καὶ ὁσάκις ὁ δ, τὸν αὐτὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε, ὁ δ, ἄρα τὸν ε, πολλαπλ: τὸν α, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ β, τὸν α, πολλαπλασ: τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ γ, ἄρα ὑπὸ τριῶν ἀριθμῶν, τῶν δ ε β, ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντων, γίγονε· κατὰ τὸν ιζ': τοίνυν ὅρον τοῦ ζ': στερεός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

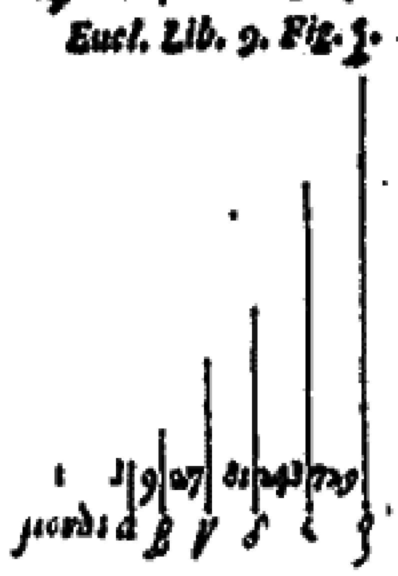


Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος, καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες

Ἀριθμῶν ἤδη τῶν α β γ δ ε ζ, ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὄντων· Λέγω τὸν μὲν β, τρίτον ἀπὸ μονάδος τετράγωνον εἶναι, καὶ πάντας τοὺς ἕνα διαλείποντας, ὥσπερ οἱ δ, ζ. τὸν δὲ γ, κύβον, καὶ πάντας τοὺς δύο διαλείποντας, ὥσπερ ὁ ζ, καὶ οἱ ὅμοιοι, τὸν ζ': δὲ ζ, κύβον ἅμα καὶ τετράγωνον εἶναι, καὶ πάντας ἔτι τοὺς πέντε διαλείποντας. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ α, ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ιε': τοῦ ζ': ὁ β, ἄρα τετράγωνός ἐστιν, οἱ δὲ β γ δ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ δ, τετράγωνός ἐστι, κατὰ τὴν κβ': τοῦ η': διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ ζ, τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἑξῆς ἕνα διαλείποντες. Αὖθις ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ, κατὰ τὸ εἰρημένον πόρισμα, ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ δὲ β, τετράγωνος δέδεικται, καὶ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ α, ὁ γ, ἄρα κύβος ἐστίν. ἐπεὶ δὲ οἱ γ δ ε ζ, ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ γ, κύβος ἐστίν, ἄρα καὶ κατὰ τὴν κγ': τοῦ η': καὶ ὁ ζ, κύβος ἐστίν. ἐδείχθη δὲ

Eucl. Lib. 9. Fig. 5.



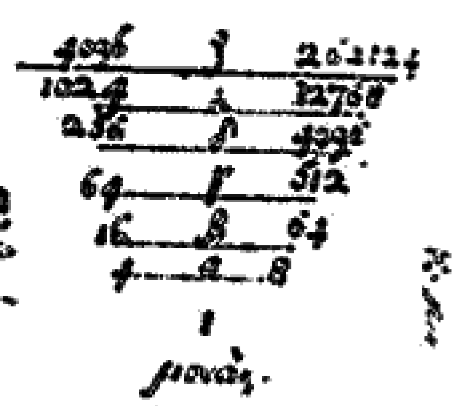
καὶ τετράγωνος. καί ἐστιν ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ὁ ζ, ἄρα κύβος ἅμα καὶ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δείξομεν καὶ τοὺς ἑξῆς δύο διαλείποντας, κύβους εἶναι πάντας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται, καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἔστωσαν ἤδη ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ α β γ δ ε ζ, ὧν ὁ α, πρῶτος, τετράγωνος. Λέγω καὶ τοὺς λοιποὺς τετραγώνους εἶναι. ὅτι μὲν οὖν ὁ β, καὶ πάντες οἱ ἕνα διαλείποντες τετράγωνοί εἰσι, δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω. ἐπεὶ δὲ οἱ α β γ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ α, τετράγωνος, καὶ ὁ γ, ἄρα τετράγωνός ἐστι, κατὰ τὴν κβ': τοῦ η: ὡσαύτως διὰ τῆς αὐτῆς, ἐπεὶ οἱ β γ δ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ὁ β, τετράγωνος, ἄρα καὶ ὁ δ, τετράγωνός ἐστιν, οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. Ἔστω δὲ ὁ α, κύβος. Λέγω καὶ τοὺς ἑξῆς πάντας κύβους εἶναι. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ αὐτὸς α, πρὸς τὸν β, ὁ α, ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ιϛ': τοῦ ζ': καὶ ἐπεὶ ὁ α, κύβος ἐστὶ, καὶ ὁ β, πάντως ὡσαύτως κύβος ἐστὶ, κατὰ τὸ γ': τοῦ παρόντος. ὅτι δὲ καὶ ὁ γ, καὶ πάντες οἱ δύο διαλείποντες κύβοι εἰσὶ, δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω, ἄρα οἱ α β γ, ἑξῆς ἀριθμοὶ, κύβοι εἰσίν. ὧν προαποδεδειγμένων, ὑπολοίπως τῆς ἀποδείξεως ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς ἀρχόμεθα. ἐπεὶ δὲ οἱ α β γ δ, ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ α, κύβος, καὶ ὁ δ, πάντως κύβος ἐστὶ κατὰ τὸ κγ': τοῦ η: ὁμοίως δείξομεν καὶ τὸν ε, κύβον εἶναι, ἀπὸ τοῦ β, ἀρχόμενοι, οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 9. Fig. 6.



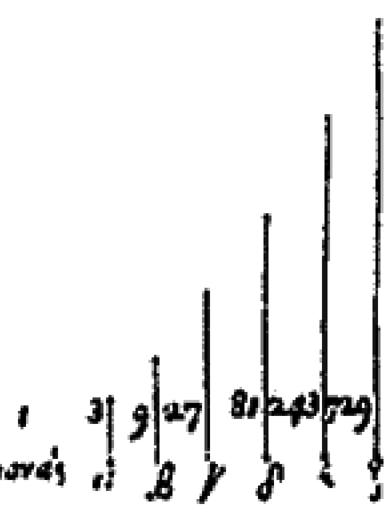
Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων πάντων, καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Ἔστωσαν ἤδη ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ α β γ δ ε ζ, καὶ ὁ μετὰ τὴν

μεμονάδα α, μὴ ἔσω τετράγωνος. Λέγω οὐδένα ἄλλον τετράγωνον εἶναι, χωρὶς τοῦ τρίτου, καὶ τῶν ἑξῆς. εἰ γὰρ μὴ, ἔσω ὁ γ, τετράγωνος, ἔστι δὲ καὶ ὁ β, τετράγ: κατὰ τὸ η': τοῦ παρόντος, οἱ β γ, ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν, ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ οἱ α β, ἄρα ὅμοιοί εἰσιν, ὁ δὲ β, τετρά-γωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ α, τετράγωνος, ὅπερ ἄτοπον. ὑπε-τέθη γὰρ μὴ τοιοῦτος, οὔθ᾽ ὁ γ, ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Αὖθις ἐπεὶ μεταξὺ τῶν γ ε, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ὁ δ, οἱ γ ε, ἄρα ὅμοιοί εἰσι, κατὰ τὸ κ': τοῦ η': ὁ δὲ γ, οὐκ ἔστι τετράγωνος, ἄρα οὔθ᾽ ὁ ε, τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δείξομεν καὶ περὶ τῶν λοιπῶν. Μὴ ἔσω δὲ οὐδὲ κύβος ὁ α. Λέγω μὴ δὲ ἄλλον τινὰ κύβον εἶναι, χωρὶς τοῦ τε-τάρτου ἀπὸ μονάδος, καὶ τῶν δύο διαλειπόντων. εἰ γὰρ μὴ, ἔσω ὁ β, κύβος. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ αὐτὸς α, πρὸς τὸν β, ἄρα ὁ α, ἑαυτὸν πολλα-πλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ιϛ': τοῦ ζ': ὁ δὲ β, κύ-βος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ α, κατὰ τὸν ϛ': τοῦ παρόντος, κύβος ἐστὶν, ὅπερ οὐχ ὑποτίθε-ται, ἄρα οὔθ᾽ ὁ β, κύβος ἐστίν. ἐπεὶ δὲ μεταξὺ τῶν α δ, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν οἱ β γ, ἄρα κατὰ τὸν κα': τοῦ η': οἱ α δ, ὅμοιοί εἰσιν, ὁ δὲ α, μὴ κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ δ, μὴ κύβος ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείξομεν καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 7.



Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν οὖν ἀπὸ μονάδος τῆς α, ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ β γ δ ε. Λέγω τὸν ἐλάττονα β, μετρεῖν τὸν μείζονα αὐτοῦ γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ α, μονὰς πρὸς τὸν β, ὁ β, πρὸς τὸν γ, ἄρα ἰσάκις ἡ α, μονὰς τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ β, τὸν γ, ἡ δὲ μονὰς τὸν β, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας, καὶ ὁ β, ἄρα τὸν γ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸν γ, τὸν δ, μετρεῖν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ γ, τὸν δ. ἡ δὲ μονὰς τὸν β, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἄρα καὶ ὁ γ, τὸν δ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας. οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς. ὥστε πάντες οἱ μετὰ τὸν β, ἀριθμὸν, μετροῦσιν ἕκαστος τὸν μεθ᾽ ἑαυτὸν κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας. ὁ β, ἄρα τῶν μετρουμένων πάντων ἀριθμῶν ὁμώνυ-

Eucl. lib. 9. Fig. 8.

μον

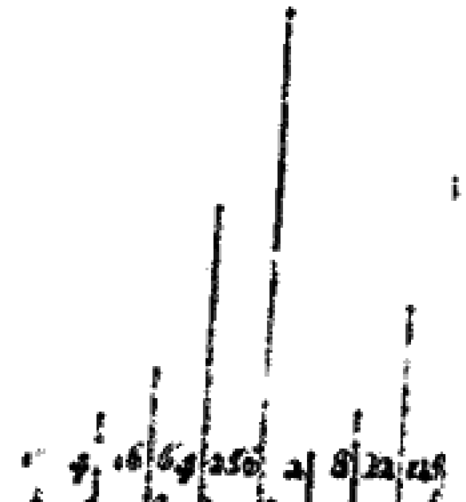
μον μέρος ἐστὶ τοῖς μείζοσι, κατὰ τὸν γ΄: ὅρον τοῦ ζ΄: κατὰ δὲ τὸν λθ΄: τοῦ αὐτοῦ, ὁ β, ἀριθμὸς πάντας τοὺς μεθ' ἑαυτὸν μετρεῖ, κατὰ τὸν ὁμώνυμον αὐτῷ ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὑφ' ὅσων ἂν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρεῖται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.

Ἔστωσαν ἤδη ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὶ ἀπὸ τῆς λ, μονάδος οἱ α β γ δ, καὶ ὁ ἔσχατος δ, ἀριθμὸς μετρείσθω ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, παρ: χάρ: τοῦ ε. Λέγω δὲ καὶ τὸν παρὰ τὴν λ, μονάδα α, ὑπὸ τούτου μετρεῖσθαι. εἰ γὰρ μή, οἱ α ε, ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, κατὰ τὸν ιβ΄: ὅρον τοῦ ζ΄: ἐπεὶ δὲ ὁ ε, τὸν δ, μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν ζ, ὥστε ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ α, μετρεῖ τὸν δ, κατὰ τὸν ὁμώνυμον αὐτῷ ἀριθμόν, ὡς διὰ τῆς ἀνωτέρω δῆλον. ὁμώνυμος δὲ τῷ β, ἐστὶν ὁ γ, κατὰ τὸν αὐτόν. ἄρα καὶ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασ: τὸν δ, πεποίηκε. κατὰ τὸν ιθ΄: ἄρα τοῦ ζ΄: ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ. κατὰ δὲ τὸν κα΄: ἐπεὶ οἱ α ε, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, μετρεῖ ὁ ε, τὸν γ, μετρείτω δὴ κατὰ τὸν η, ὥστε ὁ ε, τὸν η, πολλαπλασ: τὸν γ, πεποίηκε. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασ: τὸν αὐτὸν γ, πεποίηκε, (μετρείτω γὰρ ὁ α, τὸν γ, κατὰ τὸν β, ὁμώνυμον αὐτῷ ἀριθμόν, ὡς δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω.) ἄρα κατὰ τὸν ιθ΄: τοῦ ζ΄: ἐστὶν ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ β, πρὸς τὸν η, κατὰ δὲ τὸν κα΄: τοῦ αὐτοῦ, ὁ ε, τὸν β, μετρεῖ, μετρείτω δὴ κατὰ τὸν θ, ὥστε ὁ ε, τὸν θ, πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλ: β, πεποίηκε, κατὰ τὸ β΄: πόρισμ: τῆς ις΄: τοῦ ζ΄: ἄρα κατὰ τὸν κ΄: τοῦ αὐτοῦ ζ΄: ἐστὶν ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ δὲ τὸν κα΄: τοῦ αὐτοῦ, μετρεῖ ὁ ε, τὸν α, καὶ ὁ α, τὸν β, οἱ δὲ α ε, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, οἱ δὲ πρῶτοι μονάδι μόνῃ μετροῦνται, ἄτοπον ἄρα μετρεῖσθαι ὑπὸ τοῦ ε, τὸν α, οἱ ε α, ἄρα οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀλλὰ σύνθετοι. κατὰ τὸν λγ΄: ἄρα τοῦ ζ΄: ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται, ἐπεὶ δὲ ὁ ε, πρῶτός ἐστι, καὶ παρ' οὐδενὸς μετρεῖται, ἢ ἑαυτοῦ, ἄρα ὁ ε, τοὺς ε α, μετρεῖ, μετρεῖ δὲ ὁ ε, καὶ τὸν δ, ὑφ' οὗτινος ἄρα ἀριθμοῦ ὁ ἔσχατος δ, μετρεῖται, ὑπ' αὐτοῦ καὶ ὁ παρὰ τὴν λ, μονάδα α, μετρηθήσεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ ταῦτα μὲν κατὰ τὸν Εὐκλείδην. δείκνυται δὲ καὶ οὕτω.

Eucl. lib. 9. Fig. 9.



Μετρείτω δὴ τὸν δ, ἀριθμὸν πρῶτος ἀριθμὸς ὁ ε, κατὰ τὸν ζ. Λέγω, ὅτι

μετρεῖ