

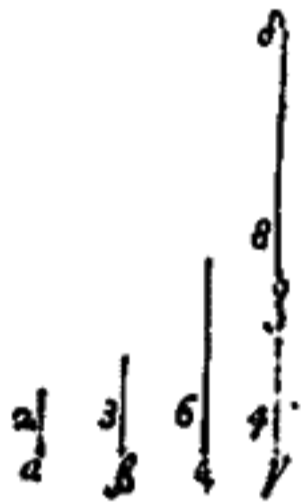
μείζων ἐστὶ τῷ δ, καὶ ὁ ε, ἄρα μείζων ἐστὶ τῷ η. Ἀλλ' οὐκ ἐπεὶ ὁ β, πρὸς ζ, θ, πολλαπλασ. πρὸς γ, δ, περιποιεῖται, διὰ τῆς αὐτῆς ἄρα εζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὅπως ἔσται ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, καὶ ἐπομένως ὁ θ, ἐλάττω τῷ ζ. ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὡς καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν η, ἄρα καὶ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν η, ὁ ζ, πρὸς τὸν θ. καὶ διὰ τῆς ιγ': ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ η, πρὸς τὸν θ. ἄρα οἱ εζ, ἐλάχιστοι ὅπως τῶν τῶν αὐτῶν λόγον ἔχόντων αὐτῆς, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι πρὸς ηθ, ἐλάττωσιν αὐτῶν, ὅπρι ἀποπον. ἄρα ὁ γ, ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν α, β, μίξεται. ὅπρι ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΛΖ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινα μερῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μερῶσι, τὸν αὐτὸν μερήσει.

Οἱ α β, ἤδη ἀριθμοὶ μίξεταισαν τὸν οἰονδήποτε ἀριθμὸν γ δ, ἐλάχιστον δὲ τὸν ε. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ ε, τὸν γ δ, μίξεται, εἰ γὰρ μὴ, μίξεται ὁ ε, ἐκ τῶ γ δ, τὸν δζ, καὶ λειπέτω ἑαυτῷ ἐλάττωσα τὸν γ ζ. Ἐπεὶ ὅν οἱ α, β, τὸν ε, μίξεται, καὶ ὁ ε, τὸν δζ, οἱ α, β, ἄρα τὸν δζ, μίξεται, μίξεται δὲ ἔτι καὶ τὸν γ δ, μίξεταισιν πάντως καὶ τὸν γ ζ, ἐλάττωσα τῷ ε. ὅπρι ἀποπον, ὁ ε, ἄρα τὸν γ δ, μίξεται, ὅπρι ἔδει δεῖξαι.

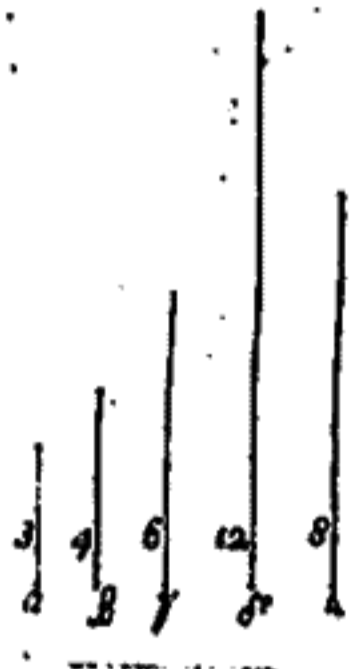
Eucl. lib. 7. Fig. 10.



Πρότασις ΛΗ': Πρόβλημα.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἀρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μερῶσι αὐτῶν ἀριθμὸν.

Ἐώρασαν ἤδη ἔρεις ἀριθμοὶ οἱ α β γ, δοῖ δὲ ὃν ἐλάχιστον μίξεταισιν ἀριθμὸν ἀρεῖν. Ἐυριθῆτω διὰ τῆς λς': ὁ ἐλάχιστος μίξεταισιν ἀριθμὸς παρα τῶν α β, καὶ ἔστω ὁ δ. τὸν δ, ἄρα ἔπει μίξεται ὁ γ, ἢ ε. μίξεταισιν πρόπρον, οἱ α, β, γ, ἄρα μίξεταισιν τὸν δ. Λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ δυνατὸν μίξεταισιν οἱ α, β, γ, ἐλάττωσα τῷ δ, ἀριθμὸν τὸν ε. Ἐπεὶ ὅν οἱ α, β, μίξεταισιν τὸν ε, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μίξεταισιν, πρὸς τὸν δ, μίξεταισιν τὸν αὐτὸν ε, κατὰ τὴν ἀσπίρω, ὁ δὲ δ, μείζων ἐστὶ τῷ ε, ὅπρι ἀποπον. ἄρα ὁ δ, ἐστὶν ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν α, β, γ, μίξεταισιν. ὅπρι ἔδει ποιῆσαι.



Μὴ μίξεταισιν δὲ ὁ γ, τὸν δ. καὶ ἐλήφθω διὰ τῆς λς': ὁ ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστος μίξεταισιν ἀριθμὸς, καὶ ἔστω ὁ ε. Ἐπεὶ πίνουσι οἱ α, β, τὸν δ, μίξεταισιν,

ἢ ὁ δ, πὸν ε, μῆεῖ κῆ πὸν αὐτῆρω. οἱ α β, ἄρα μῆεῖσι κῆ πὸν ε, μῆεῖ δὲ αὐτὸν κῆ ὁ γ, οἱ α, β, γ, ἄρα πὸν ε, μῆεῖσι. Λέγω δὲ, ὅτι κῆ εὐλάχιστος. εἰ γὰρ διωαπὸν μῆεῖσι οἱ α β γ, εὐάττωα πὸν ε, ἀρῆθμὸν πὸν ζ. Ἐπεὶ Eucl. Lib. 7. Fig. 23.
 εἰ οἱ α β, πὸν ζ, μῆεῖσι, κῆ ὁ ὑπ' αὐτῆρ ἄρα εὐλάχιστος μῆεῖσι, πῆσι ὁ δ, πὸν αὐτὸν ζ, μῆεῖσι, κῆ τῶ αὐτῆρω. Ἐπεὶ δὲ κῆ ὁ γ, πὸν αὐτὸν ζ, μῆεῖσι, μῆεῖσι πῆσι πὸν ζ, κῆ ὁ ὑπὸ τῆ β γ, εὐλάχιστος μῆεῖσι, πῆσι ὁ ε, ὁμῆσι πὸν εὐάττωα, ὅπῆ ἀδῶαπῶν. ὁ ε, ἄρα εὐλάχιστος ἄν, ὑπὸ τῆ α β γ, μῆεῖται. ὅπῆ εἶδει ποῖσι.

Πρότασις ΛΘ': Θεώρημα.

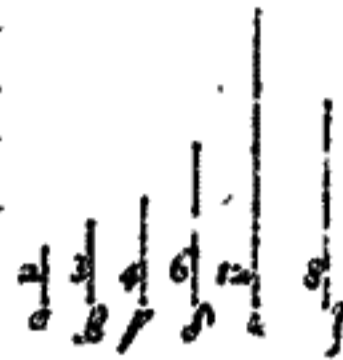
Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπὸ τῆσ ἀριθμῶ μῆεῖται, ὁ μῆεῖσι μῆεῖσι, ὁμῆσι μῆεῖσι εἶσι τῆ μῆεῖσι.

Ὁ α, εἶσι ἀριθμὸς ὑπὸ τῆ β, ἀριθμῶ μῆεῖσι κῆ πὸν ε, κῆ τῆ γ, μῆεῖσι. Λέγω πὸν γ, μῆεῖσι εἶσι τῆ α, ὁμῆσι μῆεῖσι τῆ β. ὅσῆσι γὰρ ὁ β, πὸν α, μῆεῖσι, πῆσι μῆεῖσι κῆ ὁ δ, μῆεῖσι πὸν γ, κῆ τῆ β: πῆσι πῆσι εἶσι: ἄρα ὅσῆσι ὁ δ, μῆεῖσι πὸν γ, ὁ β, πὸν α, κῆ πῆσι τῆ α γ: ὅσῆσι ὁ δ, μῆεῖσι πὸν β, ὁ γ, πὸν α, ὁ αὐτὸ μῆεῖσι εἶσι ὁ δ, μῆεῖσι τῆ β, τῆ αὐτὸ εἶσι, κῆ ὁ γ, τῆ α. ἄλλ' ὁ δ, μῆεῖσι, ὁμῆσι μῆεῖσι εἶσι τῆ β, κῆ ὁ γ, ἄρα τῆ α, ὁμῆσι μῆεῖσι εἶσι τῆ β, κῆ πὸν γ: ὅπῆ. ὅπῆ εἶδει δεῖσι.

Πρότασις Μ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς μῆεῖσι ὁ, τῆσ, ὑπὸ ὁμῆσι μῆεῖσι μῆεῖσι μῆεῖσι τῆ μῆεῖσι.

Ἀριθμὸς εἶσι ὁ α, μῆεῖσι ὁ, τῆσ εἶσι πὸν β, ὁμῆσι μῆεῖσι δὲ ἀριθμὸς τῆ β, εἶσι ὁ γ. Λέγω δὲ πὸν γ, μῆεῖσι πὸν α. Ἐπεὶ γὰρ ὁ β, μῆεῖσι εἶσι τῆ α, κῆ ὁ γ, ὁμῆσι μῆεῖσι τῆ β, ἄρα ὁ μῆεῖσι εἶσι ὁ β, τῆ α, τῆ αὐτὸ εἶσι κῆ ὁ δ, μῆεῖσι πὸν γ. εἶσι εἶσι ὅσῆσι ὁ δ, πὸν γ, ὁ β, πὸν α, κῆ τῆ α γ: ὅσῆσι ὁ δ, μῆεῖσι πὸν β, ὁ γ, πὸν α, ὁ γ, ἄρα μῆεῖσι πὸν α. ὅπῆ εἶδει δεῖσι.

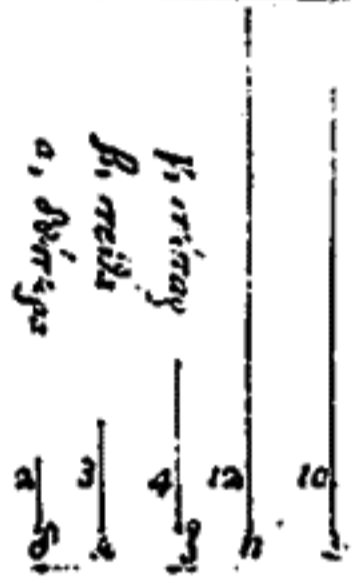


Πρότασις ΜΑ': Πρόβλημα.

Ἀριθμὸν ἄριστον, ὡς εὐλάχιστος ὢν, ἔξει τὰ δοθέντα μέρη.

Ἐστωσαν ἤδη δοθέντα μέρη τὰ $\alpha \beta \gamma$, καὶ ἄριστος ὁμοίουμοι ἀριθμοὶ οἱ $\delta \epsilon \zeta$. Εὐρισθήτω καὶ τὸ λ ἢ: ὁ εὐλάχιστος μίθε-
μενος ὑπὸ πῶν $\delta \epsilon \zeta$, καὶ ἔστω ὁ η , ὁ ἢ ἄρα μίθεμενος ὑπὸ
πῶν $\delta \epsilon \zeta$, οἷς τισιν ὁμοίουμοι μέρη εἶναι τὰ $\alpha \beta \gamma$, ἔχει-παύ-
τως τὰ δοθέντα μέρη. Λέγω δὲ, ὅτι καὶ εὐλάχιστος, εἴ γὰρ
μή. ἔστι τις ἐλάττω τῷ η , ἔχων τὰ δοθέντα $\alpha \beta \gamma$, μέρη,
καὶ ἔστω ὁ θ . Ἐπεὶ πείνω ὁ θ , τὰ $\alpha \beta \gamma$, μέρη ἔχει, πῶς
δὲ $\alpha \beta \gamma$, ὁμοίουμοι ἀριθμοὶ εἰσιν οἱ $\delta \epsilon \zeta$. ἄρα ὁ θ , ὑπὸ
πῶν $\delta \epsilon \zeta$, μίθεθήσεται, ἐλάσσων δὲ πῦν η , ὅπερ ἀτοπον,
ὁ η , ἄρα εἶναι εὐλάχιστος, ἔχων τὰ δοθέντα μέρη. ὅπερ ἔ-
δει ποιῆσαι.

Eucl. lib. 7. Prop. 24.



Τέλος τοῦ Ἐβδόμου τῆς τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.



Ε. Ρ.

Ε. γ. Δ. της Κ. τ. Π.
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

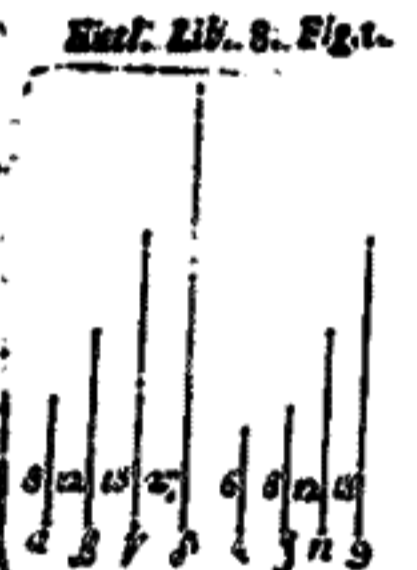


ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥΤΟΓΔΟΥΤ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥΤ ΕΚΚΛΕΙΔΟΥΤ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Εάν ὡση ἀσυνεκτατοῦν ἀριθμοῖς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρό-
τι. πρὸς ἀλλήλους ὡση, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν αὐτῶν λόγου ἐ-
χόμενον αὐταῖς.

Ἀριθμοὶ ἔδω οἱ $\alpha \beta \gamma \delta$, ἕσων ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ
ἄκροι αὐτῶν $\alpha \delta$, ἕσων ἄριστοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω τὴν
 $\alpha \beta \gamma \delta$, ἐλάχιστους εἶναι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόμενον αὐ-
ταῖς. εἰ γὰρ μή, ἕσων οἱ $\epsilon \zeta \eta \theta$, ἐλάσσονες τῶν $\alpha \beta \gamma \delta$,
ἐσ τῶν αὐτῶν λόγου αὐταῖς. καὶ διὰ τῆς $\epsilon \delta$: ἄρα τῶν ζ : εἰσι
ὡς ὁ α , πρὸς τὸν δ , ὅπως ὁ ϵ , πρὸς τὸν θ . καὶ διὰ τῆς $\epsilon \alpha$:
τῶν αὐτῶν, μινρίσει ὁ α , πρὸς τὸν ϵ , καὶ ὁ δ , πρὸς τὸν θ , οἱ μεί-
ζονες τῆς ἐλάσσωνας, ὅπου ἔπεται. Ἐάν ἄρα ὅσοι ὅσοι
διποσω, καὶ τῶν ἐξῆς.

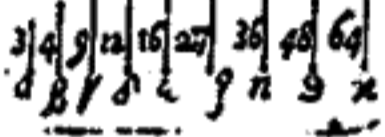


Πρότασις Β': Πρόβλημα.

Ἀριθμὸς ἄριστος ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστους, ὅσους ἐπιπέδητις, ὅν τῶ
δοθέντι λόγῳ.

Ἐστω ἔδω δοθείς λόγος ἐσ ἐλάχιστοις ἀριθμοῖς δ τῶ α , πρὸς τὸν β , καὶ
ἔδω ἄριστος ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστους ἀριθμοῖς, ὅσους αὐτὴς ἐπιπέδητις. Ἐπι-
πέδησας δὲ πρῶτον τρεῖς. καὶ ὁ α , ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ , ποιείτω,
τὸν δὲ β , πολλαπλασιάσας τὸν δ , ποιείτω. ὡσαύτως, καὶ ὁ β , ἑαυτὸν πολλαπλα-
σιάσας, τὸν ϵ , ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ α , τὴν $\alpha \beta$, πολλαπλασιάσας τὴν $\gamma \delta$,
ποιείτω, καὶ τὸν $\epsilon \zeta$: τῶν ζ : ὡς ὁ α , πρὸς τὸν β , ὅπως εἶσι ὁ γ , πρὸς τὸν
τὸν δ . Ἀφῆθις ἐπειὶ οἱ $\alpha \beta$, τὸν β , πολλαπλασιάσασκε τὴν $\delta \epsilon$, ποιήσασκε,
ἄρα ὡς ὁ δ , πρὸς τὸν ϵ , ὅπως ὁ α , πρὸς τὸν β , καὶ τὸν $\epsilon \zeta$: τῶν ζ : ὡς δὲ,
 $\delta \alpha$,

δ α, ἄρως τὸν β, ἔστι καὶ ὁ γ, ἄρως τὸν δ, ἄρα καὶ τὸν ε: καὶ ὁ ε: ὡς ὁ γ, ἄρως τὸν δ, ἔστι ὁ δ, ἄρως τὸν ε, οἱ τρεῖς ἄρα ἀριθμοὶ γ δ ε, ἔξῃς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ α, λόγῳ ἄρως τὸν β. Δείγμα, ὅτι καὶ εὐλάχιστοι. οἱ γὰρ α β, ἀρῶται ἄρως ἀλλήλους ὅπως, καὶ ἑαυτοὺς πολλαπλασιάζουσιν πρὸς γ ε, πιπτοίκασι, ἄρα καὶ τὸν κ θ: καὶ ζ: οἱ γ ε, ἀρῶται πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ τρίαρις ἐπιπαχθῶσι, πολλαπλασιάζουσι ὁ α, πρὸς γ δ ε, ποιήτω πρὸς ζ κ θ, ὁ δὲ β, τὸν ε, πολλαπλασιάζουσι τὸν κ, ποιήτω. ἐπεὶ οὐδὲ ὁ α, πρὸς γ δ, πολλαπλασιάζουσι πρὸς ζ κ, πιπτοίκασι, καὶ τὸν ε ζ: ἄρα καὶ ζ: ἔστι ὡς ὁ γ, ἄρως τὸν δ, ὅπως ὁ ζ, πρὸς τὸν κ, ὡς δὲ ὁ γ, ἄρως τὸν δ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς β, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, ἄρως τὸν β, ἔστι καὶ ὁ ζ, πρὸς τὸν κ. Ἀποδείξει ἐπεὶ ὁ α, πρὸς δ ε, πολλαπλασιάζουσι πρὸς κ θ, πιπτοίκασι, ἔστι διὰ τῆς αὐτῆς, ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ὅπως ὁ κ, πρὸς τὸν θ, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν θ. ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, δίδουται καὶ ὁ ζ, πρὸς τὸν κ, ἄρα καὶ ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν κ, ὅπως ὁ κ, πρὸς τὸν θ. ἐπεὶ δὲ καὶ οἱ α β, τὸν ε, πολλαπλασιάζουσιν πρὸς θ κ, πιπτοίκασι. ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὅπως ἔστι καὶ ὁ θ, πρὸς τὸν κ, καὶ τὸν ε θ: οἱ ζ, κ, θ κ, ἄρα ἔξῃς ἀνάλογον εἰσιν ἐν τῷ α, πρὸς τὸν β, λόγῳ. ὅτι δὲ καὶ πρῶται, δίδουται, διὰ τῆς κ θ: καὶ ζ: οἱ γὰρ α β, πρῶται πρὸς ἀλλήλους, πρὸς γ ε, πρῶται πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιάζουσιν, πρὸς ζ κ, πιπτοίκασι. Ἐὰν δὲ πάλιν ἐπιπαχθῶσι, πολλαπλασιασθήτωσαν οἱ ἀριθμοὶ τρίαρις ἐπὶ τὸν α, ὁ δὲ τρίαρις καὶ ἐπὶ τὸν β, καὶ ἔτι ἔξῃς εἴη καὶ ἑκάστου ἐφ' ἑκάτερον πολλαπλασιαζομένου ἔσται τὸ ἐπιπαχθῆναι.



Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α .

- Α: Ἐὰν δὲ τῶν φαιρῶν, ὅτι εἰς τρεῖς ἀριθμοὶ ἔξῃς ἀνάλογον, εὐλάχιστοι καὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς ἄσιν, οἱ ἄλλοι αὐτῶν τετραγώνιοι εἰσιν. Ἐὰν δὲ τρίαρις, κύβοι.
- Β: Ἐὰν ἀριθμὸς ὁμοιομετῶν ἔξῃς ἀνάλογον ἀριθμῶν πολλαπλασιάζουσι ποιῆται, οἱ γινόμενοι ἔξῃς ἀνάλογον ἔσονται, καθ' ὅν, ἔξῃς ἀνάλογον εἰσιν οἱ πολλαπλασιασθέντες, λόγον.
- Γ: Ἐὰν ᾧσι δύο ἀριθμοὶ εὐλάχιστοι καὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς. πολλαπλασιάζουσι ἑκάτερος ἑαυτὸν χωρὶς, καὶ ἔτι ἀλλήλους, ποιήσουσι τρεῖς εὐλάχιστους ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ.

Πρὸς.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐάν ὡσιν ὀποσσωῶ ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, εὐλαχίστοι τῶν αὐτῶν λόγων ἐχόντων αὐταῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

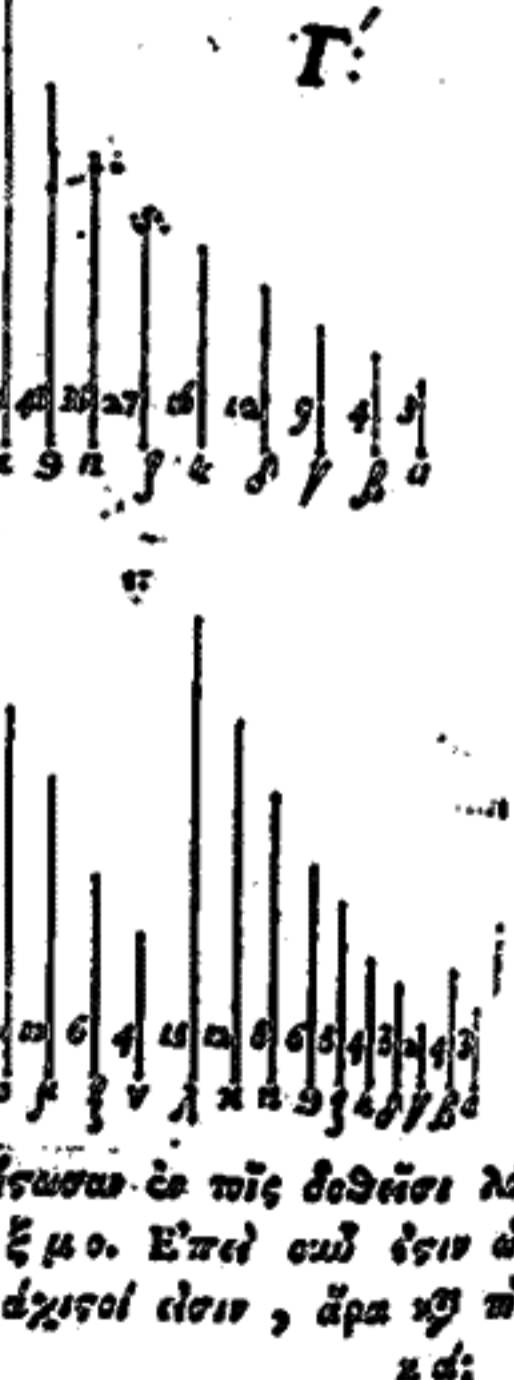
Ἐῴσωσα ἤδη πρώτων εὐλαχίστοι ἀριθμοὶ τῶν αὐτῶν λόγων ἐχόντων αὐταῖς εἰ α β, καὶ τὸν κ δ': ἄρα τὸ ζ': οἱ α β, πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐῴσωσα β: τρεῖς ἐν τῷ α, λόγῳ πρὸς τὸν β, ὡς οἱ γ δε. Λέγω τὸς ἄκρους αὐτῶν γ ε, πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι. Ἐπεὶ γάρ οἱ α β, ἑαυτοὺς πολλαπλασιάζουσας, κατὰ τὸν αὐτῶν, τὸς γ ε, πιποῖναι, οἱ γ ε, ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν καὶ τὸν κ δ': τὸ ζ': ἔσωσα δὲ καὶ πένταρις ὡς οἱ ζ η θ κ. ἔπειτα οὐκ καὶ τὸν αὐτῶν εἰ α β, τὸς γ ε, πολλαπλασιάζουσας τὸς ζ α, πιποῖναι, οἱ ζ α, καὶ τὸν κ δ': πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Τῷ αὐτῷ λόγῳ δείκνυται, καὶ πρῶτος εἶναι, ἢ καὶ πλείους, τὸς ἄκρους αὐτῶν πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, αἰεὶ γάρ εἰ τῶν πρὸς αὐτῶν ἄκροι εἰς τὸ πολλαπλασιασμῷ τῶν ἄκρων τῶν πιποῦναι ἐπὶ τὸς δύο πρώτους γίνονται.

Επιλ. Lib. 8. Fig. 3.

Πρότασις Δ': Πρόβλημα:

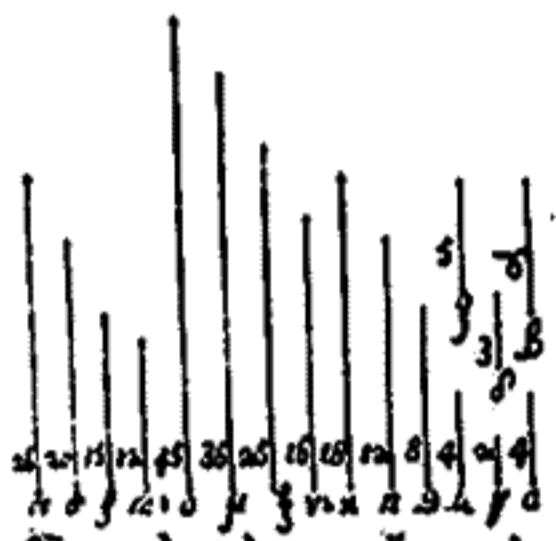
Λόγων δοθέντων ὀποσσωῶ ἐν εὐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμὸς ἄριστος ἐξῆς εὐλαχίστους, ἐν ταῖς δοθείσι λόγοις.

Ἐῴσωσα ἤδη ἐν εὐλαχίστοις ἀριθμοῖς λόγοι οὗ α, πρὸς τὸν β, οὗ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ οὗ ε, πρὸς τὸν ζ. Ἐυριθέτω δὲ καὶ τὸν λ ε': τὸ ζ': οὗ ὑπὸ τῶν β γ, εὐλαχίστοις ἀριθμοῖς, καὶ ἔσω οὗ κ. καὶ ὅσαυτις μετ' οὗ β, τὸν κ, μιτροῖ, πσαυταῖς μιτροῖ καὶ οὗ α, τὸν θ, ὅσαυτις δὲ οὗ γ, τὸν κ, μιτροῖ, πσαυταῖς μιτροῖ καὶ οὗ δ, τὸν κ. τὸν δὲ κ, ἔτοι μιτροῖ οὗ ε, ἢ ἔ. μιτροῖ πρῶτον. καὶ ὅσαυτις οὗ ε, τὸν κ, μιτροῖ, πσαυταῖς μιτροῖ καὶ οὗ ζ, τὸν λ. Λέγω τὸς θ κ λ, ἐξῆς ἀνάλογον εἶναι ἐν ταῖς δοθείσι λόγοις. Ἐπεὶ γάρ οἱ α β, ἰσάκις μιτροῖ τὸς θ κ, καὶ τὸν εἰ: ἄρα τὸ εἰ: ἔστιν ὡς οὗ α, πρὸς τὸν β, ὅπως οὗ θ, πρὸς τὸν κ. διὰ τὸ αὐτῶν δὲ, καὶ ὡς οὗ γ, πρὸς τὸν δ, οὗ κ, πρὸς τὸν κ, καὶ ὡς οὗ ε, πρὸς τὸν ζ, ὡς οὗ πρὸς τὸν λ. Λέγω, ὅτι καὶ εὐλαχίστοι. εἰ γάρ μή, ἔσωσα ἐν ταῖς δοθείσι λόγοις ἐξῆς ἀνάλογον εὐλαχίστοι ἀριθμοὶ τῶν θ κ λ, οἱ ἕξ μο. Ἐπεὶ οὐκ εἰσιν ὡς οὗ α, πρὸς τὸν β, ὅπως οὗ θ, πρὸς κ, εἰ δὲ α β, εὐλαχίστοι εἰσιν, ἄρα καὶ τὸν κ ε':



κα: τῷ ζ': ὁ μὲν α, τὸν ν, μιτρεῖ, ὁ δὲ β, τὸν ξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὁ γ, τὸν ξ, μιτρεῖ, ἐπεὶ ὑποτίθεται ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ξ, πρὸς τὸν μ. καὶ τὸν λζ': ἄρα τῷ ζ': καὶ ὁ ὑπὸ τῷ β γ, μιτρήμιμος, δηλοῦσι ὁ ν, μιτρήσει τὸν ξ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπῃ ἀδωάτων. οἱ θ η κ λ, ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι.

Eucl. lib. 8. Fig. 4.



Μὰ μιτρεῖται δὲ ὁ ε, τὸν κ. εἰλήφθω δὲ πῶς λζ': τῷ ζ': ὁ ὑπὸ τῷ ε κ, ἐλάχιστος μιτρήμιμος, καὶ ἔστω ὁ μ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ κ, τὸν αὐτὸν μ, μιτρεῖ, πεσαυτίκις μιτρεῖται καὶ ἑκάστῳ τῷ θ η, ἑκάστῳ τῷ ν ξ, ὁσάκις δὲ ὁ ε, τὸν μ, μιτρεῖ, μιτρεῖται καὶ ὁ ζ, τὸν ο, οἱ θ η, πῶς ν ξ, μιτρήσιν ἰσάκις, ἔσιν ὡς ὁ θ, πρὸς τὸν ν, ὁ ι, πρὸς τὸν ξ, ὡς δὲ ὁ θ, πρὸς τὸν η, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔστω ὁ ν, πρὸς τὸν ξ. διὰ τὰ αὐτὰ ἔσται καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ξ, πρὸς τὸν μ. Ἄνωθις ἐπεὶ ὁ ε, τὸν μ, καὶ ὁ ζ, τὸν ο, ἰσάκις μιτρεῖ, ἔσιν ἄρα ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ μ, πρὸς τὸν ο, οἱ ν ξ μ ο, ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν ταῖς δοθεῖσι λόγοις. Λίγω δὲ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μὴ, ἔστωσαν ἐξῆς ἀνάλογον ἐν ταῖς δοθεῖσι λόγοις ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῷ ν ξ μ ο, οἱ π ρ σ τ. Ἐπεὶ οὖν ἔσιν ὡς ὁ σ, πρὸς τὸν β, ὁ π, πρὸς τὸν ρ, οἱ δὲ σ β, ἐλάχιστοί εἰσιν, ἄρα καὶ τὸν ῥηθεῖσαν κ α: ὁ β, τὸν ρ, μιτρεῖ, διὰ πῶς αὐτῆς δὲ καὶ ὁ γ, τὸν ρ, μιτρεῖ. καὶ ἐπομένως καὶ τὸν λζ': τῷ ζ': μιτρεῖ τὸν ρ, καὶ ὁ ὑπὸ τῷ β γ, ἐλάχιστος μιτρήμιμος, κατέστιν ὁ η. ἔστι δὲ ὡς ὁ ν, πρὸς τὸν κ, ἔστω ὁ ρ, πρὸς τὸν σ, καὶ καὶ τὸν ι γ': τῷ ζ': καὶ ὡς ὁ η, πρὸς τὸν ρ, ὁ κ, πρὸς τὸν σ, ὁ δὲ η, τὸν ρ, μιτρεῖ, μιτρεῖ ἄρα καὶ ὁ κ, τὸν σ, μιτρεῖ δὲ καὶ ὁ ε, τὸν σ, οἱ ε κ, ἄρα τὸν σ, μιτρήσιν. καὶ ἐπομένως διὰ πῶς λζ': τῷ ζ': καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῷ ε κ, μιτρήμιμος, μιτρεῖ τὸν σ, ἔστω δὲ ἔσιν ὁ μ, ὁ μ, ἄρα μιτρεῖ τὸν σ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπῃ ἀδωάτων. οἱ ν ξ μ ο, ἄρα ἐλάχιστοί εἰσιν. ὅπῃ ἔδει ποιῆσαι.

Λήμμα εἰς ἀπόδειξιν τῆς ἐπομένης ἐ: προτάσεως.

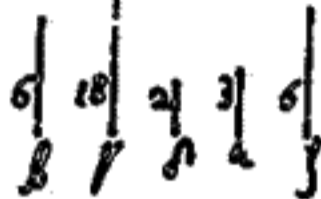
Ἐὰν ὡσιν ὁποσοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, εἴτε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, εἴτε ἐν διαφόροις, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν ἕχοντα, λόγου ἔχει τοῦ συγκείμενου ἐκ τῶν ἑνὶ αὐταῖς λόγων.

Ἐστωσαν ἤδη ἀρῶν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ α, β, γ, ἐξῆς ἀνάλογον ἐν λόγοις ἀσμοίσις. Λίγω τὸν α, πρὸς τὸν γ, λόγον ἔχειν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν αὐταῖς λόγων, κατέστι τῷ α, πρὸς τὸν β, καὶ τῷ β, πρὸς τὸν γ. Ἐστω ἔστω τῷ μὲν α, πρὸς τὸν β, λόγῳ πηλικότις ὁ δ, τῷ δὲ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε. καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλα-

CC πλα

πλασιάσαι τὸν ζ, ποιείτω· καὶ τὸν εἶ: ἄρα ὄρον τῷ εἶ: ὁ ζ, ἐστὶν ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν λόγων, τῶν ἐν πῖς α β γ. Ἐπεὶ δὲ ὁ δ, τὸν μετὰ α, πολλαπλασιάσαι τὸν β, πιποίηκεν, (πυλικόπως γὰρ ὁ δ, πῦ α, ἀρὸς τὸν β,) τὸν δὲ ε, τὸν ζ, ἄρα καὶ τῶν εζ: πῦ ζ: ἔστιν ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν ε, ὅπως ὁ β, ἀρὸς τὸν ζ, καὶ καὶ τῶν εθ: πῦ αὐτῶν, ὁ ἐκ τῶν α, καὶ ζ, γιγόμενος ἀριθμὸς, ἴσός ἐστι τῶν ἐκ τῶν ε, καὶ β, γιγόμενος. Ἐπεὶ δὲ ὁ εἶ ἐκ τῶν ε, καὶ β, ἐστὶν ὁ γ, (πυλικόπως γὰρ ὁ ε, τῶ β, ἀρὸς τὸν γ,) ἄρα ὁ ἐκ τῶν αζ, ἴσός ἐστι τῶν γ, μεταξὺ ἄρα τῶ α, καὶ γ, πυλικόπως ἐστὶν ὁ ζ, ὁ δὲ ζ, ἐστὶν ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἐν πῖς α β γ, λόγων, ὁ α, ἄρα ἀρὸς τὸν γ, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων.

Eucl. lib. 8. Fig. 5.



Ἐςωσαν ἤδη τέσσαρες οἱ α β γ δ, ὧν πυλικόπως τῶν λόγων ἔςωσαν οἱ ε ζ η, καὶ ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασιάσαι, τὸν θ, ποιείτω, ὁ δὲ η, τὸν θ, ὡσαύτως πολλαπλασιάσαι τὸν α, ποιείτω. Λίγω τὸν α, ἀρὸς τὸν δ, ἔχειν λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων, τῶν ἐν πῖς α β γ δ, ὅστις ἐστὶν ὁ κ, καὶ τὸν εἶ: ὄρον τῷ εἶ: τῷ γὰρ β, παριωραμείν, ἔσονται ἄρῃς ἀριθμοὶ ἕξῃς ἀλόγον οἱ α γ δ, ἐν λόγοις ὁμοίαις, πυλικόπως δὲ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων οἱ η θ, ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων ὁ κ, καὶ τῶν α, ὡς πῦρ ἀπόδειξιν, ὁ α, ἀρὸς τὸν δ, ἔχει τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τῶν ἐν πῖς α β γ δ, λόγων. ὡσαύτως δειχθήσεται, καὶ πέντε ὑποθετάσει, τῷ βῖ: καὶ γῖ: παριωραμείν· καὶ ἐπὶ τῶν ἕξῃς ὡσαύτως.



Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγου ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλάρῶν.

Ἐςωσαν ἤδη ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ α β, πλάρα δὲ τῷ μετὰ α, οἱ γ δ, τῷ δὲ β, οἱ ε ζ. Λίγω τὸν α, ἀρὸς τὸν β, ἔχειν λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλάρῶν. εἴτινίς ἐστὶν ὁ τῷ γ, ἀρὸς τὸν ε, καὶ ὁ τῷ δ, ἀρὸς τὸν ζ. Γεσίθω δὲ ὁ λ, ἐκ τῶν πολλαπλασιασμῶν τῷ ε, ἐπὶ τὸν δ. Ἐπεὶ ἔν ὁ δ, πρὸς γ ε, πολλαπλασιάσαι πρὸς α λ, πιποίηκεν. ἄρα ὡς ὁ γ, ἀρὸς τὸν ε, ὅπως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν λ, καὶ τὸν εζ: τῷ ζ: Ἀυθαί, διὰ πρὸς αὐτῶν, ἐπεὶ ὁ ε, πρὸς δ ζ, πολλαπλασιάσαι πρὸς λ β, πιποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, ἀρὸς τὸν ζ, ὅπως ὁ λ, ἀρὸς τὸν β, οἱ

β, οἱ α λ β, ἄρα ἔξῃς εἰσιν ἀνάλογον ἐν πῖς τῶν πλῦρων λόγοις ; πῖσι τοῦ
 γ, ἀρὸς τὸν ε, καὶ τῷ δ, ἀρὸς τὸν ζ. καὶ κατὰ τὸ ἀνω-
 πῖρω λῆμμα, ὁ α, ἀρὸς τὸν β, ἔχει λόγον τὸν συγ-
 κείμενον ἐκ τῶν ἐν πῖς α λ β, λόγων, ἔπει δὲ εἰ-
 σιν, οἱ τῶν πλῦρων λόγοι, ὁ τοῦ α, λόγος ἄρα
 ἀρὸς τὸν β, σύγκειται ἐκ τῶν λόγων τῶν πλῦρων.
 οἱ ἐπίπεδοι ἄρα, καὶ τὰ ἔξῃς.

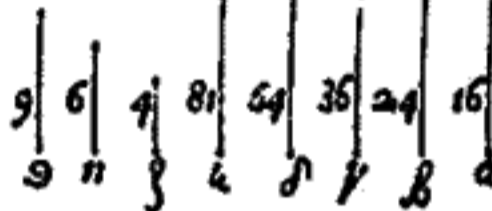
Eucl. lib. 8. Fig. 6.

Ε:



Πρότασις ς': Θεώρημα.
 Ἐὰν ὡσπερ ὅποσοιῦν ἀριθμοὶ ἔξῃς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μερῆ, οὐδ' ἄλλος εἰς εἰς μερῆσαι.

οἱ α, β, γ, δ, ε, ἀριθμοὶ ἔστωσαν ἔξῃς ἀνάλογον, καὶ ὁ α, τὸν β, μὴ μερῆτω. λέγω δὲ, ὅτι εἰς ἄλλοις εἰς εἰς μερῆσαι. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, εἰ μερῆται, εἰς εἰς τῶν α β γ δ ε, τὸν ἔξῃς μερῆσαι, ἐν τῇ αὐτῇ γὰρ εἰσι λόγῳ. ὅτι δὲ οὐδεὶς π ε εἰς εἰς μερῆται, δείκνυμι, παρ: χαρ: ὅτι ὁ α, εἰς τὸν γ, μερῆται. Εὐριθείωσαν ἡδὲ διὰ πῖς λ ε: τῷ ζ': οἱ ἐλάττωται τῶν τῶν αὐτῶν λόγῳ ἔχόντων πῖς α β γ, καὶ ἔστωσαν οἱ ζ η θ. Ἐπεὶ εἰς ὁ α, τὸν β, εἰ μερῆται, εἰ δὲ ὁ ζ, τὸν η, (ἐν τῇ αὐτῇ γὰρ λόγῳ εἰσι) ὡσαύτως ὁ ζ, μονὰς εἰς εἰς, ἢ γὰρ μονὰς πάντας μερῆται. ἔπει δὲ οἱ α β γ, ἴσοι τῇ πλῆθει εἰσι, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ πῖς ζ η θ, ἄρα κατὰ τὴν εἰς εἰς: τῷ ζ': καὶ δὲ ἴσοι ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσι, πῖσις ὡς ὁ ζ, ἀρὸς τὸν θ, ὁ α, ἀρὸς τὸν γ, ὁ δὲ ζ, τὸν θ, εἰ μερῆται, κατὰ τὴν εἰς εἰς: τῷ ζ': εἰ δὲ ὁ α, ἄρα τὸν γ, μερῆται. ὡσαύτως δείκνυται, ὅτι εἰς ἄλλοις εἰς εἰς μερῆσαι. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.



$$\frac{a}{\beta} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Πρότασις ζ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὡσπερ ὅποσοιῦν ἀριθμοὶ ἔξῃς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἕκτατον μερῆ, καὶ τὸν δεύτερον μερῆσαι.

Ἐστωσαν ἡδὲ ἔξῃς ἀνάλογον οἱ α β γ δ, ὁ δὲ α, τὸν δ, μερῆτω. λέγω, ὅτι καὶ τὸν β, μερῆται. εἰ γὰρ μὴ ὁ α, τὸν β, μερῆται, εἰς ἄλλοις εἰς εἰς μερῆσαι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἀλλὰ μὴ κατὰ ἀδυνάτω, ὑπιπέθη γὰρ ὁ α, τὸν δ, μερῆται, ἄρα ὁ α, καὶ τὸν β, μερῆται. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

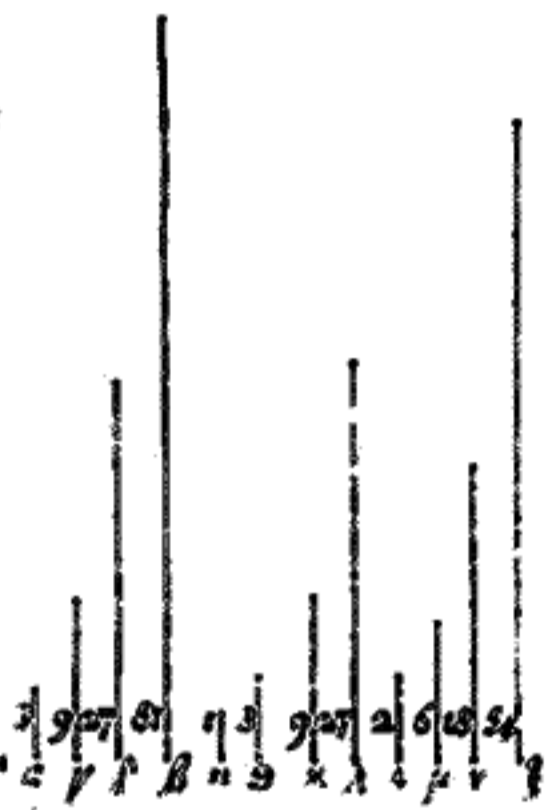
Cc 2 Πρ:

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ καὶ τὸ σωμαχὲς ἀνάλογον ἐμπύπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ καὶ τὸ σωμαχὲς ἀνάλογον ἐμπύπτωσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς αὐτῶν λόγον ἔχοντες αὐτοὺς μεταξὺ καὶ τὸ σωμαχὲς ἐμπέσονται.

Μεταξὺ τῶν α β, ἀριθμῶν πιπτόσασιν οἱ γ δ, καὶ ὡς δ α, ἀρὸς τὸν β, ὅπως ἔστω, καὶ ὁ ε, ἀρὸς τὸν ζ. Λέγω δὲ μεταξὺ τῶν ε ζ, ποῦτοι ἀριθμοὶ ἐμπέσονται, ὅσοι καὶ πῶς α β, πιπτόσασιν. εἰ μὲν γὰρ οἱ α γ δ β, ἐλάττωοί εἰσι τῶν αὐτῶν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς, ἐπεὶ καὶ τὸν κ α: τὸ ζ': οἱ α β, ἰσάκις μῆκρον εἰς τὸν ε ζ, μῆκρον ἰσάκις, ἔτι καὶ οἱ γ δ, πρὸς μ ν, καὶ ἔσται τὸ ζ κίμερον. εἰ δὲ μήτερον ἐλάττωοι, ἀριθμήσασιν διὰ τῶν λ ε: τὸ ζ': οἱ ἐλάττωοι τῶν αὐτῶν λόγον ἔχοντων πῶς α γ δ β, καὶ ἔστωσαν εἰ η θ κ λ. εἰ γὰρ οἱ η λ, ἰσοί εἰσι πῶς ε ζ, δίδεται τὸ σωμαχὲς. εἰ δὲ ἐλάττωοι, ἐπεὶ οἱ α γ δ β, καὶ η θ κ λ, ἴσοι τῶν κ λ, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, καὶ τὸν ι δ': τὸ ζ': καὶ εἰ ἴσοι ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ἔσονται, ἔστω ἄρα ὡς δ α, ἀρὸς τὸν β, ὅπως ὁ η, ἀρὸς τὸν λ, ὡς δὲ ὁ α, ἀρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ ε, ἀρὸς τὸν ζ' καὶ τὸν ι α': ἄρα τὸ ε: ἔστω ὡς ὁ η, ἀρὸς τὸν λ, ὅπως ὁ ε, ἀρὸς τὸν ζ. ἐπεὶ δὲ οἱ η λ, ἐλάττωοί εἰσι, καὶ τὸν κ α: τὸ ζ': ἰσάκις μῆκρον ὁ η, τὸν ε, καὶ ὁ λ, τὸν ζ, ἰσάκις δὲ ὁ η, τὸν ε, μῆκρον, ποσύντικος μῆκρον καὶ εἰ θ κ, πρὸς μ ν, ὅπως οἱ ε μ ν ζ, ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶ πῶς η θ κ λ, καὶ ἴσοι τῶν κ λ. ἀλλὰ καὶ οἱ α γ δ β, ἴσοι τῶν κ λ εἰσὶν καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ πῶς η θ κ λ, ἄρα καὶ οἱ ε μ ν ζ, ἴσοι τῶν κ λ εἰσὶ καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ πῶς α γ δ β, ὅσοι ἄρα μεταξὺ τῶν α β, πιπτόσασιν ἕξῃς ἀνάλογον, ποῦτοι καὶ μεταξὺ τῶν ε ζ, πιπτόσασιν. ὅπρι ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 8. Fig. 7.



Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἴσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ καὶ τὸ σωμαχὲς ἀνάλογον ἐμπύπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ καὶ τὸ σωμαχὲς ἀνάλογον ἐμπύπτωσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρω αὐτῶν καὶ μονάδος ἕξῃς μεταξὺ καὶ τὸ σωμαχὲς ἀνάλογον ἐμπέσονται.

Μεταξὺ ἔδει τῶν α β, πιπτόσασιν οἱ γ δ, ἕξῃς ἀνάλογον. Λέγω ὅτι καὶ μεταξὺ τῶν α, καὶ τῆς μονάδος, καὶ τῶν β, καὶ τῆς μονάδος, ποῦτοι πιπτόσονται, ὅσοι μεταξὺ

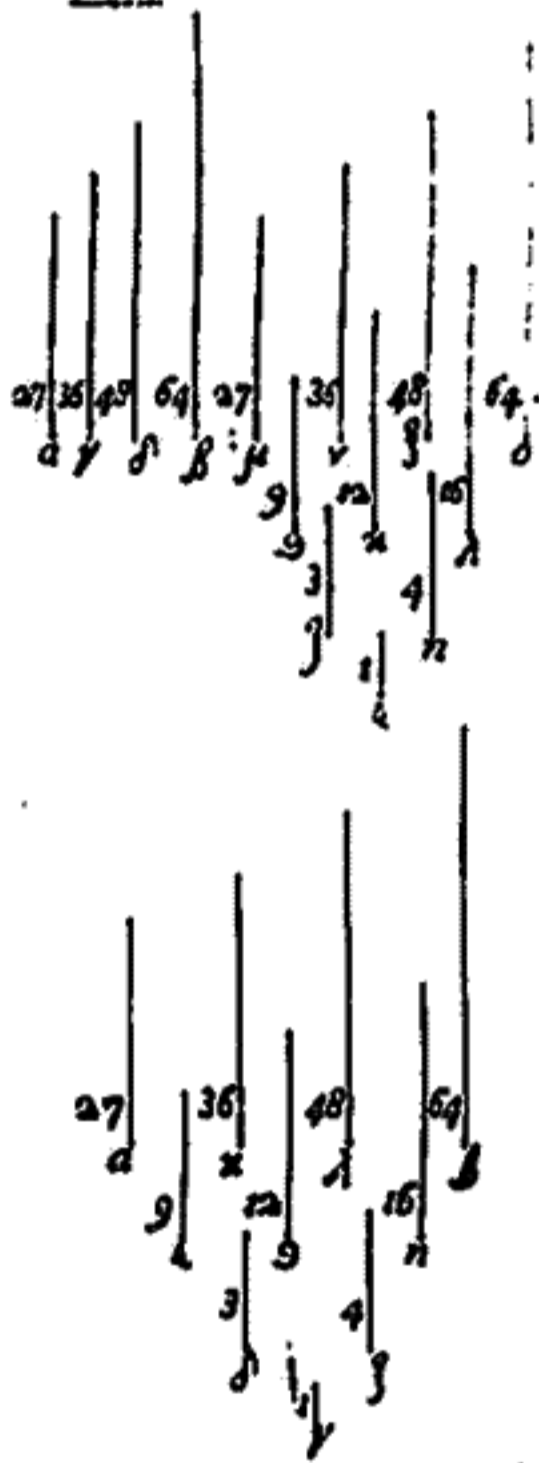
μεξυ τῶ αβ, πίπτουσιν. Ἐςω γάρ η̄ ε, μονάδες. καὶ ἀρῶτον μετὰ διὰ τῆς λβ: τῶ ζ: ἀριθμήσασιν δύο ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τῶς αγδβ, καὶ ἔσωσαν ὑποὶ οἱ ζη. δάπρον δὲ, ἔσως διὰ τῆς β': τῶ παρόντος, ὡς οἱ θκλ. καὶ ἔσως ἐφαξῆς, μίχρως ἔσοι τῶ ἀριθμῶ γράωνται τῶς αγδβ, καὶ ἔσωσαν ὑποὶ οἱ μνξο. Ἐπεὶ ἔν οἱ αγδβ, ἐλάχιστοί εἰσι τῶ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐ- πῆς καὶ τῶ κγ: τῶ ζ: τῶτοις δὲ ἴσοι τῶ πλῆθει εἰσὶν οἱ μνξο, ἄρα ἕκαστος τῶ μνξο, ἴσος ἐστὶν ἑκάστῳ τῶ αγδβ, οἱ μο, ἄρα ἴσοί εἰσι τῶς αβ. Ἐπεὶ δὲ ὁ ζ, καὶ τῶ β': τὸν παρόντος ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν θ, πιποίνκει, τὸν δὲ θ, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν μ, πιποίνκει, ἔστιν ἄρα κατὰ τῶν ιζ: τῶ *Eucl. lib. 8. Fig. 8.*

ζ: ὡς ὁ ζ, ἀρὸς τὸν θ, ἔσως ὁ θ, ἀρὸς τὸν μ, ἔ- σι δὲ διὰ τῶ β': πορίσμη: τῶς ιε: τῶ αὐτῶ ζ: καὶ η̄ ε, μονάδες ἀρὸς τὸν ζ, ὡς ὁ ζ, ἀρὸς τὸν θ, ἄρα μεταξὺ τῶς ε, μονάδος, καὶ τῶ μ, ἀριθμῶ, πῶτοι ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀτάλογοι πιπτόκασιν, ὅσοι μεταξὺ τῶ αβ. διὰ τὰ αὐτὰ δεῖχθῆσιν, ὅτι πῶτοι πίπτουσι καὶ μεταξὺ τῶς ε, μονάδος καὶ ο. οἱ δὲ μ, καὶ ο, ἴσοί εἰσι τῶς αβ. Ἐὰν ἄρα δύο ἀριθμοὶ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Πρότασις Ι': Θεώρημα:

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ε̄ μονάδος μεταξὺ καὶ τὸ σωσχεῖς ἀτάλογον ἐμπύπτωσιν ἀριθμοὶ, ὅσοι ἑκατέρῳ αὐτῶν καὶ μονάδος ἐξῆς μεταξὺ καὶ τὸ σωσχεῖς, ἀτάλογον ἐμπύπτωσιν ἀριθμοὶ, πῶτοι καὶ εἰς αὐτὰς μεταξὺ καὶ τὸ σωσχεῖς ἀτάλογον ἐμπεισῶνται.

Ἐςωσαν ἔδω δύο ἀριθμοὶ οἱ αβ, καὶ μεταξὺ μετὰ τῶ α, καὶ μονάδος γ, πιπτόκασιν ἐξῆς ἀτάλογον οἱ δε, μεταξὺ δὲ τῶ β, καὶ γ, μονάδος, οἱ ζη. Λί- γω δὲ, ὅτι καὶ μεταξὺ τῶ αβ, πῶτοι πιπτόκασιν, ἔσοι μεταξὺ ἑκατέρῳ τῶ αβ, καὶ μονάδος πιπτόκα- σιν. ὁ δ, πίνω τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν θ, ποιείτω, τὸν δὲ θ, ὡσαύτως πολλαπλασ: τὸν κ, ποιείτω. ἔτι ὁ ζ, τὸν αὐτὸν θ, πολλαπλασιάσας τὸν λ, ποιείτω. δεικνυταί, τῶς μεταξὺ τῶ αβ, ἐμ- πισόπτας ἀριθμῶς, πῶσι τῶς κλ, ἐξῆς ἀτάλογον εἶναι τῶς αβ. Ἐπεὶ ἔν ἐστιν ὅς η̄ γ, μονάδες ἀρὸς τὸν ε, ἔσως ὁ δ, ἀρὸς τὸν ε, ὁ δ, ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλα- σιά.



σιάσας τὸν ε, πιπείκει, καὶ τὸ β': πόρισμα τῆς ες': τῷ ζ'. διὰ τῷ αὐτῷ ἔτι, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἢ γ, μονὰς ἀρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε, ἀρὸς τὸν α, ὁ δ, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν α, πιπείκει. διὰ τῷ αὐτῷ ἄρα δέικνυται, ὅτι καὶ ὁ ζ, ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν η, πιπείκει, τὸν δὲ η, ὡσαύτως πολλαπλασ. τὸν β, πιπείκει. ἐπεὶ δὲ ὁ δ, ἑαυτὸν τε καὶ τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τῶς θ, πιπείκει. ἔσται ὡς ὁ δ, ἀρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ ε, ἀρὸς τὸν θ, καὶ τῷ ιζ': τῷ ζ': διὰ τῶς αὐτῶς ἔτι, ἐπεὶ καὶ ὁ ζ, ἑαυτὸν τε καὶ τὸν δ, πολλαπλασιάσας τῶς θ η, πιπείκει. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, ἀρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ θ, ἀρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ δ, ἀρὸς τὸν ζ, ὡς καὶ ὁ ε, ἀρὸς τὸν θ, ἄρα ὡς ὁ ε, ἀρὸς τὸν θ, οὕτως ἔστιν ὁ θ, ἀρὸς τὸν η. Αὐτίς ἐπεὶ ὁ δ, τῶς ιθ, πολλαπλασιάσας τῶς α κ, πιπείκει, ἔστιν ἄρα διὰ τῶς ῥηθείας ιζ': ὡς ὁ ε, ἀρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ α, ἀρὸς τὸν κ, ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ἔστι καὶ ὁ δ, ἀρὸς τὸν ζ, ἄρα ὡς ὁ δ, ἀρὸς τὸν ζ, οὕτως ἔστιν ὁ α, ἀρὸς τῶς κ. ἐπεὶ δὲ πάλιν οἱ θζ, τὸν θ, πολλαπλασιάσας τῶς κ λ, πιπείκασιν ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, ἀρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ κ, ἀρὸς τὸν λ, καὶ τῷ ιη': τῷ ζ': ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν κ, ἄρα ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν κ, οὕτως ἔστιν ὁ κ, ἀρὸς τὸν λ. Ἐπεὶ δὲ πάλιν οἱ ζθ, τῶς θ η, πολλαπλασιάσας τῶς λ β, πιπείκει. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ θ, ἀρὸς τὸν η, ὁ λ, ἀρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ θ, πρὸς τὸν η, ἔστι καὶ ὁ δ, ἀρὸς τὸν ζ, ἄρα καὶ ὡς ὁ δ, ἀρὸς τὸν ζ, ὁ λ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἔστι καὶ ὁ α, ἀρὸς τὸν κ, καὶ ὁ κ, ἀρὸς τὸν λ, ἄρα ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν κ, καὶ ὁ κ, ἀρὸς τὸν λ, οὕτως καὶ ὁ λ, ἀρὸς τὸν β, οἱ α, κ, λ, β, ἄρα ἕξῃς εἰσὶ ἀνάλογον. Ἐὼς ἄρα καὶ ἐξῆς.

Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν ὡς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγου ἔχει, ἢ παρ ἢ πλάρᾳ πρὸς τὴν πλάρᾳ.

Ἐῶσαν ἡδὲ τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ α β, πλάρᾳ δὲ αὐτῶν εἰ γ δ. λέγω ἰ ὅτι μηδὲν ἦδ' α β, εἰς μίση ἀνάλογός ἐστιν, ὁ δὲ α, ἀρὸς τὸν β, διπλασίονα λέγει ἔχει, ἢ ὁ γ, ἀρὸς τὸν δ. ὁ γ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, πιπείκει. Ἐπεὶ οὖν ὁ γ, ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν α, πιπείκει, ὡς πλάρᾳ τῷ α, τὸν δὲ δ, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν ε, πιπείκει. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ τῷ ιζ': τῷ ζ': ἐπεὶ δ' αὐτίς οἱ γ δ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τῶς ε β, πιπείκασιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ, ἀρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε, ἀρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ γ, ἀρὸς τὸν δ, εἰδείχθη καὶ ὁ α, ἀρὸς τὸν ε, ἄρα ὡς ὁ α, ἀρὸς

Eucl. Lib. 8. Fig. 9.



τὸ ε.

τὸν ε, ὅπως ὁ ε, ἀπὸς τὸν β. ὁ ε, ἄρα μίσος ἀνάλογός ἐστι τῷ αβ' ἐπεὶ δὲ ὁ α, ἀπὸς τὸν β, ἐστὶ διπλασίονα λόγῳ ἐστὶν, ἢ περὶ ὁ α, ἀπὸς τὸν ε, καὶ τὸν εθ': ὅρον τῷ ε': ὡς δὲ ὁ α, ἀπὸς τὸν ε, ἐστὶ καὶ ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, ἄρα ὁ α, ἀπὸς τὸν β, διπλασίονα λόγῳ ἔχει, ἢ περὶ ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

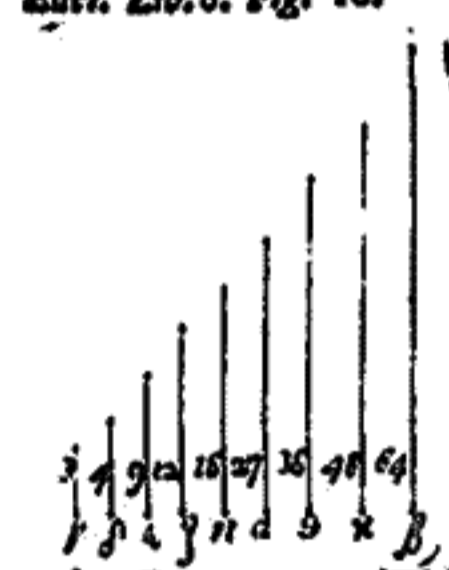
Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α .

Ἐκ τῶν δεικνύμενων, ὅτι ὁ λόγος ἔχει ἢ πλάρᾳ τῷ ἐνὸς τετραγώνου ἀπὸς τὸν τῷ ἑτέρῳ, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ ἀπὸς τετραγώνος ἀπὸς τὸν μίσος ἀνάλογον, καὶ ὁ μίσος ἀνάλογος ἀπὸς τὸν β': τετραγώνου.

Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Δύο κύβων ἀριθμῶν, δύο μίσοι ἀνάλογοι εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ κύβος ἀπὸς τὸν κύβου τριπλασίονα λόγῳ ἔχει, ἢ περὶ ἢ πλάρᾳ ἀπὸς τῷ πλάρᾳ.

Μικροῦ ἔδει τῷ δύο κύβων αβ, δύο λέγων ἐξῆς ἀνάλογους ἀριθμούς ἐμπέπτειν. Ἐστὼ πλάρᾳ τῷ μὲν α, ὁ γ, τῷ δὲ β, ὁ δ, καὶ ὁ γ, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιήσω, τὸν δὲ δ, ὡσαύτως πολλαπλ: τὸν ζ, ποιήσω. καὶ ὁ δ, ἔτι ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν η, ποιήσω. Ἀυθις ἐκάπερ τῷ γδ, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν θ κ, ποιήσωσαν. ἐπεὶ οὖν ὁ γ, ἑαυτὸν καὶ τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν εζ, ποιήσωκεν. ἔστιν ἄρα καὶ τὸν εζ': τῷ ζ': ὡς ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, ὁ ε, ἀπὸς τὸν ζ. Διὰ τῆς αὐτῆς δεικνύεται, ὅτι ἐστὶ καὶ ὁ ε, ἀπὸς τὸν ζ, ὅπως ὁ α, ἀπὸς τὸν θ, τῆς γὰρ εζ, ὁ γ, πολλαπλασιάσας τῆς αθ, ποιήσωκεν. ὡς δὲ ὁ ε, ἀπὸς τὸν ζ, εἰδείχθη καὶ ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, ἄρα ὡς ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, ὅπως ἐστὶν ὁ α, ἀπὸς τὸν θ. Ἀυθις ἐπεὶ οἱ γδ, τὸν ζ, πολλαπλασιάσασθε τῆς θ κ, ποιήσωσαν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, ὅπως ὁ θ, ἀπὸς τὸν κ, καὶ τὸν ε κ': τῷ ζ': ὡς δὲ ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, δέδεικται καὶ ὁ α, ἀπὸς τὸν θ. καὶ τὸν ε α': ἄρα τῷ ε': ὡς ὁ α, ἀπὸς τὸν θ, ὅπως ὁ θ, ἀπὸς τὸν κ. Πάλιν ἐπεὶ ὁ δ, τῆς ζ η, πολλαπλασιάσας τῆς κ β, ποιήσωκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ, ἀπὸς τὸν η, ὁ κ, ἀπὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ ζ, ἀπὸς τὸν η, ἐστὶ καὶ ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, ὁ γὰρ δ, τὸν γ, καὶ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τῆς ζ η, ποιήσωκεν. ἄρα καὶ ε α': τῷ ε': ὡς ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, ὅπως ὁ κ, ἀπὸς τὸν β. εἰδείχθησαν δὲ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἶναι καὶ οἱ α θ κ, ἄρα μικροῦ τῷ δύο κύβων αβ, δύο ἐξῆς ἀνάλογον ἀριθμοί εἰσιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐπεὶ δὲ ὁ α, ἀπὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγῳ ἔχει, ἢ περὶ ἀπὸς τὸν θ, καὶ τὸν ε α': ὅρον τῷ ε': ὡς δὲ ὁ α, ἀπὸς τὸν θ, ἐστὶ καὶ ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, πλάρᾳ ἀπὸς



πρὸς πλάρην, ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἕπιρ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α .

Ἐκ τούτων δὴλον, ὅτι μεταξὺ δύο κύβων δύο, μίσεων ἀναλόγων πιπτόντων, οἱ πέντε ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον εἰσιν ἐν τῇ λόγῳ τῶν πλάρων.

Πρότασις ΙΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὡσπύ ὁσοῖσθεποτουῦ ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἢ πολλαπλασιάσαι ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῆ τινας, οἱ γινόμενοι δὲ αὐτῶν, ἀνάλογον ἔσουσθαι, ἢ εἰ μὴ οἱ δὲ ἀρχῆς τῶν γινόμενους πολλαπλασιάσαιτες ποιῆ τινας, καὶ αὐτὰ ἀνάλογον ἔσουται. ἢ εἰ περὶ τῶν ἄκρους τῶν συμβαίρη.

Τῶν ἕδη α β γ, ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμῶν πολλαπλασιάσαι ἕκαστος ἑαυτὸν, πειρίτω τῶς δ ε ζ, πολλαπλασιάσαι δὲ ἢ τῶς δ ε ζ, πειρίτωσθαι τῶς η θ κ. Λίγω τῶς π δ ε ζ, ἢ τῶς η θ κ, ἑξῆς ἀνάλογον εἶναι. Ἐπει οὖν ἕκαστος τῶν α β γ, ἐκ τῶν πολλαπλασιάσαι τῶς, δ ε ζ, πειρίτωσθαι. εἰ δὲ δ ε ζ, περὶ τῶν εἰσι, καὶ μεταξὺ τῶν τ ε δ, ἢ ε ζ, εἰς μίσεις ἀνάλογον εἶσι τῶν ι δ: τῶ παρόντων, ἔσθωσθαι δὲ οὕτω εἰ λ μ, ἔσθαι ἄρα ὡς ὁ δ, ἀρὸς τὸν λ, ἕπιρ ὁ λ, ἀρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ὁ ε, ἀρὸς τὸν μ, ὁ μ, ἀρὸς τὸν ζ. ἔπει δὲ εἰ δ λ ε, ἀρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν ἔχει ὁ α, πρὸς τὸν β, ἢ τὸ πῶρσθαι τῶς ι δ, τῶ παρόντων, καὶ εἰ ε μ ζ, ὃν ἔχει ὁ β, ἀρὸς τὸν γ, ὁ δὲ τῶ α, πρὸς τὸν β, καὶ τῶ β, ἀρὸς τὸν γ, ὁ αὐτὸς εἶσθαι τῶ ρ κ εἰ δ λ ε, ε μ ζ, ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἶσι, ἢ ἴσθαι τῶ πλῆθος. ὡσπύ καὶ δὲ ἴσθαι ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ἔσθαι, καὶ τῶν ὡς ὁ δ, ἀρὸς τῶ ε, ἕπιρ ὁ ε, ἀρὸς τὸν ζ, ἢ τῶν ι δ: τῶ ζ: διὰ τὰ αὐτὰ δεῖχθῆσθαι, ἔσθαι καὶ εἰ η θ κ, ἑξῆς ἀνάλογον ἔσθαι. ἔπει κύβου εἶσι, ἢ μεταξὺ αὐτῶν δύο μίσεις ἀνάλογον εἶσι, ἢ τῶν ἀνωτέρω, ἔχουσθαι τῶν λόγων τῶν πλάρων, ἢ τὸ πῶρσθαι τῶς ἀνωτέρω.

Πρότασις ΙΔ': Θεώρημα.

Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνου μετρή, ἢ ἡ πλάρην τῶ αὐτῇ πλάρην μετρήσθαι, καὶ εἰ μὴ ἡ πλάρην τῆν πλάρην μετρή, καὶ ὁ τετράγωνος τῶν τετράγωνου μετρήσθαι.

Τετράγωνος ἕδη ἀριθμὸς ὁ α, μετρήτω τὸν β, περὶ τῶν. Λίγω, ὅτι καὶ ἡ πλάρην τῶ α, δηλ: ὁ γ, μετρήσθαι τὸν πλάρην τῶ β, δηλ: τὸν δ, ἢ γὰρ τῶ

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

τινὶ εἰς: τῷ παρόντι, εἰς μίση ἀλόγους εἶσι μεταξὺ τῶν α, β. ἔγω ἕτος δ' ε, οἱ α ε β, ἄρα καὶ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς, ἔχουσι ἀπὸς ἀλλήλους τὸν λόγον τῶν πλῶ-
 ρῶν. ἔπειθ' οὖν δὲ α, τὸν β, μιθεῖ, μιθήσει πάντως καὶ τὸν ε, καὶ τινὶ ζ': τῷ πα-
 ρόντι. ὡς δὲ δὲ α, ἀπὸς τὸν ε, ἕτως εἶσι καὶ δὲ γ, ἀπὸς τὸν δ, οὖν γ, ἄρα τὸν δ,
 μιθεῖ. ἔπειθ' οὖν δὲ α, τὸν ε, μιθεῖ. μιθήσω δὲ δὲ γ, τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ δὲ α,
 τὸν β, μιθεῖ. ἔπειθ' ἄρα κατὰ τὸ πόρισμα τῆς εἰς: οἱ α ε β, εἰς ἀλόγους εἶσι
 ἐν τῷ λόγῳ τῷ γ, ἀπὸς τὸν δ, οὖν δὲ γ, τὸν δ, μιθεῖ, μι-
 θεῖ ἄρα καὶ δὲ α, τὸν ε, καὶ τινὶ ζ': τῷ παρόντι, μιθεῖ
 εἶσι καὶ τὸν β. ὅπιρ εἶσι δεῖξαι.

εἰς ἀλόγους εἶσι
 Eucl. lib. 8. Fig. 12.

Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Εἰ μὲν κύβος ἀριθμὸς κύβου ἀριθμοῦ μετρή, καὶ ἢ πλῶρα τινὶ πλῶρα μετρήσει, καὶ εἰ μὲν ἢ πλῶρα τινὶ πλῶρα μετρή, καὶ ὁ κύβος τῶν κύβου μετρήσει.

ΙΔ'



Ὁ α, κύβος ἀριθμὸς, εἰ πλῶρα δὲ γ, μιθήσω τὸν β, κύ-
 βον ἀριθμὸν, εἰ πλῶρα δὲ δ. Λέγω, ὅτι καὶ δὲ γ, τὸν δ,
 μιθεῖ. εἰλήφθωσαν καὶ τινὶ εβ': τῷ παρόντι οἱ δύο μίση
 ἀλόγους ὅπως ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν α β, καὶ ἔγωσαν ἕτοι οἱ
 ε ζ. δῖλον εἶν καὶ τὸ πόρισμα: τῆς αὐτῆς εβ': ὅτι οἱ α ε ζ β,
 εἰς ἀλόγους εἶσι ἐν τῷ λόγῳ τῷ γ, ἀπὸς τὸν δ. ἔπειθ' οὖν
 δὲ α, τὸν β, μιθεῖ, μιθήσει πάντως καὶ τὸν ε, καὶ τινὶ ζ':
 τῷ παρόντι, ὡς δὲ δὲ α, ἀπὸς τὸν ε, ἕτως εἶσι δὲ γ, ἀπὸς
 τὸν δ, οὖν δὲ α, τὸν ε, μιθεῖ, μιθήσει πάντως καὶ δὲ γ, τὸν
 δ. ὅπιρ εἶσι τὸ ἀπῶν. Μιθήσω δὲ δὲ γ, τὸν δ. Λέγω καὶ
 τὸν α, μιθεῖ τὸν β. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ, ἔπειθ' οἱ α ε ζ β, εἰ-
 εἰς ἀλόγους εἶσι ἐν τῷ τῷ γ, ἀπὸς τὸν δ, λόγῳ, ἄρα ὡς
 δὲ γ, ἀπὸς τὸν δ, ἕτως εἶσι δὲ α, ἀπὸς τὸν ε, οὖν δὲ γ, τὸν
 δ, μιθεῖ, μιθήσει πάντως καὶ δὲ α, τὸν ε, μιθεῖ δὲ δὲ α,
 τὸν ε, μιθήσει εἶσι καὶ τὸν β, καὶ τινὶ ζ': τῷ παρόντι. ὅπιρ
 εἶσι δεῖξαι.



Πρότασις Ις': Θεώρημα.

Εἰ μὲν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνου ἀριθμοῦ μὴ μετρή, εἰ δὲ ἢ πλῶρα τινὶ πλῶρα μετρήσει, καὶ ἢ πλῶρα τινὶ πλῶρα μὴ μετρή, εἰ δὲ ὁ τετράγωνος τῶν τετράγωνου μετρήσει.

Δείκνυται πρὸς ἀμαρῶς, εἰ γὰρ τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνου μὴ μετρήτος; ὑποπθῆ δὲ ἢ πλῶρα τινὶ πλῶρα μετρήσει, συμβίσιται διὰ τῆς εδ': τῷ παρόντι.

Δδ

τος,