

Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Εάν ὡσιν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἰς τῆς ἡγεμονίῶν πρὸς ἕνα τῆς ἐπομέου, ὅπως ἀπαιτῆται οἱ ἡγεμονοὶ πρὸς ἀπαιτῆται τῆς ἐπομέου.

Τῶν ἤδη α β, γ δ, ἀριθμῶν ἀνάλογον ὄντων, κτίσιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὅπως εἰσὶν οἱ α γ, πρὸς τοὺς β δ. καὶ μὲν γὰρ τὸν ὑπόθεσιν, ὁ μέρος εἰσὶν ὁ α, τῷ β, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ γ, εἰς τῷ δ. καὶ δὲ τῶν ε': τῷ παρόντος, καὶ συναμφοῖροι οἱ α γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἰσὶ τῶν β δ, ὅπρις ὁ α, πρὸς τῷ β, καὶ ἐπομέως ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὅπως οἱ α γ, πρὸς τῶν β δ. ὅπρις εἶδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 7.

IB'



Πρότασις ΙΓ': Θεώρημα.

Εάν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὡσι, καὶ ἀναδιὰ ἀνάλογον ἔσονται.

Τεσσάρων ἤδη ἀριθμῶν τῶν α β, γ δ, ἀνάλογον ὄντων, ὅπως ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ἀναδιὰ ἔσονται, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὅπως ὁ β, πρὸς τὸν δ. καὶ γὰρ τῶν ὑπόθεσιν, ὁ μέρος εἰσὶν ὁ α, τῷ β, τὸ αὐτὸ εἰς τῷ γ, τῷ δ, καὶ καὶ τῶν ε': τῷ παρόντος, ὁ μέρος εἰσὶν ὁ α, τῷ γ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ β, τῷ δ. καὶ ἐπομέως, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ β, πρὸς τὸν δ. ὅπρις εἶδει δεῖξαι.



Πρότασις ΙΔ': Θεώρημα.

Εάν ὡσιν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐταῖς ἴσοι τὸ πλῆθος συν δύο λαμβανόμενοι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ οἱ ἴσου, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἀριθμῶν ἤδη τῶν α, β, γ, καὶ δ, ε, ζ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντων, καὶ συν δύο λαμβανόμενων, κτίσιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. Λέγω, ὅτι καὶ οἱ ἴσου ἔσονται, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. διὰ γὰρ τῆς ἀνωτέρω, ὅπρις εἰσὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἔσται καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ β, πρὸς τὸν ε. Ἀπὸ τῆς ἐπεί εἰσὶν ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ἔσται διὰ τῆς αὐτῆς, καὶ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν ε, ὁ γ, πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν ε, ὡς



ὡς καὶ ὁ α, ἀρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν δ, ὁ γ, ἀρὸς τὸν ζ, καὶ ἑσα-  
λάξ ἄρα ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν γ, ὁ δ, ἀρὸς τὸν ζ. ὅπερ καὶ πρὸς εἶξεν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α .

Ἐκ τῶν δὲ ἄνω, ὅτι καὶ πάντων, εἰάν τις ὁμοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς  
ἴσοι καὶ πλείους δὲ ἴσοι λαμβανόμενοι ἐκ τῆς αὐτῆς λόγου, καὶ συνὶ δύο λαμβανόμε-  
νοι ἐκ τῆς αὐτῆς λόγου ἴσονται. εἰ γὰρ μὲν, ἔτε δὲ ἴσοι ἐκ τῆς αὐτῆς λόγου ἴ-  
σονται.

Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμὸν τινα μερῆ, ἰσάνικ δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλου τινα  
ἀριθμὸν μερῆ, καὶ ἐμβαλάξ ἰσάνικ ἢ μονὰς τῶν τρίτου ἀριθμὸν με-  
ρῆσα, καὶ ὁ β': τῶν δ':

Μονὰς ἔστω ἡ α, μερῆσαι τὸν βγ, καὶ ὁ δ, ἀριθμὸς τῆς εζ, ἰσάνικ. Λέγω,  
ὅτι μερῆσαι ἰσάνικ καὶ ἡ α, μετὰς τὸν δ, καὶ ὁ βγ, τὸν εζ. καὶ μὲν γὰρ τὸν δ  
πρόθεσις, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐκ τῆς βγ, ἴσαι τῆ α, πούτοι ἀριθμοὶ εἰσὶν ἐκ τῆ  
εζ, ἴσοι τῆ δ. Διακρίθω τῶν αὐτῶν ὁ μὲν βγ, εἰς τὰς ἴσας μονάδας τῆ α, δεικνύ-  
ται βκ, κδ, δε, εζ, ὁ δὲ εζ, εἰς τὰς τῆ δ, ἴσους ἀριθμὸς, τὰς εκ, κλ, λζ,  
ἔσαι ἄρα κατὰ τὸν δ': ὡς ἡ βκ, μονὰς ἀρὸς τὸν εκ, οὕτως ἡ κδ, ἀρὸς τὸν  
κλ, καὶ ἡ δε, ἀρὸς τὸν λζ, καὶ δὲ τὸν εβ': καὶ παρόντες, καὶ παρόντες,  
ἔσαι ὡς ἡ βκ, μονὰς, ἀρὸς τὸν εκ, ἀριθμὸν, οὕτως ὅλος  
ὁ βγ, ἀρὸς ὅλον τὸν εζ, ἢ δὲ βκ, μετὰς ἴση ἐστὶ τῆ α,  
καὶ ὁ εκ, ἀριθμὸς ἴσος τῆ δ. ἄρα καὶ ὡς ἡ α, μετὰς ἀρὸς τὸν  
δ, γ': ἀριθμὸν, οὕτως εἰσὶν ὁ βγ, β': ἀρὸς τὸν εζ, δ': ὅ-  
περ εἶδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 8.



Πρότασις Ιζ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσασαυτες ἀλλήλικ ποιῶ-  
σί τινας, οἱ γερόμενοι δὲ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοισ  
ἔσονται.

Τῶν δύο ἔστω ἀριθμῶν α, β, τῶ μὲν α, τὸν β, πολλα-  
πλασιάσασαυτες, γυνίθω ὁ γ, τῶ δὲ β, τὸν α, πολλαπλασ-  
γυνίθω ὁ δ. Λέγω δὲ τὸν γ, καὶ δ, ἴσους εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ  
ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πιποίηκε, ὁ β, ἄ-  
ρα τὸν γ, μερῆσαι καὶ τὰς ἐκ τῆ α, μονάδας, διὰ τῶ ε': ὅ-  
ρα. μερῆσαι δὲ καὶ ἡ ε, μονὰς τὸν α, καὶ τὰς ἐκ τῆ αὐτῆς μο-  
νάδας, ἰσάνικ ἄρα ἡ ε, μονὰς μερῆσαι τὸν α, καὶ ὁ β, τὸν  
γ, καὶ διὰ τὰς αὐτῆρας, ἰσάνικ ἢ μονὰς ἔτι μερῆσαι τὸν β,



καὶ δ

# ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ. 185

καὶ ὁ α, τὸν γ· διχθίσται ἰσάκις ἔτι μιθεῖν ἢ ε, μονὰς τὸν β, καὶ ὁ α, τὸν δ· ἄρα ὁ αὐτὸς α, ἰσάκις μιθεῖ τὸν π γ, καὶ δ· καὶ ἔπομένως οἱ γ, δ, ἴσοι. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

## Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Α': Ἐκ τῶν δῖλων, ὅτι εἰς ἀριθμὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῆ τινα, ὁ μὲν πολλαπλασιάζων μιθεῖ τὸν γινόμενον καὶ τὰς ἐν τῇ πολλαπλασιαζομένῃ μονάδας, ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος τὸν αὐτὸν, καὶ τὰς ἐν τῇ πολλαπλασιάζοντι.

## Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

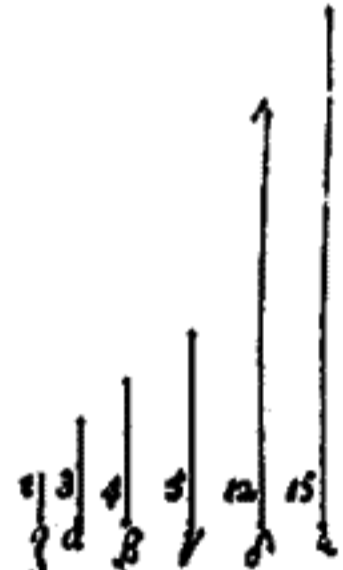
Β': Ἐπιλίκα ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῆ τινα, ἔσαι ὡς ἢ μονὰς ἀρὸς τὸν πολλαπλασιάζοντα, ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀρὸς τὸν γινόμενον. ὡς εἰς ἀριθμὸς εἰαυτὸν πολλαπλασιάσας, ἔσαι ὡς ἢ μονὰς ἀρὸς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἔτσι ὁ αὐτὸς ἀρὸς τὸν γινόμενον.

## Πρότασις ΙΖ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῆ τινας, οἱ γινόμενοι ἔξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τὰς πολλαπλασιασάσιν.

Ἀριθμὸς εἶδη ὁ α, τὰς β γ, πολλαπλασιάσας τὰς δ ε, ποιείτω. λέγω δὲ, ὅτι εἶσιν, ὡς ὁ β, ἀρὸς τὸν γ, ὁ δ, ἀρὸς τὸν ε. ἐπεὶ γάρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. διὰ τῷ β': ποσίσματος τῆς ἀνωτέρω, ἔσαι ὡς ἢ ζ, μονὰς ἀρὸς τὸν α, ὁ β, ἀρὸς τὸν δ. ὡσαύτως ἐπεὶ ὁ α, αὐθις τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω. ἔσαι διὰ τῷ αὐτῷ, ὡς ἢ ζ, μονὰς ἀρὸς τὸν α, ὁ γ, ἀρὸς τὸν ε. καὶ διὰ τῆς ε α': τῷ ε: ὡς ὁ β, ἀρὸς τὸν δ, ὁ γ, ἀρὸς τὸν ε. ἄρα διὰ τῆς ε γ': τῷ παρόντος, καὶ ἐναλλάξ ὡς ὁ β, ἀρὸς τὸν γ, ὁ δ, ἀρὸς τὸν ε. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

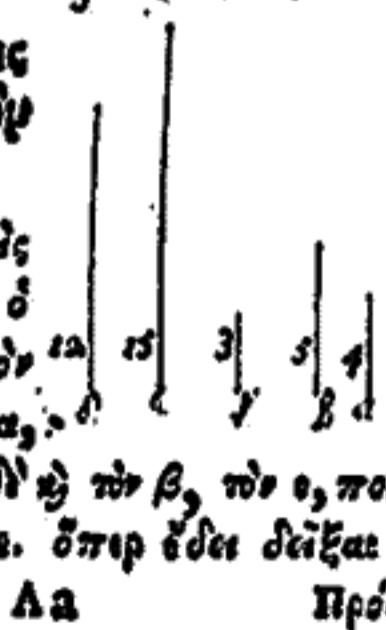
Eucl. lib. 7. Fig. 9.



## Πρότασις ΙΗ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσασιν ποιῶσιν τινας, οἱ γινόμενοι ἔξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τὰς πολλαπλασιάσασιν.

Δύο ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, τὸν γ, πολλαπλασιάσασιν τὰς δ, ε, ποιείτωσαν. λέγω, ὅτι εἶσιν ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν β, ὁ δ, ἀρὸς τὸν ε. ἐπεὶ γάρ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω, καὶ ὁ γ, ἄρα διὰ τῆς ε α': τῷ παρόντος, τὸν α, πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν δ, ποιείτω. πολλαπλασιάσας δὲ καὶ τὸν β, τὸν ε, ποιείτω. ἄρα διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν β, ὁ δ, ἀρὸς τὸν ε. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

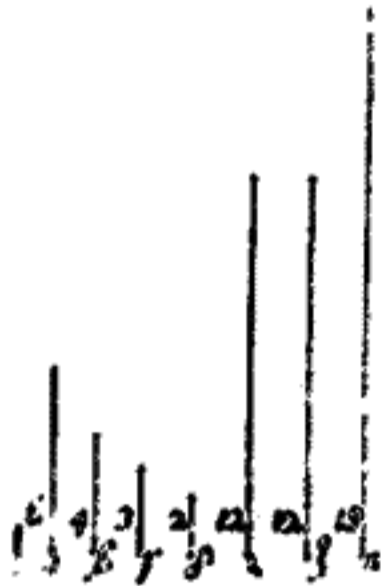


Λα Πρό-

Πρότασις ΙΘ': Θεώρημα.

Εὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾦσιν, ὁ ἐκ τῶ α': καὶ δ': γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶ β': καὶ γ': γινόμενῳ ἀριθμῷ, καὶ εἰ μὴ ὁ ἐκ τῶ α': καὶ δ': γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ἢ τῷ ἐκ τῶ β': καὶ γ': οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Τέσσαρις ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α β, γ δ, ἕσονται ἀνάλογον ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν β, ὁ γ, ἀρὸς τὸν δ. καὶ ὁ μὲν α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω. ὁ δὲ β, τὸν γ, πολλαπλασ. τὸν ζ, ποιείτω. λέγω δὲ τὸς ε ζ, ἴσους εἶναι. πολλαπλασιασάτω ἴτι ὁ α, τὸν γ, καὶ τὸν η, ποιείτω. δείκνυται. Ἐπεὶ ὁ α, τὸς δ γ, πολλαπλασιάσας τὸς η, πιποίηκεν. ἔσται ἄρα διὰ τῶς ε ζ': τῶ παρόντος, ὡς ὁ γ, ἀρὸς τὸν δ, ὁ η, ἀρὸς τὸν ε, ὡς δὲ ὁ γ, ἀρὸς τὸν δ, ἔστι καὶ ὁ α, ἀρὸς β. ἄρα καὶ ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν β, ὁ η, ἀρὸς τὸν ε. Ἀλλ' οἱ εἰπέ οἱ α, β, τὸν γ, πολλαπλασιάσασθε τὸς η, ζ, πιποίηκασιν. ἔσται ἄρα διὰ τῶς ἀνωτέρω, ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν β, ὁ η, ἀρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ α, ἀρὸς τὸν β, εἰδείχθη καὶ ὁ η, ἀρὸς τὸν ε. ἄρα οἱ ε ζ, ἀρὸς τὸν αὐτὸν η, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον, καὶ ἕπομένως διὰ τῶς θ': τῶ ε': οἱ ε ζ, ἴσοί εἰσιν, ὅπερ ἔστι τὸ α'. λέγω δὲ ὅτι, ε. *Eucl. Lib. 7. Fig. 10.*  
 καὶ ὁ ε, ἐκ τῶ α': καὶ δ': γινόμενος, ἴσός ἐστι τῷ ἐκ τῶ β': καὶ γ': διότι τῷ ζ, ἔσται ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν β, ὁ γ, ἀρὸς τὸν δ. καὶ γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, εἰπέ ὁ α, τὸς γ, δ, πολλαπλασιάσας τὸς η, πιποίηκεν. ἄρα διὰ τῶς ε ζ': ὡς ὁ γ, ἀρὸς τὸν δ, ἔσται ὁ η, ἀρὸς τὸν ε, τυπέσει τὸν ζ. (ἴσοι γὰρ οἱ ε, ζ.) Ἀλλ' οἱ εἰπέ οἱ α, β, τὸν γ, πολλαπλασιάσασθε τὸς η, ζ, πιποίηκασιν. ἄρα διὰ τῶς ἀνωτέρω ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν β, ὁ η, ἀρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ η, ἀρὸς τὸν ζ, εἰδείκται καὶ ὁ γ, ἀρὸς τὸν δ. ἄρα καὶ ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν β, ὁ γ, ἀρὸς τὸν δ, ἔσται. ὅπερ ἔστι τὸ β'. Ἐὰν ἄρα, καὶ τῶ ε ζ'.



Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Εὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσός ἐστι τῷ ἀπὸ τῶ μέσου. εἰ μὴ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἢ τῷ ἀπὸ τῶ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Τρεῖς ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, γ, ἀνάλογον ἕσονται, δηλ: ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν β, ἔσται ὁ β, ἀρὸς τὸν γ. λέγω, ὅτι ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσός ἐστι τῷ ἀπὸ τῶ β. Το γὰρ δ, ἴσος τῷ β, γινόμενος, ἔσται ὡς ὁ α, ἀρὸς τὸν β, ἔσται ὁ δ, ἀρὸς τὸν γ, καὶ διὰ τῶς ἀνωτέρω, ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος ἔσται τῷ ὑπὸ τῶν β δ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶ β δ, β δ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ. 187

βδ, ἰσός ἐστι τῆ ἀπὸ τῆ β, μόνου. ἄρα ὁ ὑπὸ τῆ α γ, ἰσός ἐστι τῆ ἀπὸ τῆ β, ὅτιρίεστι τὸ α:

EucL. Lib.7. Fig. 11'

Ἔστω δὲ ἔτι ὁ ὑπὸ τῆ α γ, ἴσος τῆ ἀπὸ τῆ β. Λέγω, ὅτι ἴσαι αἶς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὅπως ὁ β, πρὸς τὸν γ. Τὴ γάρ δ, αἰθις ἴσου τῆ β, ὑποκειμένη, ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τῆ α γ, ἰσός ἐστι τῆ ὑπὸ τῆ β δ, ἴσαι δια τὴ ἀνώτερω, αἶς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν γ, ἔστι δὲ ὁ δ, ἴσος τῆ β, ἄρα καὶ αἶς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὅπως ἴσαι ὁ β, πρὸς τὸν γ, καὶ ἔστι τὸ β': ὅπιν εἶδει δείξαι.

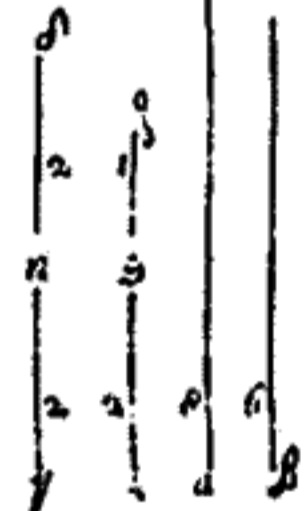


Πρότασις ΚΑ': Θεώρημα.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῆ τῶν αὐτῶν λόγου ἔχοντων αὐταῖς, μέρησι τῆ τῶν αὐτῶν λόγου ἔχοντες αὐταῖς ἰσάκις, ὡς ὁ μείζων τῶν μείζονα, καὶ ἐλάττω τῶν ἐλάττωμα.



Ἔστωσαν ἤδη ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τῶν αὐτῶν λόγον ἔχοντων αὐταῖς οἱ γ δ, ε ζ. ἔστω δὲ καὶ αἶς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ δ, πρὸς τὸν ε ζ. Λέγω, ὅτι ὁ γ δ, μέρησι τὸν α, καὶ ὁ ε ζ, τὸν β, ἰσάκις, τῆσιν ἑκάστου ἑκατέρου μέρος ἐστὶ καὶ ἓ μέρη. εἰ γάρ διωατὸν ἔστωσαν μέρη, α ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ γ δ, τῆ α, τὰ αὐτὰ ἐστὶ καὶ ὁ ε ζ, τῆ β, καὶ τῶν ὑπόθεσιν. διαιριθθέντων δὲ τῶ μὲν γ δ, εἰς τῆ τῆ α, μέρη, τῆ γ η, η δ, τῆ δὲ ε ζ, εἰς τῆ τῆ β, τῆ ε θ, θ ζ, ἴσονται ἴσα τῆ γ η, η δ, τῆ ε θ, θ ζ, τῆ πλείθει. καὶ ἐπομένως ἴσαι αἶς ὁ γ η, πρὸς τὸν ε θ, ὅπως ὁ γ δ, πρὸς τὸν ε ζ, ἄρα οἱ γ δ, ε ζ, ἐλάχιστοι ἐστὶ τῆ αὐτῶ λόγῳ εἰς τῆ γ η, ε θ, ἐλάττωσιν αὐτῶν, ὅπιν ἀπὸ πον, ἕκ ἄρα μέρη, ἀλλ' ἑκάστου μέρος ἐστὶν ἑκατέρου. ὅπιν εἶδει δείξαι.



Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὡς ἑρὶς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐταῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενοι καὶ ἕν τῆ αὐτῆ λόγῳ, ἢ δὲ τεταραγμένῃ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἕν τῆ αὐτῆ ἔσοιται λόγῳ.

Τειῶν ἤδη ἀριθμῶν τῆ α, β, γ, καὶ ἄλλων αὐταῖς ἴσων τὸ πλῆθος τῆ δ ε ζ, ἔστω ἡ ἀναλογία παραγαμῖνη, τῆσιν αἶς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, αἶς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. Λέγοι, ὅτι ἐστὶ καὶ αἶς ὁ α, πρὸς τὸν γ.

λα 2

αρός πόν γ, ο δ, αρός πόν ζ. Ἐπει γάρ οἱ α β εζ, εἰσὶν ἀνάλογον, ὁ δ ὑπὸ τῷ α ζ, ἰσός ἐστι πρὸς τὸν β ε, καὶ πόν ι θ: διὰ τῆς αὐτῆς ἔτι καὶ ὁ ὑπὸ τῷ γ δ, ἰσός ἐστι πρὸς τὸν β ε, ἀρα ὁ ὑπὸ τῷ α ζ, ἰσός ἐστι πρὸς τὸν γ δ, καὶ πόν α: ἀξίωμα. καὶ διὰ τῆς προσημαίνουσας προτάσεως, ὡς ὁ α, αρός πόν γ, ο δ, αρός πόν ζ, ὅπῃ ἴδαι δεῖξαι.

Εὐκλ, βιβ. 7. Πρ. 12.



**Πρότασις ΚΓ': Θεώρημα.**

**Οἱ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τῶν αὐτῶν λόγου ἐχόντων αὐταῖς.**

Ἀριθμοὶ ἦδη εἰ α β, πρώτοι αρός ἀλλήλους ἴσωςαν. Λίγω, ἔτι ἐλάχιστοί εἰσι πόν τόν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐταῖς, εἰ γάρ μὴ, ἴσονται τινες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ πῶς α β. ἴσωςαν πίνω ὑπὸ εἰ γ δ, καὶ ἔχῃ ὡς ὁ α, αρός πόν β, ο γ, αρός πόν δ, διὰ τῆς α β. ἀρα ὁ γ, πόν α, καὶ ὁ δ, πόν β, ἰσάκις μιτρώσει, μιτρώπυσαν καὶ πῶς ἐν τῇ ε, μονάδας αἱ γ δ, πῶς α β. καὶ ὁ ε, ἀρα πῶς α β, μιτρεῖ κατὰ πῶς ἐν τῷ γ, καὶ δ, μονάδας. ἀρα εἰ α β, πρώτοι αρός ἀλλήλους ὄντες, κατὸν μέτρον ἔχουσι πόν ε, ὅπῃ ἄππον. ἀρα εἰ α β, ἐλάχιστοί εἰσιν. ὅπῃ ἴδαι δεῖξαι.



**Πρότασις ΚΔ': Θεώρημα.**

**Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τῶν αὐτῶν λόγου ἐχόντων αὐταῖς πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.**

Οἱ α β, ἦδη ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ὄντες, πρώτοι αρός ἀλλήλους ἴσονται. εἰ γάρ μὴ, μιτρώσειν αὐτῶς ἀριθμοὶ, καὶ ἴσω ὑπὸς ὁ γ, καὶ ἴσάκις μὲν ὁ αὐτὸς γ, πόν α, μιτρεῖ, πσαῦται μονάδες ἴσωςαν ἐν τῇ δ, ὁσάκις δὲ πόν β, πσαῦται ἴσωςαν ἐν τῇ ε. ὁ γ, πίνω πῶς δ ε, πολλαπλασιάζουσαι πῶς α β, πῶς εἰσιν. διὰ τῆς ι ζ: ἀρα πῶ παρόντες, ἴσων ὡς ὁ α, πρὸς πόν β, ο δ, αρός πόν ε, ἀρα οἱ δ ε, ἐλάχιστοι πόν α β, ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶν αὐταῖς, ὅπῃ ἄππον. οἱ ἐλάχιστοι ἀρα ἀριθμοὶ καὶ πῶ ἴξῃς.



Πρότασις ΚΕ': Θεώρημα.

Εάν δύο αριθμοὶ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὸν ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρώτος ἔσται.

Eucl. lib. 7. Fig. 13.

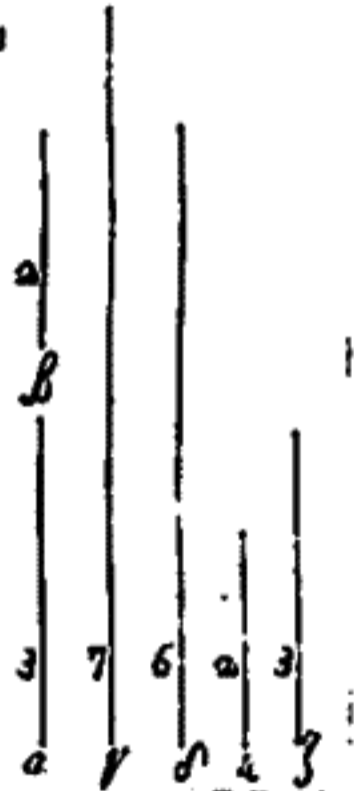


Τῶν α β, ἢ δὴ ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ὄντων, ὁ γ, πὸν α, μίξων πρὸς τὸν β, πρώτος ἔσται. εἰ γὰρ μὴ, μίτρισκε τις αὐτὸς ἀριθμὸς, καὶ ἔστω ἕτερος ὁ δ. ἐπεὶ τοίτου ὁ δ, πὸν γ, μίτριῃ, ὁ δὲ γ, πὸν α, ὁ δ, ἄρα καὶ πὸν α, μίτριῃ. μίτριῃ δὲ καὶ πὸν β, ἄρα οἱ α β, πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι πὸν δ, ἀριθμὸν. ὅπιρ ἄπορον. Εἰ δὲ ἄρα δύο ἀριθμοὶ, καὶ τὰ ἕξῃς.

Πρότασις Κς': Θεώρημα.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινα ἀριθμὸν πρώτοι ὦσι, καὶ ὁ ἕξ αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρώτος ἔσται.

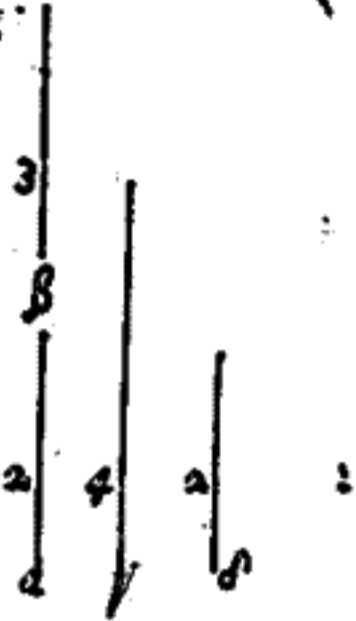
Ἀριθμοὶ ἢ δὴ οἱ α β, πρὸς τὸν γ, πρώτοι ἔσωσαν, καὶ ὁ γινόμενος δὲ ἕξ αὐτῶν δ. Τὸν δ, λίγω πρῶτον εἶναι, πρὸς τὸν γ. εἰ γὰρ μὴ, μίτρισκε τις ἀριθμὸς αὐτῶν, καὶ ἔστω ἕτερος ὁ ε. ὁ ε, ἄρα πὸν γ, μίξων πρὸς τὸν α, πρώτος ἔσται διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὁσαῖς δὲ ὁ ε, πὸν δ, μίτριῃ, πεσαῦται μονάδεις ἐν τῇ ζ, ἔσωσαν. ἄρα καὶ ὁ ζ, πὸν δ, μίτριῃ καὶ πρὸς ἐν τῇ ε, μονάδεις. καὶ διὰ τῆς ποσῆματός τῆς ε': ὁ ε, πὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ἀλλάγε καὶ ὁ α, πὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν δ, πεποίηκεν. ἄρα καὶ πὸν ε δ': τῶ παρόντος, ἔσται ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ β, πρὸς τὸν ζ, οἱ δὲ ε, καὶ α, πρώτοι εἶσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς προδείκνυται. ἄρα διὰ τῆς κ α': ὁ ε, πὸν β, μίτριῃ, καὶ ὁ α, πὸν ζ, ὁ δὲ ε, καὶ πὸν γ, μίτριῃ, καὶ πὸν ὑπόθισιν. οἱ β γ, ἄρα πρώτοι ὄντες πρὸς ἀλλήλους, κοινὸν μέτρον ἔχουσι πὸν ε, ἀριθμὸν. ὅπιρ ἄπορον. ὁ δ, ἄρα πρώτος ἔσται πρὸς τὸν γ, ὅπιρ εἶδει δεῖξαι.



Πρό-

Εάν δύο αριθμοί πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τῶ ἐνὸς αὐτῶ γινόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρώτος ἔσται.

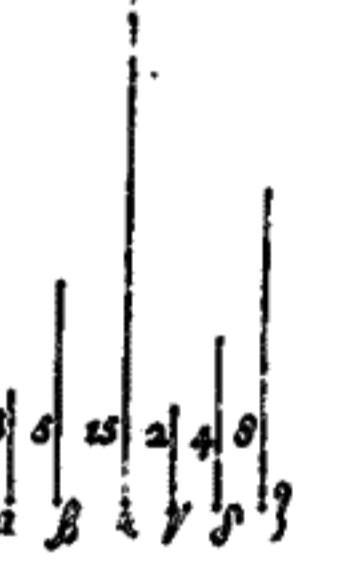
Δύο ἄδη ἀριθμῶν τῶ α, β, πρώτων πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τῶ α, γινόμενος ἀριθμὸς, κτίσιν ὁ γ, πρὸς τὸν β, ἀρῶπις ἔσται. Ἐὰν γὰρ ἴσος τῶ α, ὁ δ. Ἐπειὶ κτίσιν ὁ α, ἀρῶπις ἔστι πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ ὁ δ, ἀρῶπις ἔστι πρὸς τὸν αὐτὸν β. καὶ διὰ τῶ ἀνωτέρω, ὁ ὑπὸ τῶν αδ, γινόμενος ἀριθμὸς, ἀρῶπις ἔστι πρὸς τὸν β, ὁ δὲ γ, ὁ ἐκ τῶ α, γινόμενος, ἴσος ἔστι τῶ ὑπὸ τῶ αδ, γινόμενον, καὶ τὸν β. ὅροι. ὁ γ, ἄρα πρὸς τὸν β, πρώτος ἔστιν. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.



Πρότασις ΚΗ: Θεώρημα.

Εάν δύο αριθμοί πρὸς δύο ἀριθμούς ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρώτοι ὦσι, καὶ οἱ ἄξ αὐτῶν γινόμενοι, πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο ἄδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, πρὸς ἑκάτερον τὸν γ, δ, πρώτοι ἔσονται, καὶ ἐκ μὲν τῶ α, πρὸς τὸν β, ὁ ε, γινόμενος, ἐκ δὲ τῶ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ζ. Λέγω πῶς ἔξ, ἀρῶπις πρὸς ἀλλήλους ἔσται. Ἐπειὶ γὰρ οἱ α, β, πρὸς ἑκάτερον τῶν γ, δ, ἀρῶπις εἰσιν, ἄρα διὰ πῶς κς: καὶ ὁ γινόμενος ὑπὸ τῶ α, β, κτίσιν ὁ ε, πρώτος ἔστι πρὸς ἑκάτερον τῶν γ, δ. Ἀξθεις ἔπειτα οἱ γ, δ, ἀρῶπις εἰσι πρὸς τὸν ε, διὰ τῶ αὐτῶ κς: καὶ ὁ ὑπὸ τῶν γ, δ, γινόμενος, ἔστι ὁ ζ, ἀρῶπις ἔστι πρὸς τὸν ε, ὅπερ εἶδει δεῖξαι.



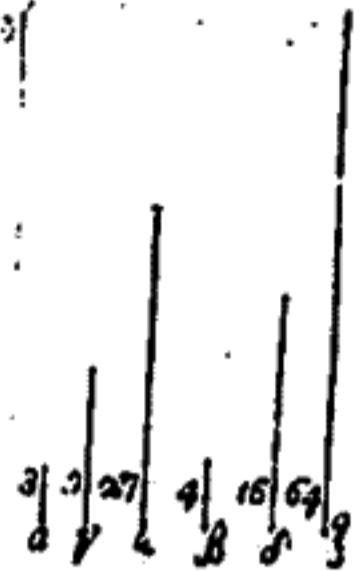
Πρότασις ΚΘ: Θεώρημα.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, ἡ πολλαπλασιασὰς ἑκάτερος ἑαυτῶν ποιῆ τιμα, οἱ γινόμενοι ἄξ αὐτῶν πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ οἱ ἄξ ἀρχῆς τῶν γινόμενικ πολλαπλασιασάσαστες ποιῶσί τιμας, καὶ κῆμοι πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, ἡ αἱ περὶ τῶν ἀκρῶν τῶτο συμβαίμα.

Δύο ἄδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσασιν, καὶ ὁ μετὰ α, πρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος τὸν γ, ποιείτω. πρὸς δὲ τὸν γ, τὸν ε, ποιείτω. ὁ δὲ β, πρὸς ἑαυτὸν μετὰ πολλαπλασιαζόμενος τὸν δ, ποιείτω, πρὸς δὲ τὸν δ, τὸν ζ.

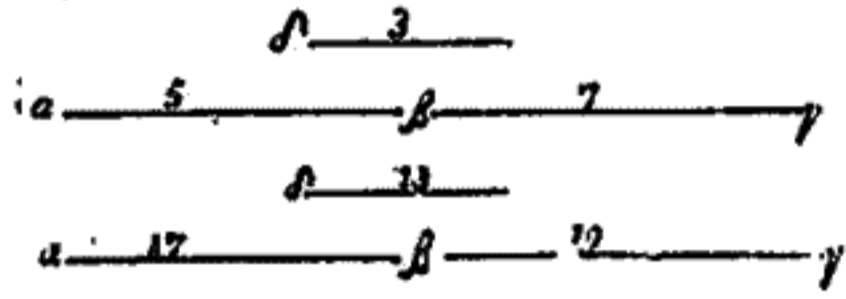


δ, τὸν ζ. Λέγω πὺς γ δ, εζ, πρώτως πρὸς ἀλλήλους εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, ἀρῶ-  
 πι ἀρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐκ δὲ τῶ α, γίγοντι ὁ γ, ὁ γ, Eucl. lib. 7. Fig. 12.  
 ἄρα πρὸς τὸν β, διὰ πῆς κζ': πρώτως εἶναι. Ἀὐθαίς ἔπει-  
 εὶ γ β, ἀρῶπι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐκ δὲ τῶ β, γίγοντι ὁ  
 δ, διὰ πῆς αὐτῆς ἄρα κζ': καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, πρώτως εἶναι,  
 ὅπιρ εἶσι τὸ δ: εἴτα ἔπει οἱ α β, πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἶ-  
 σι, καὶ ὁ δ, ἐκ τῶ β, γίγοντι, ὁ δ, ἀρὸς τὸν α, ἀρῶτός  
 εἶναι, ὡς ἀμρόπροι οἱ α, γ, ἀρὸς ἑκάπρον τῶ β δ, πρῶ-  
 τί εἶσι, καὶ διὰ πῆς κη': ὁ ὑπὸ τῶ α γ, γινόμενος, κῆσι  
 ὁ ε, ἀρὸς τὸν ὑπὸ τῶ β δ, κῆσι τὸν ζ, πρώτως εἶναι. ὅ-  
 πιρ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις Α': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ὡσι, καὶ συμαμφότερος πρὸς  
 ἑκάτερον αὐτῶν πρώτως εἶναι, καὶ εἰς συμαμφότερος πρὸς ἑμα-  
 τιὰ αὐτῶν, καὶ οἱ δὲ ἄρχῆς ἀριθμοὶ πρώτως πρὸς ἀλλήλους εἶ-  
 σοιται. Eucl. lib. 7. Fig. 16.



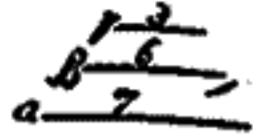
Δύο ἴδῃ ἀριθμοὶ οἱ α β, β γ,  
 ἀρῶτοι ἀρὸς ἀλλήλους ἔσωσαν τὸ  
 πρῶτον. Λέγω, ὅτι καὶ συμαμ-  
 φότερος αὐτῶν δηλ: ὁ α γ, ἀρὸς  
 τὸν α β, πρώτως εἶναι. εἰ γὰρ μή,  
 μιρήσει τις αὐτῆς ἀριθμὸς, καὶ ἔσω ὅτις ὁ δ, εἴ ἢ ὁ δ, τὸν α γ, καὶ α β,  
 μιρεῖ, μιρεῖ πάντως καὶ τὸν β γ, μιρεῖ καὶ τὸν α β, οἱ α β, ἄρα β γ, ἀρῶ-  
 πι ἀρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν δ, ὅπιρ ἄποποι. οἱ α β, ἄρα,  
 α γ, ἀρῶπι ἀρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

Ἐῶσαν δ᾽ ἄποποι οἱ α γ, α β, ἀρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω καὶ πῆς α β, β γ,  
 ἀρῶτως εἶναι. εἰ γὰρ μή, μιρήσει τις αὐτῆς ἀριθμὸς, καὶ ἔσω ὁ δ. ἄρα ὁ δ, πῆς  
 α β, β γ, μιρῶν, μιρήσει πάντως καὶ τὸν α γ, μιρεῖ δὲ καὶ τὸν α β, οἱ α γ,  
 ἄρα α β, πρώτοι ἀρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν δ, ὅπιρ ἄπο-  
 ποι. οἱ α β, ἄρα β γ, πρώτοι ἀρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. ὅπιρ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΑ': Θεώρημα.

Α'πας πρώτος αριθμός πρὸς ἅπαντα ἀριθμοὺς, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶ-  
τός ἐστι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 17.



Πρῶτος ἦδη ἀριθμὸς ὁ  $\alpha$ , τὸν  $\beta$ , μὴ μετρεῖτω. Λέγω τὸς  $\alpha$ ,  $\beta$ , πρῶτως πρὸς ἀλλήλους εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, μίξεισιν αὐτοὺς ἀριθμὸς, ἐπὶ ἕνω ὅπως ὁ  $\gamma$ . ὁ  $\gamma$ , τίνων ἀριθμὸς ἕκ ἐστιν ὁ αὐτὸς ἐφ' ἃ ἢ γὰρ μετρεῖ τὸν  $\beta$ , ὁ  $\alpha$ , ὁ δὲ  $\gamma$ , μετρεῖ. ἐπεὶ οὖν ὁ  $\gamma$ , τὸς  $\beta$ ,  $\alpha$ , μετρεῖ, ὁ  $\alpha$ , ἄρα πρῶτος ὡς ὑπ' ἀριθμῷ μίξειται, ὅπερ ἄπρον. οἱ  $\alpha$ ,  $\beta$ , ἄρα πρῶτοι ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσωντες ἀλλήλους ποιήσῃ τινα, τὸν δὲ γινόμενον ἔξ αὐτῶν μετρή τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἕνα τὸν ἔξ ἀρχῆς μετρήσει.

Δύο ἦδη ἀριθμοὶ οἱ  $\alpha$ ,  $\beta$ , πολλαπλασιάσωντες ἀλλήλους, τὸν  $\gamma$ , ποιήσωσιν. μίξειτω δὲ τὸν  $\gamma$ , ἀριθμὸν ὁ  $\delta$ , πρῶτος. Λέγω, ὅτι ὁ  $\delta$ , ἐπὶ ἕνα ἢ ὁ  $\alpha$ ,  $\beta$ , μίξεισει, μὴ μετρήσει τίνων ὁ  $\delta$ , τὸν  $\alpha$ , μετρήσει πάντως τὸν  $\beta$ . ὅσακις γὰρ ὁ  $\delta$ , τὸν  $\gamma$ , μετρεῖ, περὶ αὐτῶν μονάδων ἕνωσας ἐν τῷ  $\epsilon$ , οἱ  $\delta$ ,  $\epsilon$ , ἄρα ἑαυτὸς πολλαπλασιάσωντες, τὸν  $\gamma$ , πιπονήκασιν, ἀλλὰ καὶ οἱ  $\alpha$ ,  $\beta$ , πολλαπλασιασθέντες ἀλλήλους τὸν αὐτὸν  $\gamma$ , πιπονήκασιν. καὶ τὸν  $\epsilon$ : ἄρα, ἕνωσας ὡς ὁ  $\delta$ , ἀπὸς τὸν  $\alpha$ , ὅπως ὁ  $\beta$ , ἀπὸς τὸν  $\epsilon$ , οἱ δὲ  $\alpha$ ,  $\delta$ , εἰσὶ πρῶτοι, ἄρα καὶ τὸν  $\alpha$ : ὁ  $\delta$ , τὸν  $\beta$ , μετρεῖ, καὶ ὁ  $\alpha$ , τὸν  $\epsilon$ . διὰ τῶν αὐτῶν δευχθένεται, ὅτι ἕνα ὁ  $\delta$ , τὸν  $\beta$ , ἢ μετρεῖ, τὸν  $\alpha$ , μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

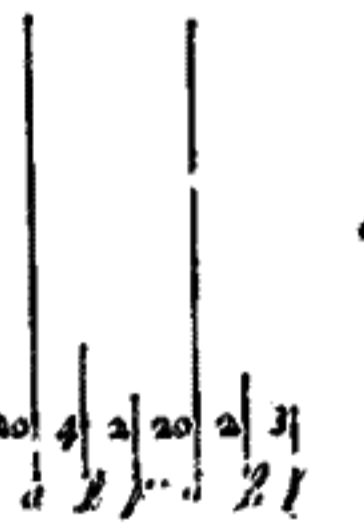
Eucl. Lib. 7. Fig. 18.



Πρότασις ΛΓ': Θεώρημα:

Α'πας σύμθετος ἀριθμὸς, ὑπὸ πρώτου τιμὸς ἀριθμῷ μετρεῖται.

Σύμθετος ἦδη ἀριθμὸς ἕνω ὁ  $\alpha$ . Λέγω, ὅτι ὑπὸ πρώτου τιμὸς ἀριθμῷ μετρεῖται. μετρήτω γὰρ αὐτὸν ὁ  $\beta$ , εἰ οὖν ὁ  $\beta$ , πρῶτός ἐστιν, εἴη ἂν τὸ ζητούμενον, εἰ δὲ μὴ, μετρήτω τὸν  $\beta$ , ὁ  $\gamma$ , ὅς ἐστι τὸν  $\alpha$ , μίξεισει. εἰ δὲ αὐθις ὁ  $\gamma$ , πρῶτός ἐστι, καὶ τὸν  $\alpha$ , σύμθετος μίξει, δέδεικται τὸ



προπθεσ. εἰδὲ μὴ, μίθειται καὶ τὸν γ, ἔπρος, ὅς μίθειται καὶ τὸν α. καὶ πῶς  
 εἶδ' ἐξῆς γινομένη, ἀριθμῶνται τὸς δ: ἀριθμὸς τὸν α, μίθειται. εἰ γὰρ μὴ, μί-  
 θήσεται τὸν α, ἀπειροὶ ἀριθμοὶ, ὅπρι ἐν ἀριθμοῖς ἀδιώατο, ὡρισμένοι γὰρ.  
 καὶ ἄλλως. Euseb. Lib. 7. Fig. 19.

Εὐριθέτω τῷ α, συυθέτου ἀριθμῷ ὁ ἐλάχιστος πῶν μι-  
 θήσεται αὐτὸν, καὶ ἔσω ὁ β. Λέγω τὸν β, πρῶτον εἶναι,  
 εἰ γὰρ μὴ, μίθεισεται αὐτὸν ἀριθμὸς, καὶ ἔσω ἔπος ὁ γ.  
 ὁ γ, ἀρα ἐπεὶ τὸν β, μίθει, μίθει πάσως καὶ τὸν α, καὶ  
 ἔστιν ἐλάχιστος τῷ β, ὁ δὲ β, εἶναι, ὁ ἐλάχιστος πῶν τὸν α,  
 μίθεισεται, ὅπρι ἀπποσ, ἀρα ὁ β, πρῶτός ἐστι.

**Πρότασις Λ Δ': Θεώρημα.**

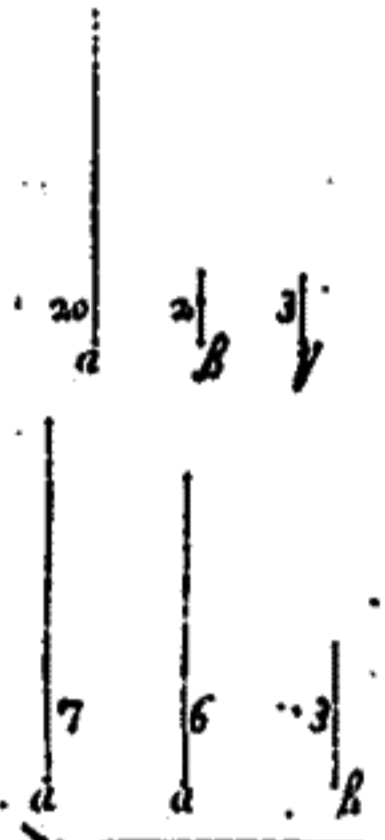
**Ἄπας ἀριθμὸς ἔστι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτης τιμῆς  
 ἀριθμῷ μίθειται.**

Ὁ γὰρ α, ἀριθμὸς, εἰ μὴ πρῶτός ἐστι, δῆλον τὸ ζα-  
 τίμωσεν. εἰδὲ συυθέτως, δια τῆς ἀσπίρω μίθεισεται αὐ-  
 τὸν ἀριθμὸς. ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

**Πρότασις Λ Ε': Πρόβλημα.**

**Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσῶντι ἀρεῖν τῆς ἐλαχίστης τῆς πῶν αὐτῶν  
 λόγου ἔχοντων αὐταῖς.**

Ἀριθμῶν εἶδη τῶν α β γ, δοθέντων, τῆς ἐλαχίστης τῆς πῶν αὐτῶν λόγου ἔχοντων  
 αὐταῖς δεῖ ἀρεῖν. Εὐριθέτω δια τῆς γ: τὸ μέγιστον κοινὸν μίθεισεται τῶν α β γ, καὶ  
 ἔσω ὁ δ. καὶ ὁσάκις ὁ δ, ἔκαστος πῶν α β γ, μίθει, πσαῦται μονάδις ἔσωσαν  
 ἐν τῆς ε, ζ, η. ἔκαστος τῶν ε ζ η, μίθει ἔκαστος πῶν α β γ, καὶ τῆς ἐν τῆς  
 δ, μονάδας. ἀρα ἐν τῆς αὐτῆς λόγῳ εἶναι οἱ ε ζ η,  
 τῆς α β γ. Λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι, εἰ γὰρ μὴ,  
 ἔσωσαν ἐν τῆς αὐτῆς λόγῳ τῆς α β γ, οἱ θ κ λ, ἐ-  
 λάσσοντες πῶν ε ζ η. καὶ ἐπεὶ ἔκαστος πῶν θ κ λ, ἔκα-  
 στος πῶν α β γ, ἰσάκις μίθει, ὁσάκις ὁ θ, τὸν α,  
 μίθει, πσαῦται μονάδις ἔσωσαν ἐν τῆς μ, ὁ μ, ἀ-  
 ρα τὸν θ, πολλαπλασιάσας τὸν α, ποιήσειεν. ἐπεὶ  
 δὲ καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν α, ποιήσει-  
 κεν. ἀρα καὶ τῶν θ κ λ: ἔσαι ὡς ὁ ε, ἀρὸς τὸν θ, ὅ-  
 πως ὁ μ, ἀρὸς τὸν δ. ἀλλ' ὁ ε, μείζων ἐστὶ τῷ θ, καὶ  
 ὁ μ, ἀρα μείζων τῷ δ. μίθει δὲ ὁ μ, τῆς α β γ, ἀ-  
 ρα ὁ μ, μέγιστόν ἐστι κοινὸν μίθεισεται πῶν α β γ, ὑπερίθη δὲ ὁ δ, τὸ μέγιστον αὐ-  
 τῶν



Euseb. Lib. 7. Fig. 20.

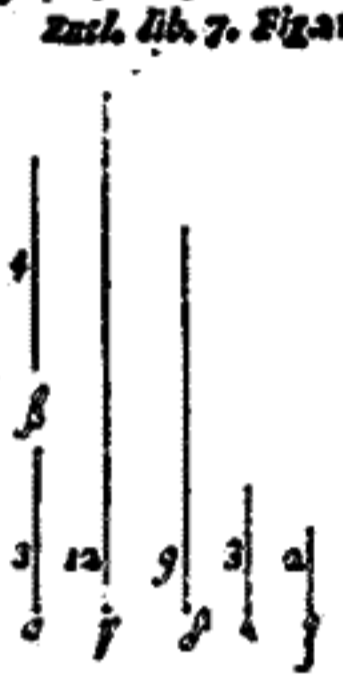


των κοινόν μίτρον, ὁ μ, ἄρα ἴσος τῷ δ. ἔστι δὲ καὶ μείζων, ὅπῃ ἀδυνάτων. εἰ εζ η, ἄρα ἐλάχισοί εἰσι. ὅπῃ εἶδει δεῖξαι.

Πρότασις Λε': Πρόβλημα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εἶρα ὅμ ἐλάχισον μετρήσῃ ἀριθμῶν.

Δύο εἶδη ἀριθμῶν δοθέντων τῶν α, β, ὅν ἐλάχιστοι μετρήσῃ ἀριθμὸν, δεῖ εἶρα εἶναι. Οἱ γὰρ α β, εἰ ἄρῳται ἀπὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ εἴ. Ἐἴτωσαν πρότερον ἄρῳται ἀπὸς ἀλλήλους. πολλαπλασιάσασθαι τῶν α β, ἀλλήλους τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ποιήσασθαι καὶ τῶν γ δ: καὶ ἔτω ἄνω δ γ. ὅν κατὰ τὸ πρόθεμα τῶν αὐτῶν γ δ: εἰσὶν εἰσὶν ἀπὸς τῶν α β, μετρήσῃ. Δείξω δὲ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γάρ μὴ, μετρήσασθαι οἱ α β, ἐλάχιστος τῶ γ, τὸν δ. καὶ ὁσάκις ὁ α, τὸν δ, μετρήσῃ, πσαῦται μονάδεις ἔτωσαν ἐν τῷ ε, ὁσάκις δὲ ὁ β, τὸν αὐτὸν δ, μετρήσῃ, πσαῦται μονάδεις ἔτωσαν ἐν τῷ ζ. ἐπει τῶν α, τὸν γ, μετρήσῃ κατὰ τῶν β, μονάδας, τὸν δὲ δ, καὶ τῶν ε, ὁ ε, ἄρα ἐλάχιστος εἰσὶ τῶ β, ὅτι καὶ ὁ δ, ἐλάχιστος ὑπὸ τῶ γ. ὁσάκις καὶ ὁ ζ, ἐλάχιστος εἰσὶ τῶ α. Ἐπει γὰρ ὁ α, τῶ β, πολλαπλασιάσασθαι τῶ γ, δ, πεποίηκε, ἔσται διὰ τῶν γ δ: ὡς ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, ὁ β, ἀπὸς τὸν ε. ὁσάκις, ἐπει ὁ β, τῶ α, ζ, πολλαπλασιάσασθαι τῶ γ, δ, πεποίηκε. ἔσται διὰ τῶν αὐτῶν γ δ: ὡς ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, ὁ α, ἀπὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, καὶ ὁ β, ἀπὸς τὸν ε, ἄρα ὡς ὁ β, ἀπὸς τὸν ε, ὁ α, ἀπὸς τὸν ζ, καὶ διὰ τῶν γ δ: ὡς ὁ β, ἀπὸς τὸν α, ὁ ε, ἀπὸς τὸν ζ. ἄρα εἰ β, α, πρῶται ὄντες ἐν τῶ αὐτῶ λόγῳ εἰσὶ τῶν ε ζ, ἐλάχιστοι αὐτῶν, ὅπῃ ἀπορον, καὶ τῶν γ δ: ὁ γ, ἄρα ἐλάχιστός εἰσιν, καὶ μετρήσῃται ὑπὸ τῶν α, β. ὅπῃ εἶδει ποῖσαι.



Δεῖ ἔτωσαν δὲ οἱ α, β, πρῶται ἀπὸς ἀλλήλους. καὶ εἰ λήρῳσαν οἱ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτῶν, οἱ ζ ε. ἄρα καὶ τῶν γ δ: ὁ ὑπὸ τῶν α ε, καὶ ὁ ζ β. ἴσός εἰσιν, ἔτω ἄνω δ γ. οἱ α β, ἄρα καὶ τὸ πρόθεμα τῶν γ δ: μετρήσῃ τὸν γ. Δείξω δὲ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γάρ μὴ, μετρήσασθαι οἱ α β, ἐλάχιστος τῶ γ, τὸν δ. καὶ ὁσάκις ὁ α, τὸν δ, μετρήσῃ, πσαῦται μονάδεις ἔτωσαν ἐν τῷ η, ὁσάκις δὲ τὸν αὐτὸν δ, ὁ β, μετρήσῃ, πσαῦται μονάδεις ἔτωσαν ἐν τῷ θ. ἐπει τῶν α, τῶ β, πολλαπλασιάσασθαι τῶ γ δ, πεποίηκε. ἔσται ἄρα διὰ τῶν γ δ: ὡς ὁ γ, ἀπὸς τὸν δ, ὁ ε, ἀπὸς τὸν η, ὁ δὲ γ, μεί-

μείζων ἐστὶ τῷ δ, καὶ ὁ ε, ἄρα μείζων ἐστὶ τῷ η. Ἀλλὰ εἰς τὸ β, πρὸς ζ, θ, πολλαπλασ. πρὸς γ, δ, ποιοῖται, διὰ τῆς αὐτῆς ἄρα εζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὅπως ἔσται ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, καὶ ἐπομένως ὁ θ, ἐλάττω τῷ ζ. ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὡς καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν η, ἄρα καὶ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν η, ὁ ζ, πρὸς τὸν θ. καὶ διὰ τῆς ιγ': ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ η, πρὸς τὸν θ. ἄρα οἱ εζ, ἐλάχιστοι ὅπως τῶν τῶν αὐτῶν λόγον ἔχουσιν αὐτῆς, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι πρὸς ηθ, ἐλάττωσιν αὐτῶν, ὅπρι ἀποπον. ἄρα ὁ γ, ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν α, β, μιξῆται. ὅπρι ἔδει ποιῆσαι.

**Πρότασις ΛΖ': Θεώρημα.**

**Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινα μεθώσιν, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὲρ αὐτῶν μεθώσῃ, τὸν αὐτὸν μεθήσει.**

Οἱ α β, ἤδη ἀριθμοὶ μιξῆται τὸν οἰονδήποτε ἀριθμὸν γ δ, ἐλάχιστον δὲ τὸν ε. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ ε, τὸν γ δ, μεθήσει, εἰ γὰρ μὴ, μεθήτω ὁ ε, ἐκ τῶ γ δ, τὸν δζ, καὶ λειπέτω ἑαυτῷ ἐλάττωσα τὸν γ ζ. Ἐπεὶ ὅν οἱ α, β, τὸν ε, μιξῶσι, καὶ ὁ ε, τὸν δζ, οἱ α, β, ἄρα τὸν δζ, μιξῶσι, μιξῶσι δὲ ἔτι καὶ τὸν γ δ, μιξῶσιν πάτως καὶ τὸν γ ζ, ἐλάττωσα τῷ ε. ὅπρι ἀποπον, ὁ ε, ἄρα τὸν γ δ, μιξῆται, ὅπρι ἔδει δεῖξαι.

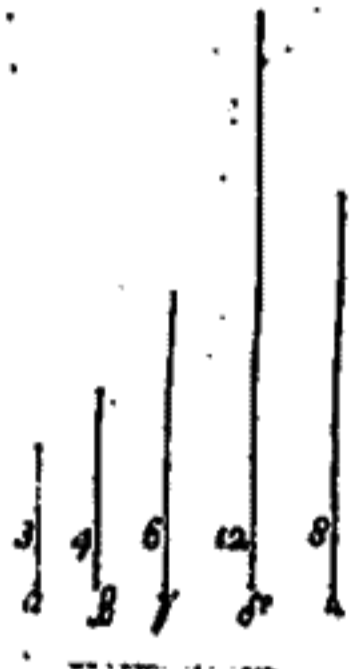
Excl. lib. 7. Fig. 10.



**Πρότασις ΛΗ': Πρόβλημα.**

**Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἀρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μεθώσιν ἀριθμὸν.**

Ἐώρασα ἤδη ἦεις ἀριθμοὶ οἱ α β γ, δοῖ δὲ ὃν ἐλάχιστον μιξῶσιν ἀριθμὸν ἀρεῖν. Ἐυριθῆτω διὰ τῆς λς': ὁ ἐλάχιστος μιξῶμενος ἀριθμὸς παρα τῶν α β, καὶ ἔστω ὁ δ. τὸν δ, ἄρα ἔπει μιξῆται ὁ γ, ἢ ε. μιξῆτω πρόπρον, οἱ α, β, γ, ἄρα μιξῶσι τὸν δ. Λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ δυνατὸν μιξῆταισασ οἱ α, β, γ, ἐλάττωσα τῷ δ, ἀριθμὸν τὸν ε. Ἐπεὶ ὅν οἱ α, β, μιξῶσι τὸν ε, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὲρ αὐτῶν μιξῶμενος, πρὸς τὸν δ, μιξῶσει τὸν αὐτὸν ε, κατὰ τὴν ἀσπίρω, ὁ δὲ δ, μείζων ἐστὶ τῷ ε, ὅπρι ἀποπον. ἄρα ὁ δ, ἐστὶν ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν α, β, γ, μιξῶμενος. ὅπρι ἔδει ποιῆσαι.



Μὴ μιξῆτω δὲ ὁ γ, τὸν δ. καὶ ἐλήφθω διὰ τῆς λς': ὁ ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστος μιξῶμενος ἀριθμὸς, καὶ ἔστω ὁ ε. Ἐπεὶ πίνουσι οἱ α, β, τὸν δ, μιξῶσι,

Bb 2

καὶ