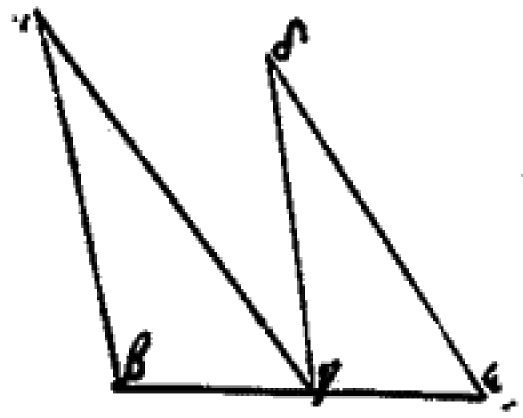
συντεθήτωσαν κατὰ μίαν γωνίαν, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς παραλλήλους εἶναι, τὴν μὲν βα, τῇ γδ, τὴν δὲ αγ, τῇ δε. Λέγω, ὅτι αἱ λοιπαὶ αὐτῶν πλευραὶ βγ, γε, ἐπ' εὐθείας εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς αβ, δγ, πέπτωκεν ἡ αγ, πάντως γε, κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ α΄: ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγδ, ἐναλλάξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ γδε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγδ, ὥστε ἡ πρὸς τῷ α, γωνία τοῦ αβγ, τριγώνου ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, τοῦ δγε, κατὰ τὸ α΄: ἀξίωμα· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ βα, αγ, ἀνάλογον ταῖς γδ, δε, ἄρα κατὰ τὴν ϛ΄: τοῦ παρόντος, τὰ αβγ, δγε, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δγε. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ αγδ, ἴση, ὡς δέδεικται, ἄρα κοινῆς λαμβανομένης τῆς ὑπὸ βγα, πάντως γε αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ βγα, αγδ, δγε, ἀλλ' αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν λβ΄: τοῦ α΄: ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ βγα, αγε, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὴν ιγ΄: τοῦ αὐτοῦ αἱ βγ, γε, εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας εἰσίν. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευράς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 35.



Πρότασις ΛΓ΄: Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι, ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

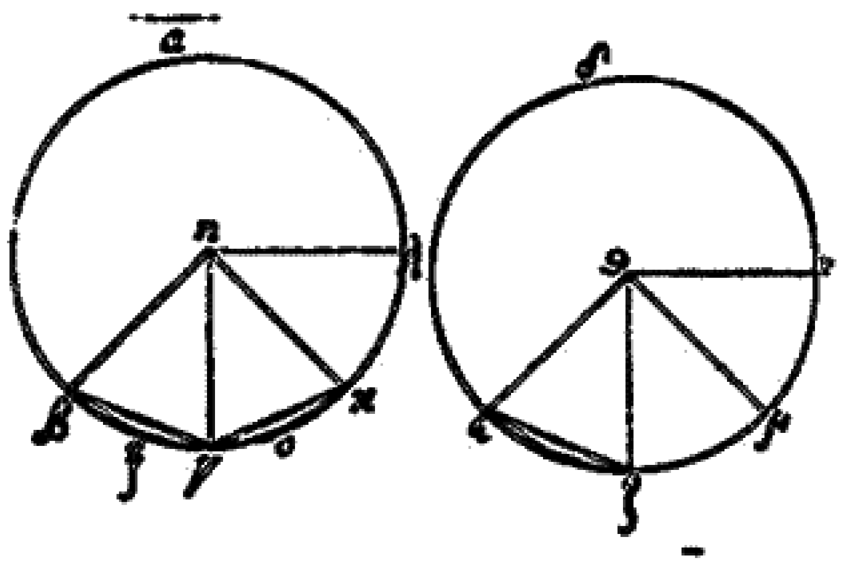
Ἐν τοῖς αβγ, δεζ, ἴσοις κύκλοις ἔστωσαν γωνίαι πρὸς μὲν τοῖς η, θ, κέντροις αἱ ὑπὸ βηγ, εθζ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις, αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ βγ, περιφέρεια πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ ὑπὸ βηγ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εθζ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, πρὸς τὴν ὑπὸ εδζ. εἰλήφθωσαν γὰρ περιφέρειαι ὁσαιδηποτοῦν ἴσαι τῇ μὲν βγ, αἱ γκ, κλ, τῇ δὲ εζ, αἱ ζμ, μν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηκ, ηλ, θμ, θν· καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν γκ, κλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ βγ, αἱ δὲ ζμ, μν, τῇ εζ, πάντως γε καὶ γωνίαι αἱ μὲν ὑπὸ γηκ, κηλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ ὑπὸ βηγ, αἱ δὲ ὑπὸ ζθμ, μθν, τῇ ὑπὸ εθζ. ὥστε ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ βλ, περιφέρεια τῆς βγ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ βηλ, γωνία τῆς

Eucl. Lib. 6. Fig. 36.

ὑπὸ βηγ. ὁσαπλασίων δὲ ἡ εν περιφέρεια τῆς εζ, τοσαυταπλασίων καὶ ἡ ὑπὸ εθν, γωνία, τῆς ὑπὸ εθζ. ὥστε εἰ ἡ βλ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ εν, πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ βηλ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εθν, διὰ τὴν τῶν κύκλων ἰσότητα, κἂν μείζων ᾖ ἡ περιφέρεια τῆς περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ γωνία τῆς γωνίας, κἂν ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων ἄρα μεγεθῶν τῶν βγ, εζ, περιφερειῶν, καὶ τῶν ὑπὸ βηγ, εθζ, γωνιῶν, εἴληπται τῶν μὲν βγ, εζ, ἰσάκις πολλαπλάσια αἱ βλ, εν, περιφέρειαι, τῶν δὲ ὑπὸ βηγ, εθζ, αἱ ὑπὸ βηλ, εθν, γωνίαι, ἄρα, κατὰ τὸν ε: ὅρον τοῦ ε: ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ ὑπὸ βηγ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εθζ, ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ βηγ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, κατὰ τὴν κ: τοῦ γ: ἡ δὲ ὑπὸ εθζ, τῆς ὑπὸ εδζ. ἄρα καὶ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ ὑπὸ βαγ, πρὸς τὴν ὑπὸ εδζ, ὅπερ ἔδει τὸ πρῶτον.

Λέγω δ᾽ ὅτι καὶ ὁ ηβγ, τομεὺς πρὸς τὸν θεζ, τομέα ἔχει, ὡς ἡ βγ, περιφέρεια, πρὸς τὴν εζ, περιφέρειαν. εἰλήφθωσαν γὰρ τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῶν βγ, γκ, περιφερειῶν τὰ ξ, ο. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βγ, γκ, βξ, ξγ, γο, οκ. καὶ ἐπεὶ αἱ βη, ηγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς γη, ηκ, κατὰ τὸν ιε: ὅρον τοῦ α: ἔστι δὲ καὶ βάσις ἡ βγ, βάσει τῇ γκ, ἴση, κατὰ τὴν κθ: τοῦ γ: πάντως γε, κατὰ τὴν η: τοῦ α: τὸ βηγ, τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ εθζ, τριγ: Αὖθις ἐπεὶ ἡ βγ, περιφέρεια, ἴση ἐστὶ τῇ γκ, δῆλον, ὅτι καὶ λοιπὴ ἡ βλγ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ γβλκ, ὥστε κατὰ τὴν κζ: τοῦ γ: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βξγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γοκ. ἄρα τὰ βγξ, γκο, τμήματα, ὅμοιά εἰσι, κατὰ τὸν ι: ὅρον τοῦ γ: κατὰ δὲ τὴν κδ: τοῦ αὐτοῦ καὶ ἴσα.

Eucl. lib. 6. Fig. 37.



ἀλλὰ καὶ τὰ βηγ, γηκ, τρίγωνα ἴσα ἐστίν, ὡς δέδεικται, ἄρα ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ηβγ, τομεὺς τῷ ηγκ, τομεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ ηκλ, ἴσος ἐστὶν ἑκατέρῳ τῶν ηβγ, ηγκ. οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς ηβγ, ηγκ ηκλ, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ θεζ, θζμ, θμν, τομεῖς, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. ἴσαι δὲ ἀλλήλαις εἰσίν, αἵ τε βγ, γκ, κλ, καὶ εζ, ζμ, μν, περιφέρειαι, ἄρα ὁσαπλασίων ἐστὶν ηβλ, τῆς βγ, τοσαυταπλασίων ἐστ᾽ καὶ ὁ ηβλ, τομεὺς τοῦ ηβγ, ὁσαπλασίων δὲ ἡ εν, περιφέρεια τῆς εζ, τοσαυταπλασίων καὶ ὁ θεν, τομεὺς τοῦ θεζ, τομέως. ὥστε ἐὰν ἡ βλ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ εν, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ηβλ, τομεὺς τῷ θεν, τομεῖ, κἂν μείζων ἡ περιφέρεια τῆς περιφερείας, μείζων καὶ ὁ τομεὺς τοῦ τομέως, κἂν ἐλάσσων, ἐλάσσων.

τεσ-

τεσσάρων ἄρα μεγεθῶν τῶν βγ, εζ, περιφερειῶν, καὶ ηβγ, θεζ, τομέων, ἐπεὶ εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν μὲν βγ, εζ, περιφερειῶν αἱ βλ, εν, περιφέρειαι, τῶν δὲ ηβγ, θεζ, τομέων οἱ ηβλ, θεν, τομεῖς, ἄρα κατὰ τὸν ε': ὅρον τοῦ ε': ὡς ἡ βγ, περιφέρεια πρὸς τὴν εζ, οὕτως ὁ ηβγ, τομεὺς πρὸ τὸν θεζ, τομέα. ὅπερ ἦν τὸ β'. Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Τέλος τοῦ Ἕκτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΕΒΔΟΜΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

Τουτέστι μονάς ἐστι τὸ ἀμερὲς καὶ ἁπλοῦν, καθ' ὃ καὶ πᾶν ὅλον, ὡς ἀδιαίρετον ἐννοούμενον, ἓν λέγεται· καὶ τοῦτο, ὃ μέρος μὲν ἑτέρου γίνεσθαι δύναται, αὐτὸ δὲ τοῦτο ἐκ μερῶν οὐ συνίσταται, ὡς ἐπὶ τῶν Γεωμετρικῶν, παραδείγματος χάριν μέτρων, μονὰς λέγεται ὁ δάκτυλος, ὅτι ὁ δάκτυλος μέτρον μὲν τοῦ Ποδὸς, τοῦ Βήματος, τῶν Σταδίων, καὶ τῶν λοιπῶν Γεωμετρικῶν μέτρων γίνεται. τούτου δὲ οὐδέν τι μέτρον ὑποτίθεται. κατὰ μίμησιν δὲ τούτου, καὶ ὁ Ποῦς, εἷς λέγεται, καὶ τὸ Βῆμα ἕν, καὶ πᾶν ἕτερον. ἀλλά γε καὶ οὕτως τὴν μονάδα ἀκριβῶς οὐ παριστῶσι. ὁ μὲν γὰρ Ποῦς δύναται διαιρεθῆναι ἐπ' ἄπειρον, καὶ αἰσθήσει ὑποπίπτει, ἡ δὲ μονὰς ἀδιαίρετος ὅλως, καὶ τῷ νῷ μόνῳ καταληπτή, ὡς καὶ τὸ σημεῖον, ἀρχὴ γὰρ αὕτη παρὰ τοῖς Ἀριθμητικοῖς ὑποτίθεται.

Β'. Ἀριθμός ἐστι, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Τουτέστιν Ἀριθμός ἐστιν ἡ πολλῶν μονάδων σύνταξις. ὡς ὁ α, β, γ, καὶ οἱ λοιποὶ ἀριθμοί. ὥστε ἐκ τούτου συνάγεται, ἐπεὶ ὁ 2 πλῆθος μονάδων οὐ παρεμφαίνει, (τὸ γὰρ πλῆθος ἀπὸ τοῦ 3 ἄρχεται) κυρίως ἀριθμὸς οὐ λέγεται. ἔτι τὸ οὐδὲν τῶν σχημάτων διὰ τοῦ 2 παρίσταται, ἄρα ἀριθμὸς κυρίως οὐκ ὀνομάζεσθαι δεῖ, ἀλλὰ καταχρηστικῶς.

3	4	5
α	β	γ

Γ': Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

Ὡς ὁ δ, μέρος ἐστὶ τῶν ε, ζ, η, καὶ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν, ὅσους καταμετρεῖ. Ἐπεὶ δὲ ὁ δ, τὸν μὲν ε, κατὰ τὰς ἐν τῷ θ, μονάδας μετρεῖ, ὁ θ, λέγεται τοῦ ε, μέρος ὁμώνυμον τῷ δ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸν ζ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ κ, καὶ τὸν η, κατὰ τὰς ἐν τῷ λ, λέγεται ὁ κ, μέρος τοῦ ζ, καὶ ὁ λ, τοῦ η, ὁμώνυμον τῷ δ. καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως. ἑκάστῳ τοίνυν ἀριθμῷ μέρει ὄντι ἑτέρου, ὁμώνυμος λέγεται αὐτῷ ὁ τοσαύτας μονάδας ἔχων, ὁσάκις οὗτος τόν, οὗ μέρος ἐστί, μετρεῖ.

3	6	9	12
δ	ε	ζ	η
	2	3	4
	θ	κ	λ

Δ': Μέρη δέ, ὅταν οὐ καταμετρῇ.

Τουτέστιν ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν πολλαπλασιαζόμενος, ἢ ἐλλείπει, ἢ ὑπερέχει τοῦ μείζονος, οὐδέποτε δὲ ἀποπληροῖ· ὡς ὁ α, τοῦ β, γ, καὶ λοιπῶν.

4	6	10
α	β	γ

Ε': Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

Ὡς ὁ δ, τοῦ ε, ὁ ζ, τοῦ η, καὶ ὅσοι ἄλλοι ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος δίς, ἢ τρίς, ἢ τετράκις, ἢ πλεονάκις καταμετροῦνται.

6	3	12	4
δ	ε	ζ	η

Ϛ': Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν, ὁ δίχα διαιρούμενος.

Τουτοί εἰσιν ὁ θ, ι, κ, λ, καὶ ὅσοι ἄλλοι δίχα διαιρεῖσθαι δύνανται.

4	6	8	10
θ	ι	κ	λ

Ζ': Περισσὸς δέ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα, ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου.

Τουτοί εἰσιν, ὁ μ, ν, ξ, ο, καὶ ὅσοι δίχα διαιρεθῆναι οὐ δύνανται. ὧν ὁ μὲν μ, τοῦ θ, ὁ δὲ ν, τοῦ ι, ὁ δὲ ξ, τοῦ κ, καὶ ὁ ο, τοῦ λ, μονάδι ὑπερέχει.

5	7	9	11
μ	ν	ξ	ο

Η': Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.

Τουτοί εἰσιν ὁ π, ρ, σ, ὧν ὁ μὲν π, μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τ, ὁ δὲ ρ, ὑπὸ τοῦ υ, καὶ ὁ σ, ὑπὸ τοῦ φ, καὶ πάντες κατὰ τὸν χ· εἰσὶ δὲ πάντες ἄρτιοι, ὑφ' ὧν μετροῦνται, καὶ καθ' ὃν μετροῦνται.

8	16	32
π	ρ	σ
4	8	16
τ	υ	φ
	2	
	χ	

Θ': Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ α, β, γ, ὧν ἕκαστος μετρεῖται ὑπὸ τοῦ δ, ὅστις ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ὁ μὲν α, μετρεῖται, κατὰ τὸν ε, ὁ δὲ β, κατὰ τὸν ζ, καὶ ὁ γ, κατὰ τὸν η. οἵτινες πάντες εἰσὶ περισσοί.

	12	20	28
	α	β	γ
4	3	5	7
δ	ε	ζ	η

Ι': Περισσάκις δὲ περισσός ἐστιν ἀριθμὸς, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ θ, ι, κ, ὧν ἕκαστος μετρεῖται ὑπὸ τοῦ λ, περισσοῦ ἀριθμοῦ. καὶ ὁ μὲν θ, κατὰ τὸν μ, ὁ δὲ ι, κατὰ τὸν ν, ὁ δὲ κ, κατὰ τὸν ξ, οἵτινές εἰσι πάντες περισσοί.

9	15		21
θ	ι		κ
3	3	5	7
λ	μ	ν	ξ

ΙΑ': Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

Τοιοῦτοί εἰσι πάντες οἱ περισσοί, ὡς ὁ ο, π, ρ, σ, καὶ τ. καὶ ὅσοι οὐδενὶ ἀριθμῷ μετρηθῆναι δύνανται ἢ μονάδι, ὡς ἔπι.

3	5	7	11	13
ο	π	ρ	σ	τ

ΙΒ': Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ φ, χ, καὶ ψ, ω, καὶ ὅσοι κοινὸν μέτρον οὐκ ἔχουσιν, ἢ τὴν μονάδα.

4	5	8	9
φ	χ	ψ	ω

ΙΓ': Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν οἱ ἄρτιοι ἀριθμοί, καὶ πάντα τὰ τοῦ ἀρτίου εἴδη, δηλ: οἱ ἀρτιάκις ἄρτιοι, οἱ ἀρτιάκις περισσοί, καὶ οἱ περισσάκις ἄρτιοι, ἔτι δὲ καὶ οἱ περισσάκις περισσοί. ὡς οἱ α, β, γ, δ,

8	10	12	9
α	β	γ	δ

ΙΔ': Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

4	8	6	12
δ	ε	ζ	η

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ δ, ε, ζ, η, ὧν οἱ μὲν δ, ε, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν θ, καὶ κ, οἱ δὲ ε, ζ, η, τὸν λ, μ, καὶ ζ,

2	4	2	3	6
θ	κ	λ	μ	ζ

ΙΕ'. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις.

Παραδ: χάρ: ὁ π, τότε λέγεται πολλαπλασιάζειν τὸν ρ, ὅτε ὁ ρ, τοσαυτάκις λαμβανόμενος, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ π, μονάδες ποιῇ τὸν σ. ὥστε εἶναι, ὡς ὁ σ, πρὸς τὸν ρ, ὁ π, πολλαπλασιάζων πρὸς τὸν τ, μονάδα.

1	3	4	12
τ	π	ρ	σ

ΙϚ'. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

Παραδ: χάρ: ὁ π, τὸν ρ, πολλαπλασιάσας τὸν σ, ποιείτω; ὁ σ, ἄρα ἐπίπεδος καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ὁ π, καὶ ρ,

3	4	12
π	ρ	σ

ΙΖ'. Ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

Παραδ: χάρ: οἱ α, β, γ, πολλαπλασιασάτωσαν ἀλλήλους. καὶ ὁ μὲν β, τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω, ὁ δὲ α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω, ὁ ε, ἄρα στερεὸς καλεῖται. πλευραὶ δὲ τοῦ ε, οἱ α, β, γ.

3	4	5	20	60
α	β	γ	δ	ε

ΙΗ'. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ ζ, η, θ, καὶ οἱ ὅμοιοι. ἑκάστου γὰρ τῶν ζ, η, θ, αἱ πλευραὶ πᾶσαι ἴσαι, καὶ ἕκαστος ὑπὸ δύο ἀριθμῶν ἴσων περιέχεται. ὁ γὰρ ζ, ὑπὸ τῶν ι, κ, περιέχεται. ὁ δὲ η, ὑπὸ τῶν λ μ, καὶ ὁ θ, ὑπὸ τῶν ν ξ, ὥστε ἀρκεῖ μόνον τὸν ἀριθμὸν ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῆναι, καὶ γενήσεται ὁ τετράγωνος.

9		16		25	
ζ		η		θ	
3	3	4	4	5	5
ι	κ	λ	μ	ν	ξ

ΙΘʹ: Κύβος δὲ, ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ π, ρ, σ, καὶ οἱ ὅμοιοι. ἕκαστος γὰρ τῶν π, ρ, σ, ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιέχεται. ὁ μὲν γὰρ π, ὑπὸ τῶν α, β, γ, ὁ δὲ ρ, ὑπὸ τῶν δ, ε, ζ, καὶ ὁ σ, ὑπὸ τῶν η, θ, ι, περιέχεται.

27	64	125
π	ρ	σ
9	16	25
333	444	555
αβγ	δεζ	ηθι

Κʹ: Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ αʹ: τοῦ βʹ: καὶ ὁ γʹ: τοῦ δʹ: ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσι.

Παραδ: χάρ: ὅταν ᾖ ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ μ, πρὸς τὸν ν, οἱ κ λ, μ ν, ἀριθμοὶ, εἰσὶν ἀνάλογον. ὅτι ὁσαπλάσιός ἐστιν ὁ κ, τοῦ λ, τοσαυταπλάσιος ὁ μ, τοῦ ν· καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ λ, τοῦ κ, τοῦτο αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὁ ν, τοῦ μ, ὡσαύτως καὶ οἱ ξ, π, ρ, ἀνάλογόν εἰσιν. ὅτι ἃ μέρη ἐστὶν ὁ π, τοῦ ξ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ρ, τοῦ π,

4	2	6	3
κ	λ	μ	ν
9	6	4	
ξ	π	ρ	

ΚΑʹ: Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

Παραδ: χάρ: τῶν μὲν ἐπιπέδων ὅμοιοι ἀριθμοί εἰσιν, οἱ α, β, ὅτι τοῦ μὲν α, πλευραί εἰσιν, οἱ γ, δ. τοῦ δὲ β, οἱ ε, ζ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. τῶν δὲ στερεῶν ὅμοιοί εἰσιν, οἱ η, θ. ὅτι τοῦ μὲν η, πλευραί εἰσιν, οἱ ι, κ, λ, τοῦ δὲ θ, οἱ μ, ν, ξ. καὶ ἔστιν ὡς ὁ ι, πρὸς τὸν κ, οὕτως ὁ μ, πρὸς τὸν ν, καὶ ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν λ, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ.

8	32	24	48
α	β	γ δ	ε ζ
48		162	
η		θ	
2 4 6		3 6 9	
ι κ λ		μ ν ξ	

ΚΒʹ: Τέλειος ἀριθμός ἐστιν, ὁ τοῖς αὐτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ π, ρ, ὅτι τοῦ μὲν π, μέρη εἰσὶν, οἱ σ, τ, καὶ α, μονάς, ἅτινα συναπτόμενα συμπληροῦσι τὸν π. τοῦ δὲ ρ, μέρη εἰσὶν, οἱ β, γ, δ, ε, καὶ ἡ ζ, μονάς, ὧν συναπτομένων ἀποπληροῦται ὁ ρ, ἀριθμός.

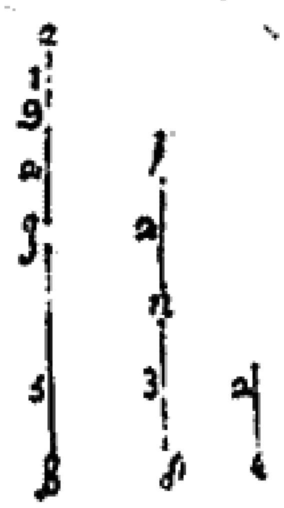
6	28	3	2	1
π	ρ	σ	τ	α
14	7	4	2	1
β	γ	δ	ε	ζ

Πρό-

Πρότασις Α΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ὑπὸ τοῦ μείζονος, ὁ ἐλλειπόμενος μηδέποτε καταμετρεῖ τὸν πρὸ αὐτοῦ, ἕως οὗ ληφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο ἤδη ἀριθμῶν τῶν αβ, γδ, ἐκκειμένων, καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ ἐλάσσονος γδ, παρὰ τοῦ μείζονος αβ, ὁ λειπόμενος αζ, μὴ καταμετρείτω τὸν πρὸ αὐτοῦ ζβ, τοῦ δὲ αζ, παρὰ τοῦ γδ, ἀφαιρουμένου, ὁ λειπόμενος γη, μὴ καταμετρείτω τὸν ηδ. τοῦ δὲ γη, παρὰ τοῦ αζ, ἀφαιρουμένου, λειφθήτω ἡ αθ, μονάς. Λέγω τοὺς αβ, γδ, πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, καὶ τὴν αθ, μονάδα μόνην τούτους μετρεῖν, εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, καὶ ἔστω οὗτος ὁ ε. Eucl. Lib. 7. Fig. 1.



Ἐπεὶ τοίνυν ὁ ε, τὸν γδ, μετρεῖ, μετρήσει πάντως καὶ τὸν βζ, τὸν ἴσον τῷ γδ, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν αβ, μετρήσει ἄρα καὶ τὸν αζ, ἔτι δὲ καὶ τὸν δη, τὸν ἴσον τῷ αζ, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν γδ, μετρήσει ἄρα καὶ τὸν γη, ἔτι δὲ καὶ τὸν θζ, ἴσον τῷ γη, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν αζ, μετρήσει ἄρα καὶ τὴν αθ, μονάδα, καὶ ἔστιν ἀριθμὸς ὁ ε, ὅπερ ἄτοπον. Οἱ αβ, γδ, ἄρα ἀριθμοὶ μόνῃ τῇ αθ, μονάδι μετροῦνται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Β΄: Πρόβλημα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Δύο ἤδη ἀριθμῶν μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τῶν αβ, γδ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον δέον εὑρεῖν. εἰ μὲν οὖν ὁ ἐλάττων γδ, μετρεῖ τὸν μείζονα αβ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ γδ, ἄρα τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον ἔσται. οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ δγ, αὐτὸν μετρήσει. εἰ δὲ μὴ μετρεῖ ὁ γδ, τὸν αβ, ἀφαιρείσθω ὁ γδ, παρὰ τοῦ αβ, καὶ ἐναπολειφθήτω ὁ αε. τοῦ δὲ αε, παρὰ τοῦ γδ, ἀφαιρουμένου, ἐναπολειφθήτω ὁ γζ, ὁ δὲ γζ, τὸν αε, μετρείτω. Λέγω τὸν γζ, κοινὸν μέτρον εἶναι τοῦ αβ, γδ. ἐπεὶ γὰρ ὁ γζ, μετρεῖ τὸν αε, μετρήσει πάντως καὶ τὸν δζ, τὸν ἴσον τῷ αε, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν. μετρεῖ ἄρα καὶ ὅλον τὸν γδ, ἔτι δὲ καὶ τὸν εβ, τὸν ἴσον τῷ γδ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν αε, μετρήσει ἄρα καὶ ὅλον τὸν αβ. ἐπεὶ δὲ μετρεῖ καὶ τὸν γδ, ἄρα κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις ἀριθμὸς τοὺς αβ, γδ, μείζων τοῦ γζ, καὶ ἔστω ὁ η. ἐπεὶ οὖν ὁ η, μετρεῖ τὸν γδ, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν εβ, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν αβ, μετρήσει ἄρα καὶ τὸν δζ, τὸν ἴσον τῷ αε, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν γδ, μετρήσει πάντως καὶ τὸν γζ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γζ, ἄρα ἐστὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν αβ, γδ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

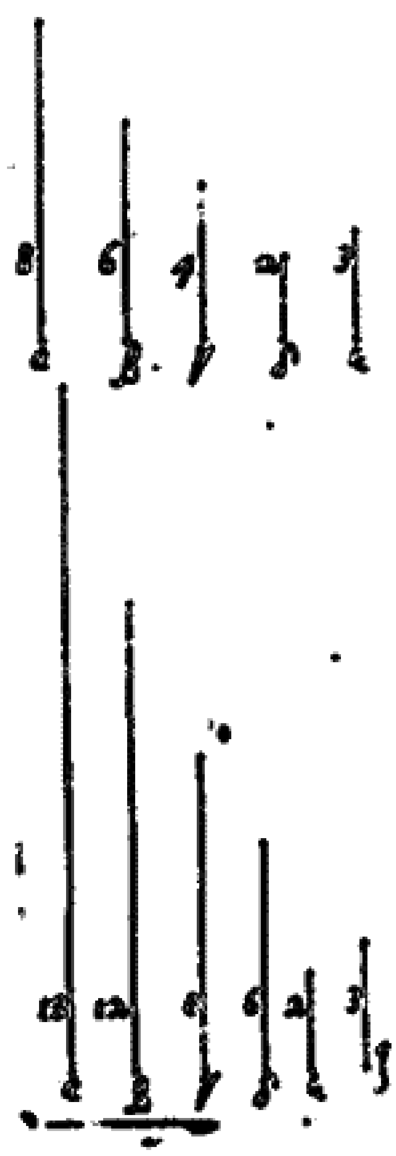
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρεῖ.

Πρότασις Γ'. Πρόβλημα.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Eucl. Lib. 7. Fig. 2.



Τριῶν ἤδη ἀριθμῶν τῶν αβγ, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους δοθέντων, ὅπως ἂν εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον, εὑρεθήτω πρῶτον διὰ τῆς ἀνωτέρω, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α, β, καὶ ἔστω ὁ δ. εἰ οὖν ὁ δ, καὶ τὸν γ, μετρεῖ, ὁ δ, ἔσται τὸ κοινὸν μέτρον τῶν α, β, γ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον, εἰ γὰρ μὴ, ἔστω μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν αβγ, ὁ ε, μείζων τοῦ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ ε, μετρεῖ τοὺς α β, μετρήσει πάντως καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, τοῦτο δ' ἐστιν ὁ δ, ἄρα ὁ ε, μετρήσει τὸν δ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττω, ὅπερ ἀδύνατον.

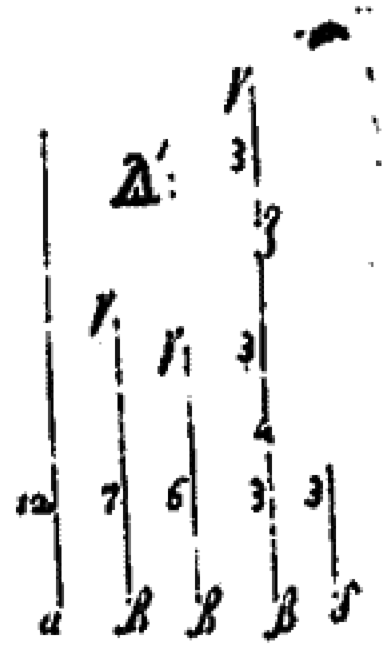
Εἰ δὲ ὁ δ, τὸν γ, οὐ μετρεῖ, δειχθήσεται πρῶτον τοὺς γ δ, μὴ πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι. ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ μετρῶν αὐτοὺς ἀριθμὸς, μετρήσει καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, τουτέστι τὸν δ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, ἄρα οἱ γ δ, οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. εὑρεθήτω τοίνυν τῶν γ δ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω ὁ ε, ὁ ε, τοίνυν μετρῶν τὸν δ, τὸ μέγιστον δηλ: κοινὸν μέτρον τῶν α β, μετρήσει πάντως καὶ τοὺς α β, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, ὁ ε, ἄρα ἐστὶ τὸ κοινὸν μέτρον τῶν α, β, γ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τούτου μείζων, μετρῶν τοὺς α, β, γ, ὁ ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ ζ, μετρεῖ τοὺς α β, μετρήσει καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον αὐτῶν τὸν δ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, μετρήσει ἔτι καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον αὐτῶν τὸν ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάττω, ὅπερ ἀδύνατον. ὁ ε, ἄρα ἐστὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α, β, γ. ὅπερ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Τῶν δύο ἤδη ἀριθμῶν α, βγ, λέγω τὸν βγ, ἐλάσσονα ἢ μέρος εἶναι ἢ μέρη τοῦ μείζονος α. Πρώτων μὲν γὰρ ὑποτιθεμένων τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους, ἐπείπερ ἑκάστη μονὰς τοῦ γβ, μετρεῖ τὸν α. ὁ γβ, ἄρα μέρη ἐστὶ τοῦ α. Δεύτερον δὲ μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους ὑποτιθεμένων, εἰ μὲν ὁ γδ, τὸν α, μετρεῖ, μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ α, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, τοῦ μεγίστου καὶ κοινοῦ μέτρου εὑρεθέντος, τῶν α, καὶ βγ, ἔστω ὁ δ. ἐπεὶ τοίνυν ὁ δ, τὸν γβ, μετρεῖ, κατὰ τὰ βε, εζ, ζγ, μέρη, πολλαπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ γβ, τοῦ δ. Αὖθις ἐπεὶ ὁ αὐτὸς δ, μετρεῖ καὶ τὸν α, καὶ ἕκαστον ἄρα μέρος τοῦ βγ, τουτέστιν ἕκαστον τῶν βε, εζ, ζγ, τὸν α, μετρήσει. ἄρα ὁ γβ, μέρη ἐστὶ τοῦ α, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

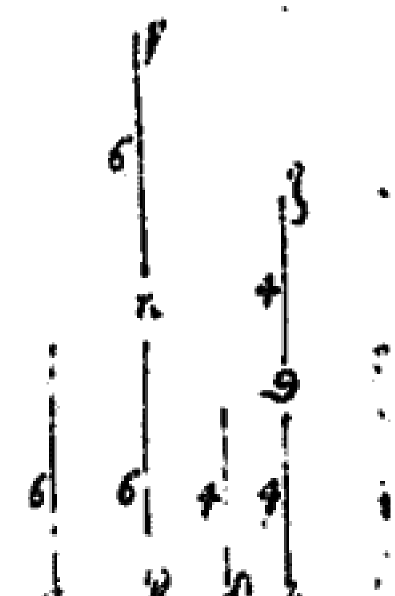
Eucl. lib. 7. Fig. 3.



Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Τοῦ α ἤδη ἀριθμοῦ μέρους ὄντος τοῦ γβ, ὅπερ ὁ δ, τοῦ ζε. Λέγω καὶ συναμφοτέρους τοὺς α, δ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι συναμφοτέρων τῶν γβ, εζ, ὅπερ ὁ α, τοῦ γβ. Ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ γβ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ δ, τοῦ εζ, ὅσα ἄρα μέρη ἐστὶν ἐν τῷ γβ, ἴσα τῷ α, τοσαῦτα μέρη ἐστὶ καὶ ἐν τῷ εζ, ἴσα τῷ δ. συντεθέντων δὲ τῶν μερῶν τοῦ γβ, τοῖς μέρεσι τοῦ εζ, τοσαῦτα μέρη σύνθετα ἔσονται ἐν τοῖς γδ, εζ, ἴσα τοῖς α, δ, ὁμοῦ, ὅσα μέρη ἁπλᾶ ἐστὶν ἐν τῷ γβ, ἴσα τῷ α. ἄρα ὁσαπλάσιός ἐστιν ὁ γδ, τοῦ α, τοσαυταπλάσιοι ἔσονται καὶ οἱ γβ, εζ, τῶν αδ, καὶ ἑπομένως, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ βγ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, καὶ συναμφότεροι οἱ αδ, συναμφοτέρων τῶν γβ, εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

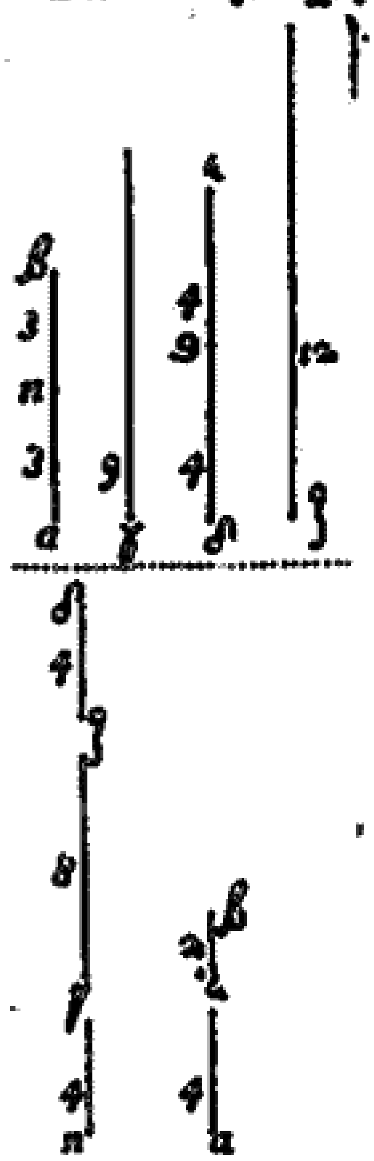


Πρότασις ϛ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α β, ἀριθμοῦ τοῦ γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔστω, ἅπερ ἐστὶν ὁ ε δ, τοῦ ζ. Λέγω καὶ ἀμφοτέρους τοὺς α β, ε δ, τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι ἀμφοτέρων τῶν γ, ζ, ἅπερ ἐστὶν ὁ α β, τοῦ γ. Ἐπεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ α β, τοῦ γ, τὰ αὐτὰ ἐστὶ καὶ ὁ ε δ, τοῦ ζ, διαιρεθέντος ἤδη τοῦ α β, εἰς τὰ τοῦ γ, μέρη, καὶ τοῦ ε δ, εἰς τὰ τοῦ ζ, ὅσα μέρη τοῦ γ, ἐστὶν ἐν τῷ α β. τοσαῦτα μέρη ἐστὶ καὶ τοῦ ζ, ἐν τῷ ε δ. Ἔστω τοίνυν ἐν μὲν τῷ α β, μέρη τοῦ γ, τὰ α η, η β, ἐν δὲ τῷ ε δ, μέρη τοῦ ζ, τὰ ε θ, θ δ. Ἐπεὶ τοίνυν ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α η, τοῦ γ, τὸ αὐτὸ ἐστὶ καὶ ὁ ε θ, τοῦ ζ, ἔσονται διὰ τῆς αἰωτέρω, καὶ οἱ α η, ε θ, ὁμοῦ τῶν γ ζ, ὁμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ἐστὶν ὁ α η, τοῦ γ. ὡσαύτως, καὶ οἱ η β, θ δ, ὁμοῦ τῶν γ ζ, ὁμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ἐστὶν ὁ η β, τοῦ γ. ὥστε ἃ μέρη εἰσὶν οἱ α η, η β, τουτέστιν ὁ α β, τοῦ γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσονται καὶ οἱ α β, ε δ, τῶν γ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 4.



Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α β, ἀριθμοῦ τοῦ γ δ, ἔστω μέρος, ὅπερ ὁ ἀφαιρεθεὶς α ε, τοῦ ἀφαιρεθέντος γ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ε β, τοῦ λοιποῦ ζ δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ καὶ ὅλος ὁ α β, ὅλου τοῦ γ δ. Γενέσθω ὁ ε β, τοῦ γ η, τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ἐστὶ καὶ ὁ α ε, τοῦ γ ζ, διὰ τῆς ε': ἄρα τοῦ παρόντος, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α ε, τοῦ γ ζ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὅλος ὁ α β, ὅλου τοῦ ζ η, ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ α ε, τοῦ γ ζ, τὸ αὐτὸ ἐστὶ καὶ ὁ α β, τοῦ γ δ, ἄρα ὁ α β, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸν ζ η, καὶ πρὸς τὸν γ δ. καὶ διὰ τῆς θ': τοῦ ε': ὁ ζ η, καὶ γ δ, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. καὶ τοῦ δ' ἀφαιρεμένου τοῦ γ ζ, ἐγκαταλειφθήσονται καὶ οἱ γ η, ζ δ, ἴσοι. Ἐπεὶ δὲ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α ε, τοῦ γ ζ, τὸ αὐτὸ ἐστὶ καὶ ὁ ε β, τοῦ γ η. ἄρα ὁ ε β, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται καὶ τοῦ δ ζ, ὅπερ ὁ α ε, τοῦ γ ζ. ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ α ε, τοῦ γ ζ, ἔτι καὶ ὁ α β, τοῦ γ δ, ἄρα καὶ ὁ ε β, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ τοῦ δ ζ, ὅπερ ὅλος ὁ α β, ὅλου τοῦ γ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

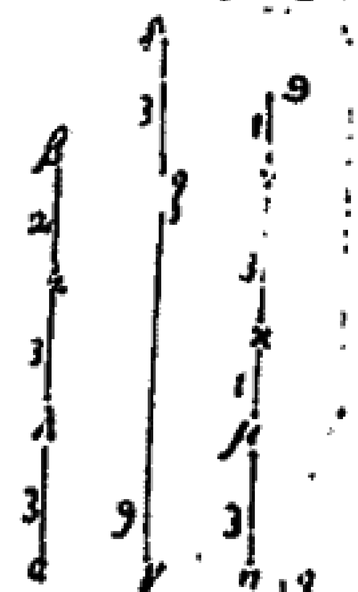
Πρότασις Η′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α β, ἀριθμοῦ τοῦ γ δ, μέρη ἔστω, ἅπερ ὁ ἀφαιρεθεὶς α ε, τοῦ ἀφαιρεθέντος γ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ε β, τοῦ λοιποῦ ζ δ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος α β, τοῦ ὅλου γ δ.

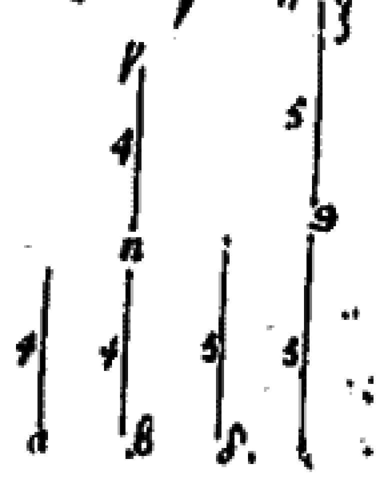
Ἐλήφθω ἕτερος ἀριθμὸς ἴσος τῷ α β, ὁ η θ, ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ η θ, τοῦ γ δ, τὰ αὐτὰ καὶ ὁ α ε, τοῦ γ ζ· διαιρεθέντος δὲ τοῦ μὲν η θ, εἰς τὰ τοῦ γ δ, μέρη, τὰ η κ, κ θ, τοῦ δὲ α ε, εἰς τὰ τοῦ γ ζ, τὰ α λ, λ ε, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ η κ, τοῦ γ δ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ α λ, τοῦ γ ζ, ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ κ θ, τοῦ γ δ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ λ ε, τοῦ γ ζ, μείζων δὲ ὁ γ δ, τοῦ γ ζ, μείζων ἄρα καὶ ὁ η κ, τοῦ α λ, καὶ ὁ κ θ, τοῦ λ ε. ἀφαιρεθέντος δὲ τοῦ μὲν η μ, ἴσου τῷ α λ, τοῦ δὲ κ ν, ἴσου τῷ λ ε, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ η κ, τοῦ γ δ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ η μ, τοῦ γ ζ, καὶ ἑπομένως κατὰ τὸν ἀνωτέρω, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ η κ, τοῦ γ δ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ μ κ, τοῦ ζ δ· ὡσαύτως καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ κ θ, τοῦ γ δ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ ν θ, τοῦ ζ δ. καὶ συντιθέμενοι ἄρα οἱ μ κ, ν θ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσονται τοῦ ζ δ, ἅπερ οἱ η κ, κ θ, ὁμοῦ, τουτέστιν ὁ α β, τοῦ γ δ. ἐπεὶ δὲ οἱ η μ, κ ν, ἴσοι εἰσὶ τοῖς α λ, λ ε, καὶ ὁ η θ, τῷ α β, ἄρα κατὰ τὸ γ′: ἀξίωμα καὶ οἱ μ κ, ν θ, ὁμοῦ ἴσοι εἰσὶ τῷ ε β, καὶ ἑπομένως ἃ μέρη ἐστὶν ὁ α β, τοῦ γ δ, τὰ αὐτὰ καὶ ὁ ε β, τοῦ ζ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 5.



Πρότασις Θ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ α′: τοῦ γ′: τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται καὶ ὁ β′: τοῦ δ′:



Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, ἀριθμοῦ τοῦ β γ, ἔστω ὁποιονδήποτε μέρος, καὶ ὁ δ, τοῦ ε ζ, τὸ αὐτὸ, ὅπερ ὁ α, τοῦ β γ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ α, τοῦ δ, τὸ αὐτὸ ἐστι μέρος ἢ μέρη καὶ ὁ β γ, τοῦ ε ζ. κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν, ὅσοι ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ α, εἰσὶν ἐν τῷ β γ, τοσοῦτοι ἴσοι τῷ δ, εἰσὶν ἐν τῷ ε ζ. Διαιρεθέντων δὲ τοῦ μὲν β γ, εἰς τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς τῷ α, τοὺς β η, η γ, τοῦ δὲ ε ζ, εἰς τοὺς ἴσους τῷ δ, τοὺς ε θ, θ ζ, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ β η, τοῦ ε θ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ η γ, τοῦ θ ζ, καὶ κατὰ

λιν

τὴν ϛ: τῦ παρόντος, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐςὶν ὁ β η, (τουτέςιν ὁ α, ἴσοι γάρ) τῦ ε θ, (τουτέςι τῦ δ,) τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔςαι καὶ ὁ β γ, τῦ ε ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

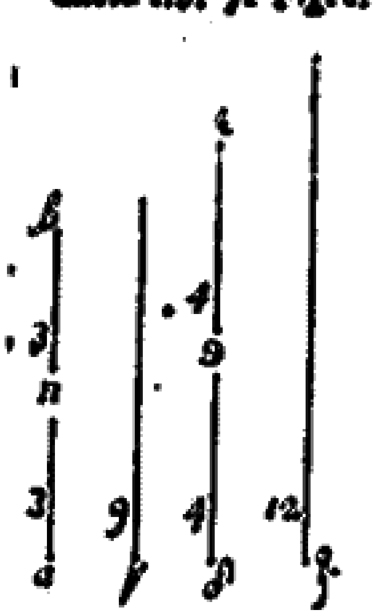
Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἐὰν ἀριθμοὶ ἀριθμῶν ἴσων τὸ πλῆθος τὸ αὐτὸ μέρος ὦσιν, ἑκάτερος χωρὶς ἑκατέρου, ὅπερ ἐπρός τις ἀριθμὸς ἑτέρου τινὸς ἀριθμοῦ, καὶ πάντες ὁμοῦ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πάντων τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν ἔσονται τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ ῥηθεὶς τοῦ ῥηθέντος.

Πρότασις Ι: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐναλλὰξ, ἃ μέρη ἐςὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔςαι, καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου, ἢ μέρος.

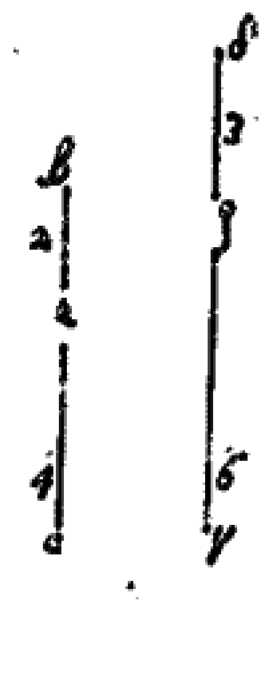
Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α β, ἀριθμοῦ τοῦ γ, ἔςω μέρη ὁποιαδηποῦν. καὶ ἕτερος ὁ δ ε, ἑτέρου τοῦ ζ, τὰ αὐτὰ, ἃ ὁ α β, τοῦ γ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ, ἃ μέρη ἢ μέρος ἐςὶν ὁ α β, τοῦ δ ε, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἐςὶ καὶ ὁ γ, τοῦ ζ. καὶ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν, ὅσα μέρη ἐςὶν ἐν τῷ α β, τοῦ γ, τοσαῦτά ἐςι καὶ ἐν τῷ δ ε, τοῦ ζ. διῃρημένων δὲ, τοῦ μὲν α β, εἰς τὰ τοῦ γ, μέρη τὰ α η, η β, τοῦ δὲ ε δ, εἰς τὰ τοῦ ζ, τὰ δ θ, θ ε. ὃ πάντως γε μέρος ἐςὶν ὁ α η, τοῦ γ, τὸ αὐτὸ ἔςαι καὶ ὁ δ θ, τοῦ ζ, καὶ διὰ τῆς αὐωτέρω, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐςὶν ὁ α η, τοῦ δ θ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔςαι καὶ ὁ γ, τοῦ ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ, καὶ ὃ μέρος ἢ μέρη ἐςὶν, ὁ η β, τοῦ θ ε, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔςαι καὶ ὁ αὐτὸς γ, τοῦ ζ, καὶ διὰ τὸ πορίσματος τῆς αὐωτέρω, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐςὶν ὁ γ, τοῦ ζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔςαι, καὶ ὁ α β, τοῦ δ ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 7. Fig. 6.



Πρότασις ΙΑ: Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔςαι, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.



Ὅλος ἤδη ὁ α β, πρὸς ὅλον τὸν γ δ, ἔςω ὡς ὁ α ε, ἀφαιρεθεὶς πρὸς τὸν γ ζ, ἀφαιρεθέντα. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ε β, πρὸς τὸν λοιπὸν ζ δ, ἔςαι ὡς ὅλος ὁ α β, πρὸς ὅλον τὸν γ δ. καὶ γὰρ τὴν κ: τοῦ παρ: ὃ μέρος ἐςὶν ἢ μέρη ὁ α β, τοῦ γ δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἐςὶ καὶ ὁ α ε, τοῦ γ ζ, καὶ διὰ τῆς ζ: τὰ αὐτὰ, καὶ ὁ ε β, τοῦ ζ δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη, ὅπερ μέρος ἢ μέρη ἐςὶν ὁ α β, τοῦ γ δ.

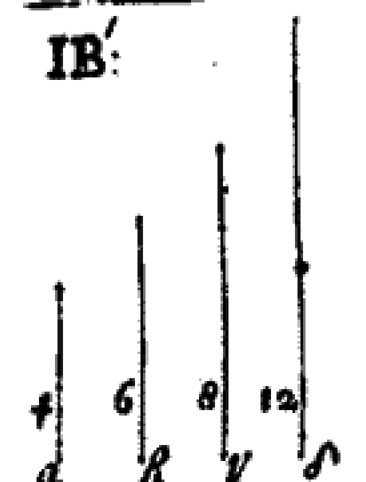
Πρό-

Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.

Τῶν ἤδη α β, γ δ, ἀριθμῶν ἀνάλογον ὄντων, τουτέστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως εἰσὶν οἱ α γ, πρὸς τοὺς β δ. κατὰ μὲν γὰρ τὴν ὑπόθεσιν, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ β, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ γ, ἐστὶ τοῦ δ. κατὰ δὲ τὴν ε: τοῦ παρόντος, καὶ συναμφότεροι οἱ α γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἰσὶ τῶν β δ, ὅπερ ὁ α, τοῦ β. καὶ ἑπομένως ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως οἱ α γ, πρὸς τοὺς β δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

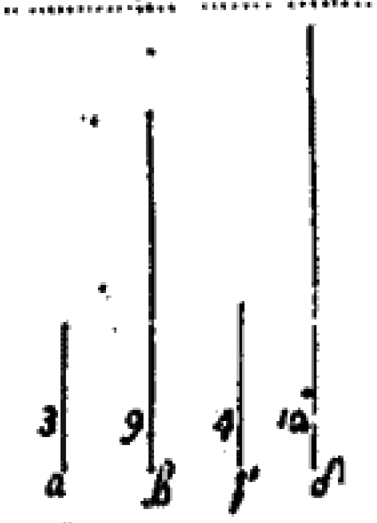
Eucl. Lib. 7. Fig. 7.



Πρότασις ΙΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσι, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.

Τεσσάρων ἤδη ἀριθμῶν τῶν α β, γ δ, ἀνάλογον ὄντων, ἤτοι ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἔσται, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν δ. κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ β, τὸ αὐτὸ ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ δ, καὶ κατὰ τὴν θ': τοῦ παρόντος, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ γ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ β, τοῦ δ. καὶ ἑπομένως, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ β, πρὸς τὸν δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΙΔ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοί, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἀριθμῶν ἤδη τῶν α, β, γ, καὶ δ, ε, ζ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντων, καὶ σὺν δύο λαμβανομένων, τουτέστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἔσται, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. διὰ γὰρ τῆς ἀνωτέρω, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἔσται καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ ὁ β, πρὸς τὸν ε. Αὖθις ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ἔσται διὰ τῆς αὐτῆς, καὶ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν ε, ὁ γ, πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν ε,

καὶ