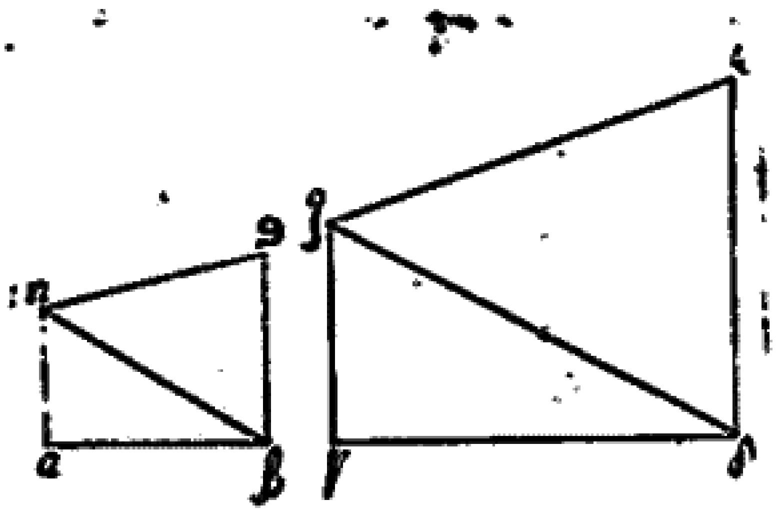
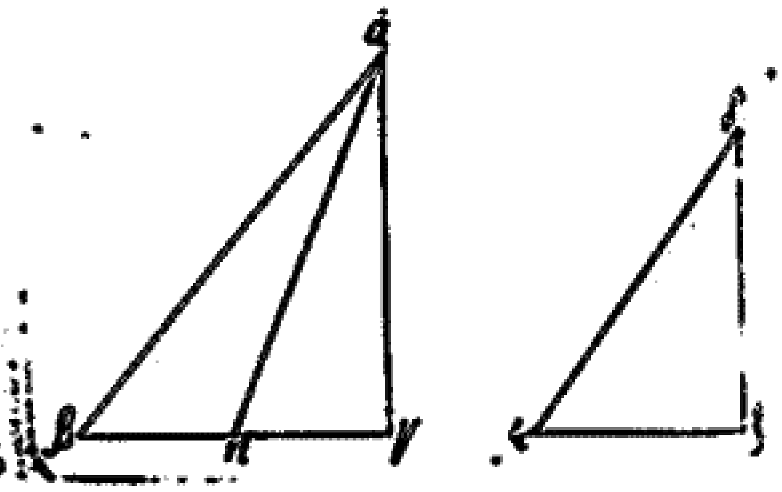
πρὸς τῇ γ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ α η β, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ γ ζ δ. ἰσογώνιον ἄρα τὸ α β η, τρίγωνον τῷ γ δ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ ζ, πρὸς τὴν β η, ἡ ζ γ, πρὸς τὴν η α, καὶ ἔτι ἡ γ δ, πρὸς τὴν α β. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ η β θ, τρίγωνον, ἰσογώνιον τῷ ζ δ ε, καὶ ἔσται ὡς ἡ δ ζ, πρὸς τὴν β η, ἡ ζ ε, πρὸς τὴν η θ, καὶ ἔτι ἡ ε δ, πρὸς τὴν θ β. ἀλλ' ὡς ἡ δ ζ, πρὸς τὴν β η, δέδεικται ἡ ζ γ, πρὸς τὴν η α, καὶ ἔτι ἡ γ δ, πρὸς τὴν α β, ἄρα κατὰ τὴν ια: τοῦ ε: ὡς ἡ ζ γ, πρὸς τὴν η α, οὕτως ἡ ζ ε, πρὸς τὴν η θ, καὶ ἡ ε δ, πρὸς τὴν θ β, καὶ ἔτι ἡ γ δ, πρὸς τὴν α β. ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ α η β, γωνία ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ γ ζ δ, ἡ δὲ ὑπὸ β η θ, τῇ ὑπὸ δ ζ ε, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ α η θ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ γ ζ ε. Διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α β θ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ δ ε. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ α, ἴση τῇ πρὸς τῷ γ, ἡ δὲ πρὸς τῷ θ, τῇ πρὸς τῷ ε. ἰσογώνιον ἄρα τὸ α θ, τῷ γ ε. ἔχει δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, πάντως γε κατὰ τὸν α: ὅρον τοῦ παρόντος, ὅμοιόν ἐστιν. Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 23.



Πρότασις ΙΘ': Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.



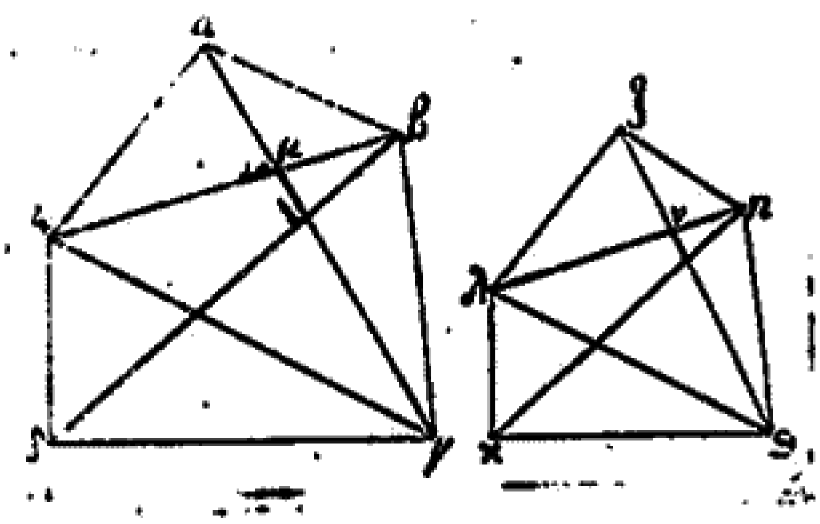
Ἔστωσαν ὅμοια τρίγωνα τὰ α β γ, δ ε ζ, ἴσην μὲν ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, τὰς δὲ β γ, ε ζ, ὑποτεινούσας ὁμολόγους. Λέγω, ὅτι τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ δ ε ζ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ ἡ β γ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ε ζ, ὁμόλογον πλευράν. Εὑρήσθω γὰρ τρίτη ἀνάλογος τῶν β γ, ε ζ, ἡ β η, κατὰ τὴν ια: τοῦ παρόντος. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α η. καὶ ἐπεὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος, πάντως γε ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, ἔσται καὶ ἡ δ ε, πρὸς τὴν ε ζ. ὥστε καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ. ὡς δὲ ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, γέγονε καὶ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν β η, ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, ἔστι καὶ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν β η, ὥστε τῶν α β η, δ ε ζ, τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἄρα κατὰ τὴν ιε: τοῦ παρόντος, τὰ α β η, δ ε ζ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἀλλ' ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν β η, ἔστι καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ α β η, κατὰ τὴν α: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν β η, ἔχει καὶ τὸ α β γ, τρίγ: πρὸς τὸ δ ε ζ, δεζ, ἡ δὲ βγ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐςὶ πρὸς τὴν βη, ἤπερ πρὸς τὴν εζ, ϗ τὸν ι: ὅρον τοῦ ε: ἄρα ϗ τὸ αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐςίν, ἤπερ ἡ βγ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν εζ, ὁμόλογον. Τὰ ὅμοια ἄρα τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ, ϗ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κʹ: Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, ϗ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔςωσαν ὅμοια πολύγωνα τὰ αβγδε, ζηθκλ, ἔχοντα ὁμολόγους πλευρὰς τὰς αβ, ζη. Λέγω δὴ, ὅτι τὰ αβγδε, ζηθκλ, ὅμοια πολύγωνα εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, ϗ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, ϗ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε, εγ, ηλ, λθ. ϗ ἐπεὶ τὰ αβγδε, ζηθκλ, πο-

Eucl. lib. 6. Fig. 24.



λύγωνα, ὅμοιά εἰσι, πάντως γε, κατὰ τὸν α: ὅρον τοῦ παρόντος, ἔχουσι ϗ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔςιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αε, ἡ ηζ, πρὸς τὴν ζλ. Ἔςι δὲ ϗ ἡ ὑπὸ βαε, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ηζλ, διὰ τὴν τῶν πολυγώνων ὁμοιότητα, ἄρα τὰ αβε, ζηλ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν. ὥςε ἡ ὑπὸ αβε, γωνία, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ ζηλ. ἀλλὰ ϗ ὅλη ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐςὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ ζηθ, ἄρα ϗ λοιπὴ ἡ ὑπὸ εβγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ληθ, ἴση ἐςίν. Αὖθις ἐπεὶ τὰ αβε, ζηλ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, πάντως γε, κατὰ τὸν δʹ: τοῦ παρόντος, ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βα, ἔςι ϗ ἡ λη, πρὸς τὴν ηζ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως ηζ, πρὸς τὴν ηθ, δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ λη, πρὸς τὴν ηθ. δέδεικται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εβγ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ληθ, ὅμοια ἄρα τὰ εβγ, ληθ, τρίγωνα. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅμοια ϗ τὰ εγδ, λθκ. ὥςε τὰ αβγδε, ζηθκλ, πολύγωνα εἰς ἴσα διῄρηται τρίγωνα, καὶ ἰσοπληθῆ. ὅτι δὲ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, δῆλον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, ζθ. ϗ ἐπεὶ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἐςὶν ἡ ζη, πρὸς τὴν ηθ, διὰ τὴν τῶν σχημάτων ὁμοιότητα, ἔςι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ ζηθ. ἄρα τὰ αβγ, ζηθ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ὥςε ϗ ἰσογώνια. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ βαμ, τῇ ὑπὸ ηζν, δέδεικται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβμ, ἴση τῇ ὑπὸ ζην, ϗ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αμβ, ἴση ἐςὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ζνη, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αμβ, τρίγωνον τῷ

ζνη.

ζνκ. ὥστε καὶ ὅμοια. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν μβ, ἡ ζκ, πρὸς τὴν νκ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ὡς ἡ βμ, πρὸς τὴν μγ, ἡ κν, πρὸς τὴν νθ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ αμ, πρὸς τὴν μγ, ἡ ζν, πρὸς τὴν νθ. ἀλλ' ὡς ἡ αμ, πρὸς τὴν μγ, ἔχει τό, τε αμβ, τρίγ: πρὸς τὸ βμγ, καὶ τὸ αμε, πρὸς τὸ εμγ, ἄρα καὶ τὴν ια: τοῦ ϛ': ὡς τὸ αμβ, πρὸς τὸ βμγ, οὕτω τὸ αμε, πρὸς τὸ εμγ. καὶ κατὰ τὴν ιβ': τοῦ αὐτοῦ, ὡς τὸ αμβ, ἡγούμενον πρὸς τὸ βμγ, ἑπόμενον, οὕτω πάντα τὰ ἡγούμενα, ἤτοι τὸ βαε, τρίγωνον πρὸς πάντα τὰ ἑπόμενα τὸ βεγ, δηλ: τρίγωνον. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ὡς τὸ ζνκ, πρὸς τὸ κνθ, τὸ κζλ, πρὸς τὸ λκθ. ἀλλ' ὡς τὸ αμβ, πρὸς τὸ βμγ, δέδεικται καὶ τὸ ζνκ, πρὸς τὸ κνθ, ἄρα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ια: ὡς τὸ βαε, πρὸς τὸ εβγ, οὕτω καὶ τὸ κζλ, πρὸς τὸ λκθ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ αβε, πρὸς τὸ ζκλ, οὕτω τὸ εβγ, πρὸς τὸ λκθ. Ἐὰν δὲ ἐπιζευχθῶσι καὶ αἱ γε, θλ, δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ὡς τὸ εβγ, πρὸς τὸ εγδ, τὸ λκθ, πρὸς τὸ λθκ. καὶ ἐναλλὰξ, τρία ἄρα μεγέθη τὰ εαβ, βεγ, γδε, τρίγωνα ἀνάλογόν εἰσι τρισὶ μεγέθεσι τοῖς λζκ, κλθ, θκλ, τριγώνοις, ὥστε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ ε': ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων τὸ εαβ, πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων τὸ λζκ, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα, τὸ αβγδε, πολύγωνον, πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, τὸ ζκθκλ, δηλ: πολύγωνον. ἄρα τὰ αβγδε, ζκθκλ, πολύγωνα διῄρηται εἰς ὅμοια τρίγωνα, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Λέγω δ' ὅτι καὶ τὸ αβγδε, πολύγωνον πρὸς τὸ ζκθκλ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς αβ, ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὴν ζκ, ὁμόλογον. ἐπεὶ γὰρ τὸ αβγδε, πολύγωνον πρὸς τὸ ζκθκλ, πολύγωνον δέδεικται ἔχειν, ὡς τὸ αβε, τρίγωνον πρὸς τὸ ζκλ, τρίγωνον, τὸ δὲ αβε, τρίγ: πρὸς τὸ ζκλ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστίν, ἤπερ ἡ αβ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ζκ, ὁμόλογον πλευρὰν κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὸ ἄρα αβγδε, πολύγων: πρὸς τὸ ζκθκλ, πολύγωνον ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστίν, ἤπερ ἡ αβ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ζκ, ὁμόλογον πλευράν. Τὰ ὅμοια ἄρα πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὰ ὅμοια τετράπλευρα σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἶναι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ὡς δέδεικται καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων. ὥστε ἐκ τούτων ἔχομεν συναγαγεῖν καθόλου, ὅτι τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Β': Ἐπεὶ δὲ ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον ληφθῶσιν, ὡς αἱ ξοπ, ἡ ξ, πρώτη πρὸς τὴν π, τρίτην ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστίν, ἤπερ πρὸς τὴν ο, δευτέραν. δῆλον, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἀπὸ τῆς α': πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β': ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον εὐθύγραμμον, ἔχει ὡς ἡ α': πρὸς τὴν γ': Eucl. Lib. 6. Fig. 25.

Πρό-

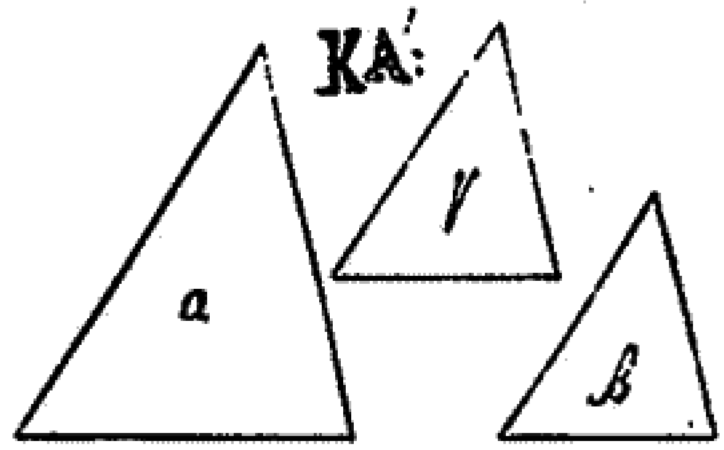
Πρότασις ΚΑʹ: Θεώρημα.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω δὴ ἑκάτερον τῶν α, καὶ β, εὐθυγράμμων ὅμοιον τῷ γ. Λέγω, ὅτι τὰ α, β, εὐθύγρ: καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α, ὅμοιόν ἐστι τῷ γ· δῆλον, ὅτι καὶ ἰσογώνιον, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, κατὰ τὸν δʹ: τοῦ παρόντος. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ β, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ γ, καὶ τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας ἔχει ἀνάλογον, ὥστε, κατὰ τὸν αʹ: τοῦ πέμπτου, ἰσογώνιά εἰσι καὶ ἀλλήλοις, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. κατὰ τὸν αʹ: ἄρα ὅρον τοῦ παρόντος, τὰ α β, εὐθύγραμμα, ὅμοιά εἰσι.

Eucl. Lib.6. Fig.26.

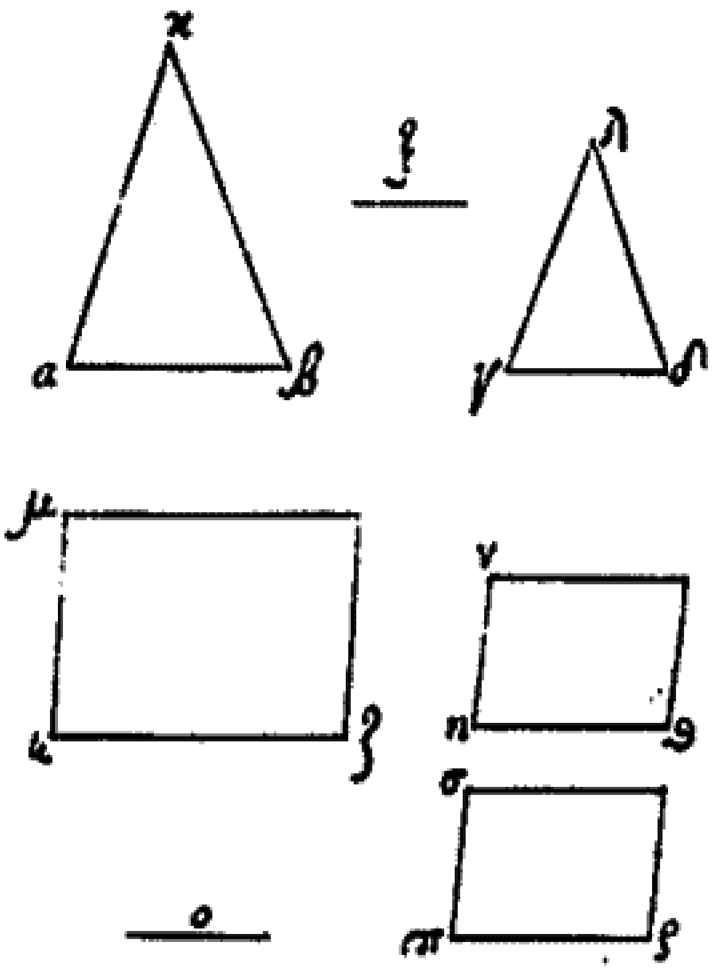
ΚΑʹ:



Πρότασις ΚΒʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται, κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν ἤδη εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ α β, γ δ, ε ζ, η θ. καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναγεγράφθωσαν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα, ἀπὸ μὲν τῶν α β, γ δ, τὰ κ α β, λ γ δ, ἀπὸ δὲ τῶν ε ζ, η θ, τὰ μ ζ, ν θ. Λέγω, ὅτι τὰ κ α β, λ γ δ, ἀνάλογά εἰσι τοῖς μ ζ, ν θ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ κ α β, πρὸς τὸ λ γ δ, οὕτω τὸ μ ζ, πρὸς τὸ ν θ. εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν α β, γ δ, τρίτη ἀνάλογος ἡ ξ. τῶν δὲ ε ζ, η θ, ἡ ο. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὡς δὲ ἡ γ δ, πρὸς τὴν ξ, ἡ η θ, πρὸς τὴν ο, κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν ξ. οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ο, κατὰ τὸν κβʹ: τοῦ εʹ: ἀλλ' ὡς μὲν ἡ α β, αʹ: πρὸς τὴν ξ, γʹ. ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, αʹ: τὸ κ α β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ δ, βʹ: τὸ λ γ δ.



ὡς δὲ

ὡς δὲ ἡ εζ, ὁμοίως αʹ: πρὸς τὴν ο, γʹ: οὕτω καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εζ, αʹ: τὸ μζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, βʹ: τὸ νθ. ἄρα κατὰ τὴν ιαʹ: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ὡς τὸ καβ, πρὸς τὸ γλδ, οὕτω τὸ μζ, πρὸς τὸ νθ. ὅπερ ἔδει τὸ αʹ:

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὰ καβ, λγδ, ἀνάλογον τοῖς μζ, νθ. Λέγω, ὅτι καὶ αἱ αβ, γδ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι ταῖς εζ, ηθ. Γενέσθω γὰρ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἡ εζ, πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν πρ, κατὰ τὴν ιβʹ: τοῦ παρόντος. καὶ ἀναγεγράφθω ὁποτέρῳ τῶν μζ, νθ, ἀπὸ τῆς πρ, τὸ σρ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. καὶ ἐπεὶ αἱ αβ, γδ, ἀνάλογόν εἰσι ταῖς εζ, πρ, καὶ ἀπὸ μὲν τῶν αβ, γδ, ἀναγέγραπται εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ καβ, λγδ, ἀπὸ δὲ τῶν εζ, πρ, τὰ μζ, σρ, ἄρα κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἔσται ὡς τὸ καβ, πρὸς τὸ λγδ, τὸ μζ, πρὸς τὸ σρ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ καβ, πρὸς τὸ λγδ, ὑπετέθη καὶ τὸ μζ, πρὸς τὸ νθ, τὸ μζ, ἄρα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὸ νθ, καὶ σρ. ὥστε κατὰ τὴν θʹ: τοῦ εʹ: τὸ νθ, ἴσον ἐστὶ τῷ σρ, ἔστι δὲ καὶ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον, ἄρα καὶ ἡ ηθ, ὁμόλογος πλευρὰ, ἴση ἐστὶ τῇ πρ, ὁμολόγῳ πλευρᾷ. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, γίνεται ἡ εζ, πρὸς τὴν πρ, πάντως γε ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἔχει καὶ ἡ εζ, πρὸς τὴν ηθ. ὅπερ ἔδει τὸ βʹ: Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ὅτι δὲ ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ πρ, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ τὰ νθ, σρ, ἴσα τε καὶ ὅμοιά εἰσι, καὶ ὁμοίως ἔτι κείμενα, πάντως γε, κατὰ τὸν αʹ: τοῦ παρόντος ὅρον, ὡς ἡ θν, πρὸς τὴν ην, ἡ ρπ, πρὸς τὴν πσ. Λέγω δ᾽ ὅτι ἡ πρ, ἴση ἐστὶ τῇ ηθ. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ἡ πρ, μείζων τῆς ηθ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ πρ, πρὸς τὴν πσ, ἡ θν, πρὸς τὴν ην, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ἡ ρπ, πρὸς τὴν ηθ, ἡ πσ, πρὸς τὴν ην. μείζων δὲ ἡ ρπ, τῆς ηθ, μείζων ἄρα καὶ ἡ πσ, τῆς ην. τὸ σρ, ἄρα μεῖζον τοῦ νθ, ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ πρ, τῆς ηθ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων, ἴση ἄρα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἴσων τε καὶ ὁμοίων εὐθυγράμμων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, ἴσαι εἰσί.

Πρότασις ΚΓʹ: Θεώρημα.

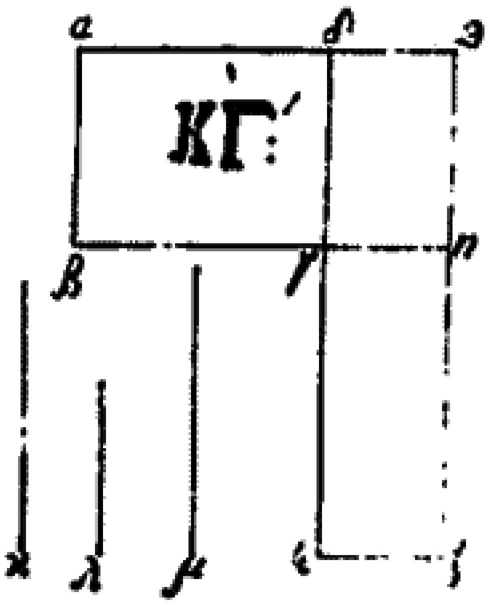
Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἐκκείσθωσαν δὴ τὰ αγ, γζ, ἰσογώνια παραλληλόγραμμα γωνίαν τὴν ὑπὸ βγδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εγη, ἴσην. Λέγω, ὅτι τὸ αγ, πρὸς τὸ γζ, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τὸν ἔκ τε τοῦ τῆς βγ, λόγου πρὸς τὴν γη, καὶ τοῦ τῆς εγ, πρὸς τὴν γδ. Κείσθω γὰρ ἡ βγ, ἐπ᾽ εὐθείας τῇ γη, καὶ ἔσται πάντως γε κατὰ τὴν ιδʹ: τοῦ αʹ: ἐπ᾽ εὐθείας καὶ ἡ γδ, τῇ γε, καὶ ἀποπεπληρώσθω τὸ γθ, παραλληλόγραμμον. εἶτα εἰλήφθω τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ κ, καὶ γενέσθω ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν

γη,

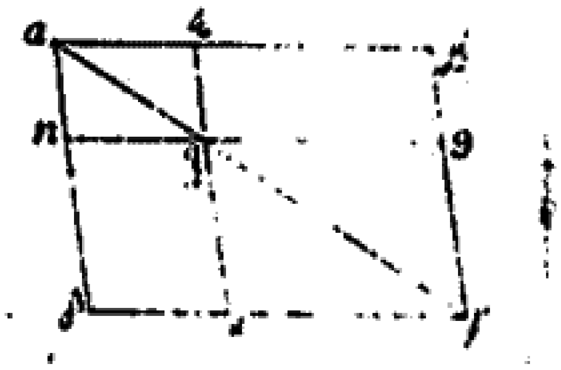
γη, ἡ κ, πρὸς τὴν λ, ὡς δὲ ἡ δγ, πρὸς τὴν γε, ἡ λ, πρὸς τὴν μ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος. ἡ κ, ἄρα πρὸς τὴν μ, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῶν αγ, γζ, παραλληλογράμμων, κατὰ τὸν έ: ὅρον τοῦ παρόντος. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γη, ἐστὶ τὸ αγ, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γθ. ὡς δὲ ἡ βγ, πρὸς τὴν γη, γέγονε καὶ ἡ κ, πρὸς τὴν λ, ἄρα ὡς ἡ κ, πρὸς τὴν λ, τὸ αγ, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ γθ. αὖθις ἐπεὶ ὡς ἡ δγ, πρὸς τὴν γε, ἐστι καὶ τὸ γθ, πρὸς τὸ γζ, κατὰ τὸν α: τοῦ αὐτοῦ. ὡς δὲ ἡ δγ, πρὸς τὴν γε, γέγονε καὶ ἡ λ, πρὸς τὴν μ, ἄρα καὶ ὡς ἡ λ, πρὸς τὴν μ, οὕτω τὸ γθ, πρὸς τὸ γζ. τρία ἄρα μεγέθη τὰ αγ, γθ, γζ, τρισὶ μεγέθεσι ταῖς κ, λ, μ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμενα, ὥστε καὶ δὶ ἴσου, ὡς τὸ αγ, πρὸς τὸ γζ, ἡ κ, πρὸς τὴν μ, κατὰ τὸν κβ': τοῦ έ: ἀλλ' ἡ κ, πρὸς τὴν μ, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ αγ, πρὸς τὸ γζ, ἔχει λόγον ὁμοίως τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Τὰ ἰσογώνια ἄρα παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. lib. 6. Fig. 27.



Πρότασις ΚΔ': Θεώρημα.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.



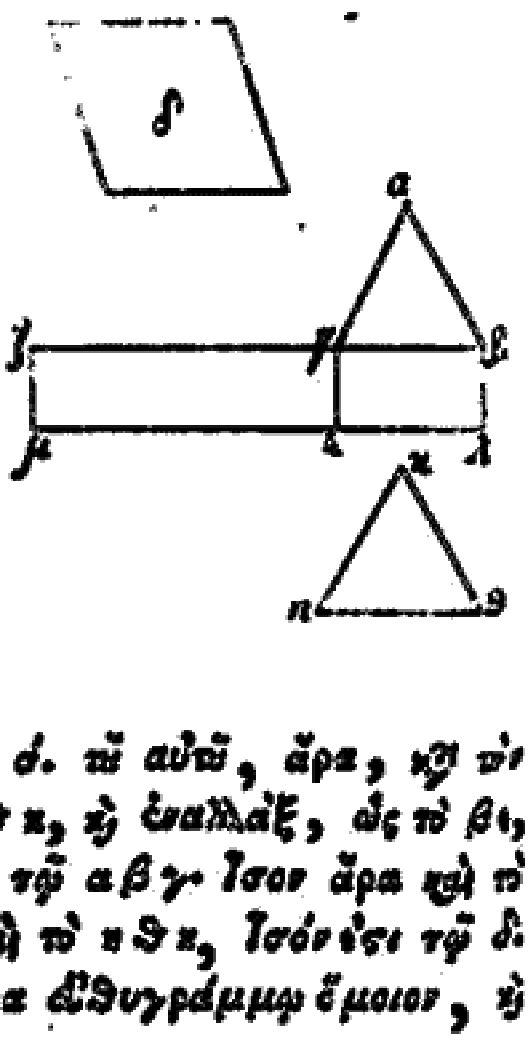
Ἔστωσαν δὲ περὶ τὴν διάμετρον αγ, τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου, παραλληλόγραμμα τὰ αεζη, ζθγκ. Λέγω ταῦτα, ὅμοια εἶναι τῷ τε ὅλῳ αγ, καὶ ἀλλήλοις. Ἐπεὶ γὰρ ἡ εζ, παράλληλός ἐστι τῇ βγ, πάντως γε, κατὰ τὴν κθ': τοῦ α: ἡ μὲν ὑπὸ αεζ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ εζα, τῇ ὑπὸ βγα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εαζ, κοινή, ἄρα τὸ αεζ τρίγωνον, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ αβγ, τριγώνῳ. ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος. ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ αε, πρὸς τὴν εζ, ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ὡς δὲ ἡ εζ, πρὸς τὴν ζα, ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, καὶ ὡς ἡ ζα, πρὸς τὴν αε, ἡ γα, πρὸς τὴν αβ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, καὶ τὸ αζη, ἰσογώνιον τῷ αγδ. ὥστε ὡς ἡ αζ, πρὸς τὴν ζη, ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ. ὡς δὲ ἡ ζη, πρὸς τὴν ηα, ἡ γδ, πρὸς τὴν δα, καὶ ὡς ἡ αη, πρὸς τὴν αζ, ἡ δα, πρὸς τὴν αγ. Ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡ εζ, πρὸς τὴν ζα, ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ὡς δὲ ἡ αζ, πρὸς τὴν ζη, ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ, καὶ δὶ ἴσου ἄρα, κατὰ τὴν κβ': τοῦ έ: ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν ζη, ἡ βγ, πρὸς τὴν γδ. Πάλιν ἐπεὶ δέδεικται ὡς μὲν ἡ ηα, πρὸς τὴν αζ, ἡ δα, πρὸς τὴν αγ, ὡς δὲ ἡ ζα, πρὸς τὴν αε, ἡ γα, πρὸς τὴν αβ, καὶ δὶ ἴσου ἄρα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κβ': ὡς ἡ κα, πρὸς τὴν αε, ἡ δα, πρὸς τὴν αβ. δέδεικται δὲ καὶ ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εζ, ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ὡς δὲ ἡ ζκ, πρὸς τὴν κα, ἡ γδ, πρὸς τὴν δα, ἄρα τῶν αεζκ, αβγδ, παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, ὅτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν ἴσαι, δῆλον. δέδεικται γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ αεζ, ἴση τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ ακζ, τῇ ὑπὸ αδγ. ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ εαζ, δέδεικται ἴση τῇ ὑπὸ βγα, ἡ δὲ ὑπὸ αζκ, τῇ ὑπὸ αγδ, ἄρα καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ εζκ, ἴση ἐςὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ βγδ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ εακ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐςίν, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αεζκ, παραλληλόγρ: τῷ αβγδ. ἔχει δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς ἤδη δέδεικται. ἄρα, κατὰ τὸν α': ὅρον, ὅμοιόν ἐςι τὸ αὐτὸ αεζκ, παραλληλ: τῷ αβγδ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ ζθγκ, ὅμοιον τῷ αὐτῷ αβγδ. ὥστε, κατὰ τὸν κα': τοῦ παρόντος, τὰ αζ, ζγ, ὅμοιά ἐςι. δέδεικται δὲ καὶ τῷ ὅλῳ αγ, ἑκάτερον ὅμοιον, Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΕ': Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συςήσασθαι.

Ἔςωσαν δοθέντα εὐθύγραμμα τό, τε αβγ, καὶ δ. καὶ ζητείσθω συςαθῆναι εὐθύγραμμον ὅμοιον μὲν τῷ αβγ, ἴσον δὲ τῷ δ. Παραβληθήτω δὴ παρὰ μὲν τὴν βγ, εὐθεῖαν, κατὰ τὴν μδ': καὶ μϛ: τοῦ α': παραλληλόγραμμον τὸ βε, ἴσον τῷ αβγ, δοθέντι. παρὰ δὲ τὴν γε, τὸ εζ, ἴσον τῷ δ, ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ εγζ, ἴσην τῇ ὑπὸ γβλ, καὶ ἔςαι πάντως ἐπ' εὐθείας ἡ βγ, τῇ γζ, κατὰ τὴν ιδ': τοῦ αὐτοῦ. εἶτα εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν βγ, γζ, ἡ κθ, διὰ τῆς ιγ': τοῦ παρόντος. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς κθ, εὐθύγραμμον τὸ κθκ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ αβγ, διὰ τῆς ιη'. τοῦ αὐτοῦ, καὶ τοῦτο ἔςαι τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ βγ, κθ, γζ, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, πάντως γε, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς κ'. τοῦ παρόντος, ἔςιν ὡς ἡ βγ, πρώτη πρὸς τὴν γζ, τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς α'. αβγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β'. κθκ. ὡς δὲ ἡ βγ, πρὸς τὴν γζ, ἔςι καὶ τὸ βε, πρὸς τὸ εζ, κατὰ τὴν α'. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα, κατὰ τὴν ια'. τοῦ ε'. ὡς τὸ βε, πρὸς τὸ εζ, τὸ αβγ, πρὸς τὸ κθκ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ βε, πρὸς τὸ αβγ, τὸ εζ, πρὸς τὸ κθκ, ἴσον δὲ τὸ βε, τῷ αβγ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ εζ, τῷ κθκ. ἀλλὰ τὸ εζ, ἴσον γέγονε τῷ δ. ἄρα καὶ τὸ κθκ, ἴσον ἐςὶ τῷ δ. γέγονε δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ὅμοιον τῷ αβγ, τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον συνέςη τὸ αὐτό.

Eucl. Lib. 6. Fig. 28.



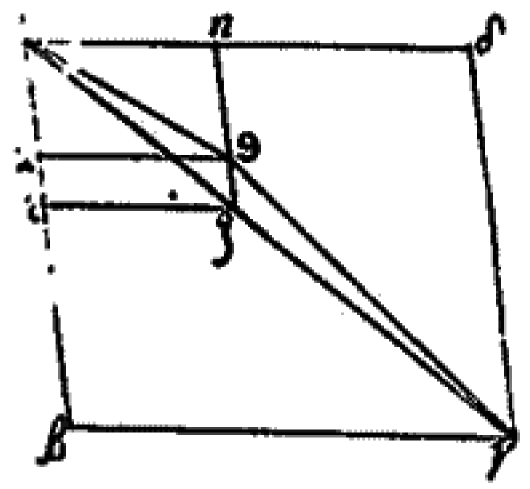
Πρό-

Πρότασις ΚϚʹ. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ, καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ α β γ δ, παραλληλογράμμου ὅμοιον παραλληλόγραμμον τὸ α ε ζ η, καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ α β γ δ, ἔχον καὶ γωνίαν κοινὴν τὴν ὑπὸ β α δ. Λέγω, ὅτι τὸ α ε ζ η, παραλληλόγραμμον περὶ τὴν αὐτὴν α ζ γ, διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ α β γ δ. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω αὐτῷ διάμετρος ἡ α θ γ. καὶ διὰ τοῦ θ, διήχθω παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν α δ, β γ, ἡ θ κ. καὶ ἐπεὶ τὸ η κ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον, τὴν α θ γ, ἐστὶ τῷ ὅλῳ α β γ δ, πάντως γε, κατὰ τὴν κδʹ: τοῦ ςʹ: ὅμοιόν ἐστι τὸ η κ, τῷ β δ. ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, καὶ τὸν αʹ: ὅρον τοῦ παρόντος, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ α, πρὸς τὴν α β, ἡ η α, πρὸς τὴν α κ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ δ α, πρὸς τὴν α β, ἐστὶ καὶ ἡ η α, πρὸς τὴν α ε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ε η, β δ, ἄρα γ καὶ τὴν ιαʹ: τοῦ εʹ: ἡ η α, πρὸς ἑκατέραν τῶν α κ, α ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ κατὰ τὴν θʹ: τοῦ αὐτοῦ, ἡ α κ, ἴση ἐστὶ τῇ α ε, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ α θ γ, διάμετρός ἐστι τοῦ α γ, ἀλλ᾽ ἡ α ζ γ, τοῦ τε α β γ δ, καὶ α ε ζ η, διάμετρός ἐστιν. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 29.



Πρότασις ΚΖʹ. Θεώρημα.

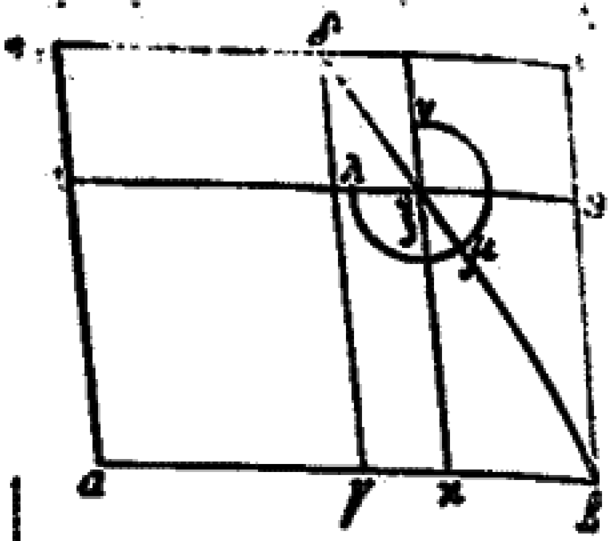
Πάντων τῶν περὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

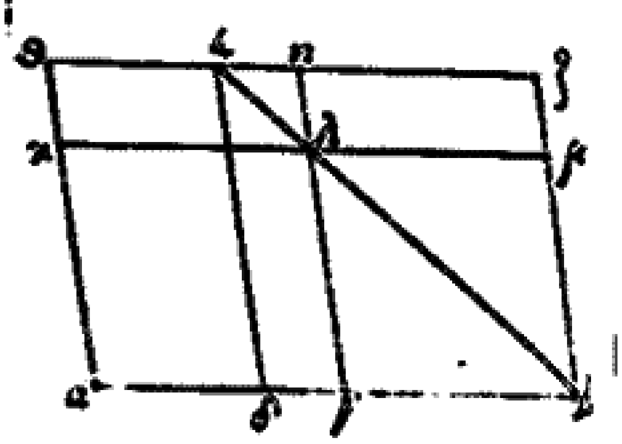
Ἔστω δὴ εὐθεῖα ἡ α β, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ. εἶτα παραβληθήτωσαν παρὰ τὴν α β, τὰ α δ, α ζ, παραλληλόγραμμα, ἐλλείποντα εἴδεσι παραλληλογράμμοις τοῖς γ ε, κ θ, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας γ β, δηλ: τῷ ἤτοι τῷ γ ε. Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας α γ, παραλληλόγραμμον, ὥστε α δ, μεῖζόν ἐστι τοῦ α ζ. κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν τὸ κ θ, ὅμοιόν ἐστι τῷ γ ε, καὶ τὴν ἀντιστρ. τὰ κ θ, γ ε, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον. ἤχθω τοίνυν διάμετρος αὐτῶν ἡ δ β, καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ τὸ γ ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ζ ε, κατὰ τὴν μγʹ: τοῦ αʹ: κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ κ θ. ἔσται πάντως ὅλον τὸ γ θ,

 Ἴσον

ἴσον ὅλῳ τῷ κε. ἀλλὰ τὸ γθ, ἴσόν ἐστι τῷ γκ, διὰ τὴν λϛʹ: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὸ κε, ἴσόν ἐστι τῷ γκ. κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ γζ, ὅλον τὸ αζ, ἴσόν ἐστι τῷ λμν, γνώμονι, τοῦ δὲ λμν, γνώμονος μεῖζόν ἐστι τὸ γε, ὅλον, ἄρα τὸ γε, μεῖζόν ἐστι καὶ τοῦ αζ. ἀλλὰ τῷ γε, ἴσόν ἐστι τὸ αδ, διὰ τὴν ῥηθεῖσαν λϛʹ: τοῦ αʹ: τὸ αδ, ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ αζ.

Eucl. Lib. 6. Fig. 30.





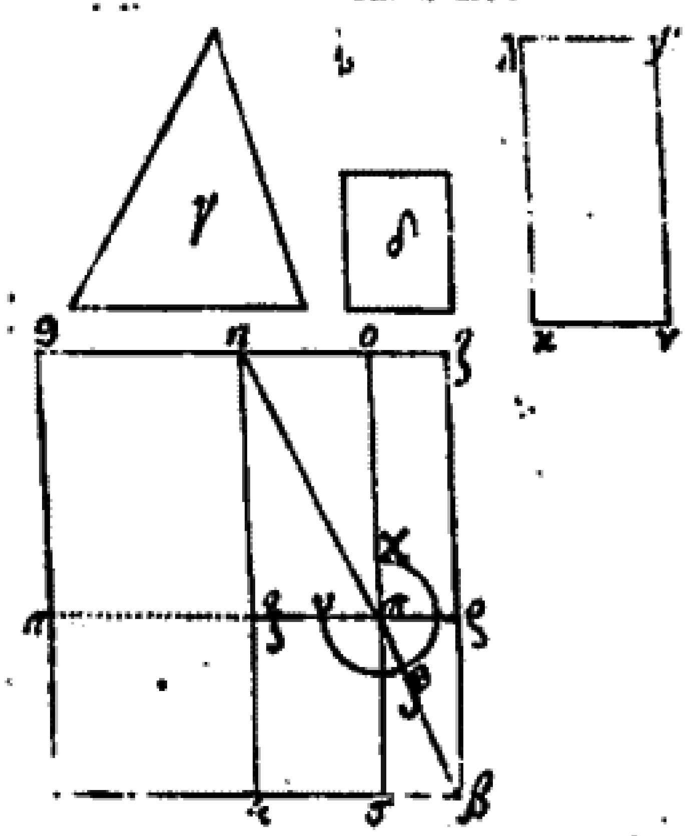
Παραβεβλήσθωσαν δὲ πάλιν παρὰ τὴν αβ, τετμημένην δίχα, κατὰ τὸ γ, τὰ αλ, αε, παραλληλόγραμμα, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ἡμισείας αγ, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάττονος τῆς ἡμισείας αδ, ἐλλείποντα εἴδεσι παραλληλογράμμοις, τοῖς γμ, δζ, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αγ. Λέγω δὲ, τὸ αλ, μεῖζον εἶναι τοῦ αε. διὰ γὰρ τὴν κδʹ: τοῦ παρόντος, ἐπεὶ τὰ γμ, δζ, ὅμοιά εἰσι, περὶ τὴν αὐτὴν πάντως εἰσὶ διάμετρον. Ἔστω δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ εβ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ τὸ ζλ, ἴσόν ἐστι τῷ λθ, διὰ τὴν λϛʹ: τοῦ αʹ: τὸ δὲ λζ, ἴσόν ἐστι τῷ δλ, κατὰ τὴν μγʹ: τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε καὶ τὸ δλ, ἴσόν ἐστι τῷ λθ. ἀλλὰ τὸ λθ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κε, ἄρα καὶ τὸ δλ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κε. κοινοῦ δὲ εἰλημμένου τοῦ δκ, ὅλον ἄρα τὸ αλ, ὅλου τοῦ αε, μεῖζόν ἐστι. πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΗʹ: Πρόβλημα.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν τε ἐλλειμμάτων, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ, ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, παραλληλογράμμου.

Δοθεῖσα εὐθεῖα μὲν ἡ αβ, εὐθύγραμμον δὲ τὸ γ, παραλληλόγραμμον δὲ τὸ δ. καὶ ἐπιτετάχθω παραβληθῆναι παρὰ τὴν αβ, εὐθεῖαν παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ γ, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δ. τὸ δὲ γ, ἔστω μὴ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, τῶν παραβληθησομέσομένου παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας. Τμηθήτω δὴ, κατὰ τὴν ι': τοῦ α': ἡ α β, δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἀπὸ τῆς α ε, ἀναγεγράφθω ὅμοιον τῷ δοθέντι δ, παραλληλογρ: τὸ α η, παραλληλόγρ: διὰ τῆς ιη': τοῦ παρόντος, καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ σχῆμα. εἰ οὖν τὸ α η, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι γ, γέγονε τὸ ἐπιταχθέν. ἐλλείπει γὰρ τῷ ε ζ, παραλληλογράμ: ὁμοίῳ ὄντι τῷ δ, δοθέντι. Εἰ δὲ μὴ ἴσον, ἔσται πάντως μεῖζον. εἰ γὰρ ἔλαττον, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. ἀλλὰ δὲ τὸ α η, ἴσον ἐστὶ τῷ ε ζ, κατὰ τὴν λϛ': τοῦ α': ἄρα τὸ ε ζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ γ. Συνεστάθω δὴ, κατὰ τὴν κε': τοῦ παρόντος, τὸ λ κ ν μ, παραλληλόγραμμον ἴσον μὲν τῇ ὑπεροχῇ, ᾗ ὑπερέχει τὸ ε ζ, τοῦ γ, ὅμοιον δὲ τῷ δοθέντι δ. καὶ ἔσται πάντως ὅμοιον καὶ τῷ ε ζ, κατὰ τὴν κα': τοῦ παρόντος. ἔστω δὲ ὁμόλογος, ἡ μὲν λ κ, τῇ η ε, ἡ δὲ λ μ, τῇ η ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ ε ζ, ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς γ, κ μ, πάντως γε τὸ ε ζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κ μ, ὥστε καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτοῦ πλευραὶ, μείζονές εἰσι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τοῦ κ μ. εἰλήφθω δὴ ἡ μὲν η ξ, ἴση τῇ λ κ, ἡ δὲ η ο, τῇ λ μ, κατὰ τὴν γ': τοῦ α': καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ξ ο, παραλληλόγραμμον, κατὰ τὴν λα': τοῦ αὐτοῦ. καὶ ἔσται ἴσον τῷ κ μ, καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ κ μ, ὅμοιόν ἐστι τῷ ε ζ, ἄρα καὶ τὸ ξ ο, ὅμοιόν ἐστι τῷ αὐτῷ ε ζ, κατὰ τὴν κα': τοῦ παρόντος, καὶ περὶ τὴν αὐτὴν πάντως διάμετρον, κατὰ τὴν κϛ': τοῦ αὐτοῦ. Ἔστω δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ η β. καὶ καταγραφήτω τὸ σχῆμα, καὶ ἔσται τὸ σ ρ, ὅμοιον τῷ δ, διὰ τὸ εἶναι ὅμοιον τῷ ξ ο. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ε ζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς γ, κ μ, τῷ δὲ κ μ, ἴσον ἐστὶ τὸ ξ ο, ἄρα ὁ υ φ χ, γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ γ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ ο ρ, ἴσον ἐστὶ τῷ ε π, κατὰ τὴν μγ': τοῦ α': κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ σ ρ, ἔσται ὅλον τὸ ο β, ἴσον ὅλῳ τῷ ε ρ. ἀλλὰ τὸ ε ρ, ἴσον ἐστὶ τῷ α ξ, κατὰ τὴν λϛ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὸ ο β, ἴσον ἐστὶ τῷ α ξ. κοινοῦ δὲ αὖθις λαμβανομένου τοῦ ε π, ἔσται ὅλον τὸ α π, ἴσον τῷ υ φ χ, γνώμονι, ἀλλ' ὁ υ φ χ, γνώμων, ἴσος δέδεικται τῷ γ, ἄρα καὶ τὸ α π, ἴσον ἐστὶ τῷ γ, ἐλλείπει δὲ τῷ σ ρ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δ. παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. lib. 6. Fig. 31.



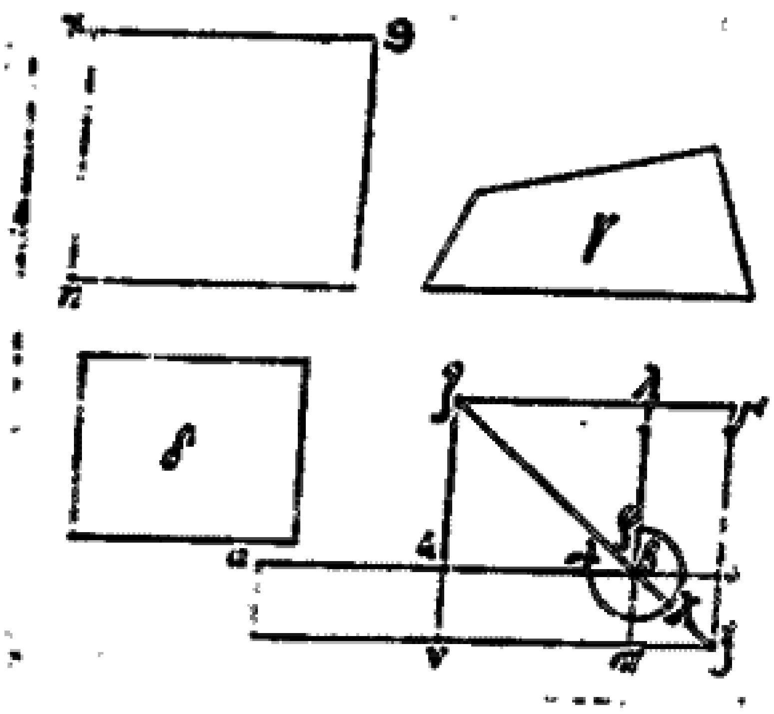
Πρε-

Πρότασις ΚΘ'. Πρόβλημα.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἔστω παραβαλεῖν παρὰ τὴν α β, δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι γ, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ. Τετμήσθω δὴ ἡ δοθεῖσα α β, εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ ε, διὰ τῆς ι: τοῦ α: καὶ ἀναγεγράφθω ἐπὶ τῆς ε β, διὰ τῆς ιη: τοῦ παρόντος παραλληλόγραμμον τὸ ε λ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ δ. εἶτα συναμφοτέροις μὲν τοῖς ε λ, γ, ἴσον, τῷ δὲ δ, ὅμοιον, συνεστάθω παραλληλόγραμμον τὸ κ θ, ὅπερ πάντως ὅμοιόν ἐστι καὶ τῷ ε λ. ἔστω δὲ ὁμόλογος ἡ μὲν κ θ, τῇ ζ λ, ἡ δὲ κ η, τῇ ζ ε. καὶ ἐπεὶ τὸ κ θ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ε λ, μεῖζον δέπουθέν ἐστι καὶ ἡ μὲν κ θ, τῆς ζ λ, ἡ δὲ κ η, τῆς ζ ε. ἐκβεβλήσθωσαν τοίνυν κατὰ τὸ συνεχὲς αἱ ζ λ, ζ ε. καὶ ἔστω ἡ μὲν ζ λ μ, ἴση τῇ κ θ, ἡ δὲ ζ ε ν τῇ κ η, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ μ ν, καὶ ἔσται πάντως ἴσον τῷ κ θ. ἀλλὰ τῷ κ θ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ε λ, ἄρα καὶ τὸ μ ν, ὅμοιόν ἐστι τῷ ε λ. ὥστε τὰ ε λ, μ ν, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσὶ διάμετρον, κατὰ τὴν κϛ': τοῦ παρόντος. Ἔστω δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ ζ ξ. καὶ ἐπεὶ τὸ κ θ, ἴσόν ἐστι τοῖς ε λ, γ, πάντως γε καὶ τὸ μ ν, ἴσόν ἐστι τοῖς ε λ, γ. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ε λ, ἐναπολείπεται ὁ φ χ ψ γνώμων, ἴσος τῷ γ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ μ β, ἴσόν ἐστι τῷ β ν, κατὰ τὴν μγ': τοῦ α: ἔστι δὲ καὶ τὸ α ν, ἴσον τῷ β ν, κατὰ τὴν λϛ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ α ν, ἴσόν ἐστι τῷ μ β, κατὰ τὸ α: ἀξίωμα. κοινὸν εἰλήφθω τὸ ο ν, ὅλον ἄρα τὸ α ξ, ἴσόν ἐστιν ὅλῳ τῷ φ χ ψ, γνώμονι, ἀλλ' ὁ φ χ ψ, γνώμων, ἴσος ἐστὶ τῷ γ. ἄρα καὶ τὸ α ξ, ἴσόν ἐστι τῷ γ. ἔστι δὲ τὸ π ο, ὅμοιον τῷ δ, διὰ τὸ εἶναι ὅμοιον τῷ ε λ, κατὰ τὴν κα: τοῦ παρόντος. παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα α β, εὐθεῖαν παραβέβληται παραλληλόγραμμον τὸ α ξ, ἴσον τῷ δοθέντι γ, ὑπερβάλλον τῷ π ο, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ.

Eucl. Lib. 6. Fig. 32.



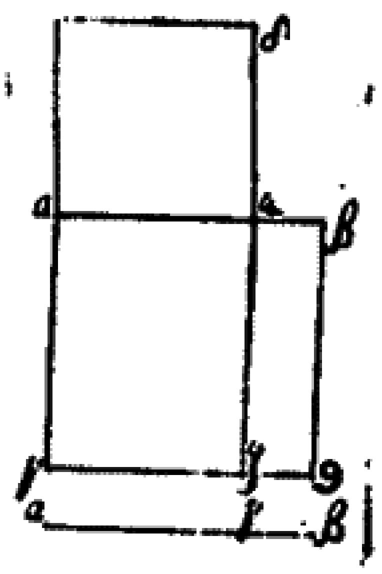
Πρό-

Πρότασις Λ΄: Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον, καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔστω δὴ τεμεῖν τὴν αβ, δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον. Ἀναγεγράφθω μὲν οὖν ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ βγ, κατὰ τὴν μϛ΄: τοῦ α΄: καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν αγ, παραλληλόγραμμον τὸ γδ, ἴσον τῷ βγ, τετραγώνῳ, ὑπερβάλλον εἴδει τῷ αδ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ αὐτῷ βγ, τετραγ: κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ἔσται πάντως καὶ τὸ αδ, τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ τὸ γδ, ἰσόν ἐστι τῷ γβ, κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ αζ, ἐναπολείπεται τὸ αδ, ἴσον τῷ εθ. ἔστι δὲ τῷ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον. ἄρα, κατὰ τὴν ιδ΄: τοῦ παρόντος, ἀντιπεπόνθασιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ τῶν αδ, εθ. ὥστε ὡς ἡ ζε, πρὸς τὴν εδ, οὕτως ἡ αε, πρὸς τὴν εβ, ἀλλ' ἡ μὲν ζε, ἴση ἐστὶ τῇ αγ, κατὰ τὴν λδ΄: τοῦ α΄: ἤτοι τῇ αβ, ἡ δὲ εδ, τῇ αε, ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ αε, πρὸς τὴν εβ. μείζων δὲ ἡ αβ, τῆς αε, μείζων ἄρα καὶ ἡ αε, τῆς εβ. ὅτε δὲ ἐστιν, ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλαττον, ἄκρον, καὶ μέσον λέγεται τετμῆσθαι λόγον, κατὰ τὸν γ΄: ὅρον τοῦ παρόντος. ἡ αβ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον τέτμηται λόγον, κατὰ τὸ προσαχθέν.

Eucl. lib. 6. Fig. 31.



Ἄλλως. Τετμήσθω ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα κατὰ τὸ γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνῳ, κατὰ τὴν ια΄: τοῦ β΄: καὶ ἔσονται πάντως αἱ αβ, αγ, γβ, ἑξῆς ἀνάλογον. τουτέστιν ὡς ἡ ὅλη αβ, πρὸς τὸ αγ, μεῖζον τμῆμα, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλαττον, ὥστε καὶ οὕτω μέσον, καὶ ἄκρον τέτμηται λόγον.

Πρότασις ΛΑ΄: Θεώρημα.

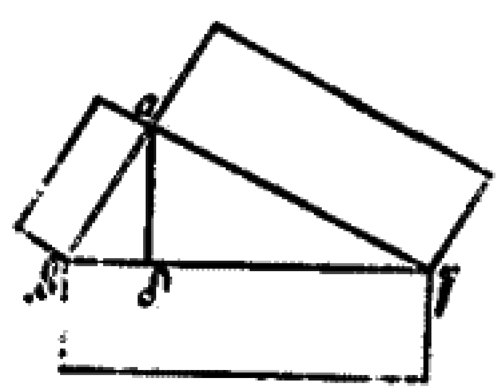
Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ. Λέγω δὴ, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α, κάθετος ἐπὶ τῆς βγ, ἡ αδ. καὶ πάντως γε κατὰ τὴν η΄: τοῦ παρόντος τὰ αβδ, αγδ, τρίγωνα, ὅμοιά εἰσι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ἔστιν ἄρα κατὰ τὸν α΄: ὅρον τοῦ παρόντος,

τος,

τος, ὡς ἡ γβ, πρὸς τὴν βα, ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, καὶ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ἡ γα, πρὸς τὴν γδ. ὥστε κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς κ': τοῦ παρόντος, ὡς ἡ γβ, α': πρὸς τὴν βδ, γ': οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς γβ, α': πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, β': ὡς δὲ ἡ βγ, πρώτη πρὸς τὴν γδ, γ': οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, α': πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, β': ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὰς βδ, δγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδη, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἀλλ' ἡ βγ, ἴση ἐστὶ ταῖς βδ, δγ, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Eucl. Lib. 6. Fig. 34.



Ἄλλως. Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι, λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, κατὰ τὸ α': πόρισμα τῆς κ': τοῦ παρόντος, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, εἶδος, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ τῆς βγ, πρὸς τὴν αβ. ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγ: ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ τῆς βγ, πρὸς τὴν αβ, κατὰ τὸ αὐτὸ πόρισμα, ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετρ: οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγ. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγ. οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγ. πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, τετράγωνα, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδη, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, τετραγώνοις, κατὰ τὴν μζ': τοῦ α': ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ἄρα τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστι, καὶ τὰ ἑξῆς.

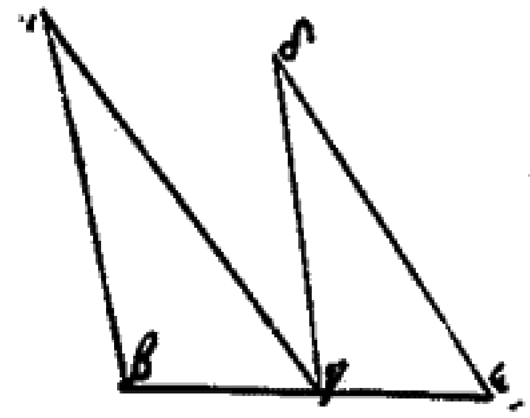
Πρότασις ΛΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Τρίγωνα ἤδη τὰ αβγ, δγε, ἔχοντα τὰς βα, αγ, καὶ γδ, δε, πλευρὰς αὐτῶν ἀνάλογον, ὡς τὴν βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτω τὴν γδ, πρὸς τὴν δε. Συντεθῇ.

συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς παραλλήλους εἶναι, τὴν μὲν βα, τῇ γδ, τὴν δὲ αγ, τῇ δε. Λέγω, ὅτι αἱ λοιπαὶ αὐτῶν πλευραὶ βγ, γε, ἐπ' εὐθείας εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς αβ, δγ, πέπτωκεν ἡ αγ, πάντως γε, κατὰ τὴν κθʹ: τοῦ αʹ: ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγδ, ἐναλλάξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ γδε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγδ, ὥστε ἡ πρὸς τῷ α, γωνία τοῦ αβγ, τριγώνου ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, τοῦ δγε, κατὰ τὸ αʹ: ἀξίωμα. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ βα, αγ, ἀνάλογον ταῖς γδ, δε, ἄρα κατὰ τὴν ϛʹ: τοῦ παρόντος, τὰ αβγ, δγε, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δγε. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ αγδ, ἴση, ὡς δέδεικται, ἄρα κοινῆς λαμβανομένης τῆς ὑπὸ βγα, πάντως γε αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ βγα, αγδ, δγε, ἀλλ' αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν λβʹ: τοῦ αʹ: ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ βγα, αγε, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὴν ιγʹ: τοῦ αὐτοῦ αἱ βγ, γε, εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας εἰσίν. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευράς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 35.



Πρότασις ΛΓʹ: Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι, ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

Ἐν τοῖς αβγ, δεζ, ἴσοις κύκλοις ἔστωσαν γωνίαι πρὸς μὲν τοῖς η, θ, κέντροις αἱ ὑπὸ βηγ, εθζ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις, αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ βγ, περιφέρεια πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ ὑπὸ βηγ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εθζ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, πρὸς τὴν ὑπὸ εδζ. εἰλήφθωσαν γὰρ περιφέρειαι ὁσαιδηποτοῦν ἴσαι τῇ μὲν βγ, αἱ γκ, κλ, τῇ δὲ εζ, αἱ ζμ, μν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηκ, ηλ, θμ, θν· καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν γκ, κλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ βγ, αἱ δὲ ζμ, μν, τῇ εζ, πάντως γε καὶ γωνίαι αἱ μὲν ὑπὸ γηκ, κηλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ ὑπὸ βηγ, αἱ δὲ ὑπὸ ζθμ, μθν, τῇ ὑπὸ εθζ. ὥστε ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ βλ, περιφέρεια τῆς βγ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ βηλ, γωνία τῆς

Eucl. Lib. 6. Fig. 36.