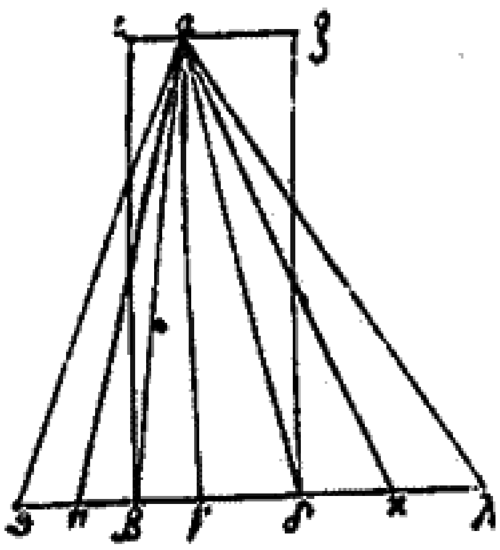
Πρότασις Α': Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα, καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν δὴ τρίγωνα μὲν τὰ αβγ, αγδ· παραλληλόγραμμα δὲ τὰ γε, γζ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ βγ, βάσις πρὸς τὴν γδ, ἐστὶ τό, τε αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ αγδ, καὶ τὸ γε, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γζ. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βδ, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὸ συνεχές. καὶ εἰλήφθω τῇ μὲν βγ, ἴσα τὰ βη, ηθ, διαστήματα, τῇ δὲ γδ, τὰ δκ, κλ, ὥστε ἰσοπληθῆ εἶναι τὰ τῆς γλ, μέρη τοῖς μέρεσι τῆς γθ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, αθ, ακ, αλ, εὐθεῖαι. καὶ ἐπεὶ τὰ αβγ, αηβ, αθη, τρίγωνα ἐπὶ ἴσων βάσεών εἰσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, δῆλον, ὅτι ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ, κατὰ τὴν λη': τοῦ α': ὁμοίως δὲ, κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ τὰ αγδ, αδκ, ακλ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὥστε ὁσαπλασίων μέν ἐστιν ἡ θγ, βάσις τῆς βγ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ αθγ, τρίγωνον τοῦ αβγ, τριγώνου. ὁσαπλασίων δὲ ἡ γλ, βάσις τῆς γδ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ αγλ, τρίγωνον τοῦ αγδ, τριγώνου. καὶ ἑπομένως, εἴγε ἡ θγ, βάσις μείζων ἐστὶ τῆς γλ, βάσεως, μεῖζον ἔσται καὶ τὸ αθγ, τρίγωνον τοῦ αγλ, τριγώνου, κἂν ἴση, ἴσον, κἂν ἐλάσσων, ἔλασσον.

Eucl. Lib. 6. Fig. 9.



Ἐπεὶ οὖν τεσσάρων μεγεθῶν τῶν βγ, γδ, βάσεων, καὶ αβγ, αγδ, τριγώνων εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν μὲν βγ, αβγ, α': δηλον: καὶ γ': τὰ θγ, αθγ· τῶν δὲ γδ, αγδ, β': δηλ: καὶ δ': τὰ γλ, αγλ, πάντως γε, κατὰ τὸν ε': ὅρον τοῦ ε': ὡς ἡ βγ, α': πρὸς τὴν γδ, β': ἐστὶ καὶ τὸ αβγ, γ': πρὸς τὸ αγδ· δ': ἀλλὰ τοῦ μὲν αβγ, διπλάσιόν ἐστι τὸ γε, τοῦ δὲ αγδ, τὸ γζ, ἄρα κατὰ τὴν ιε': τοῦ αὐτοῦ, ὡς τὸ αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ αγδ, οὕτω καὶ τὸ γε, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γζ. ὡς δὲ τὸ αβγ, πρὸς τὸ αγδ, ἐστὶ καὶ ἡ βγ, βάσις πρὸς τὴν γδ, βάσιν. ἄρα, κατὰ τὴν ια': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ βγ, βάσις πρὸς τὴν γδ, ἐστὶ καὶ τὸ γε, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γζ. Τὰ τρίγωνα ἄρα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΌΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν τοῖς τριγώνοις ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα, ἀναλόγως τέμνει τὸ τρίγωνον τῇ αὐτοῦ βάσει.

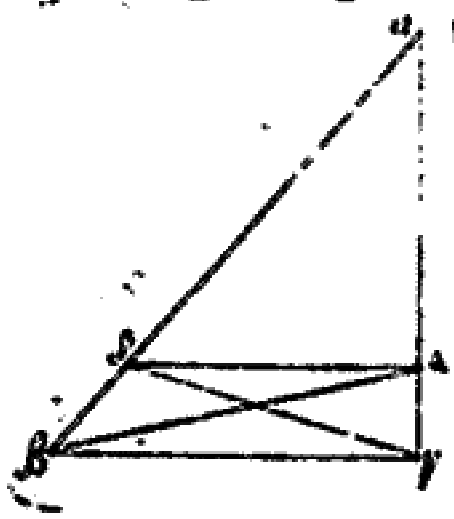
Πρό-

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν ἔσται παράλληλος.

Τριγώνου δὲ τοῦ α β γ, ἤχθω παρὰ μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν τὴν β γ, παράλληλος ἡ δ ε. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ β ε, γ δ. καὶ ἐπεὶ τὰ β δ ε, γ ε δ, τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐστὶ βάσεως τῆς δ ε, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς β γ, δ ε, πάντες κατὰ τὴν λζ'. τοῦ α'. ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. καὶ κατὰ τὴν ζ'. τοῦ ε'. τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς τὸ α δ ε, τρίγωνον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ β δ ε, πρὸς τὸ α δ ε, οὕτω καὶ τὸ γ δ ε, πρὸς τὸ αὐτὸ α δ ε. ἀλλ' ὡς ἔχει τὸ β δ ε, πρὸς τὸ α δ ε, ἔχει καὶ ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, ὡς δὲ τὸ γ ε δ, πρὸς τὸ α ε δ, ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α, κατὰ τὴν αὐτὴν, ἄρα κατὰ τὴν ια'. τοῦ ε'. ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, ἔστι καὶ ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 6. Fig. 10.



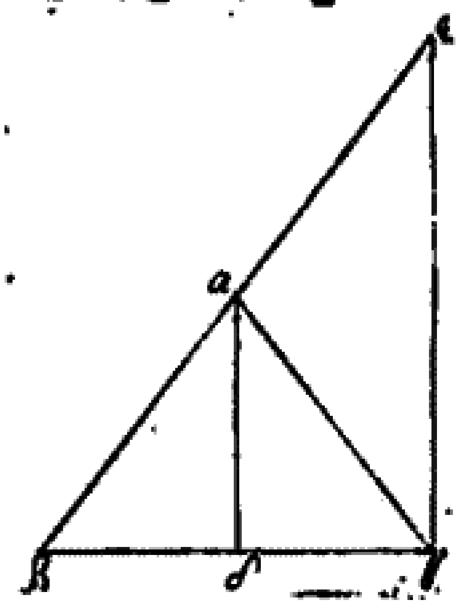
Ἔστω δὲ ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε δ. Λέγω, ὅτι ἡ ε δ, παράλληλός ἐστι τῇ β γ. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐστὶ πάλιν, κατὰ τὴν αὐτὴν, ὡς μὲν ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, τὸ β δ ε, τρίγωνον πρὸς τὸ α δ ε. ὡς δὲ ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α, τὸ γ ε δ, τρίγωνον πρὸς τὸ α ε δ. ἀλλ' ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, ὑπετέθη καὶ ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α. ἄρα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ια'. ἑκάτερον τῶν β ε δ, γ δ ε, τριγώνων τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ α δ ε. καὶ κατὰ τὴν θ'. τοῦ αὐτοῦ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν τὴν ε δ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά ἐστι μέρη, ἄρα κατὰ τὴν λθ'. τοῦ α'. καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις. ἡ δ ε, ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ β γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ δεύτερον.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς. καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Ἔστω δὲ τρίγωνον τὸ α β γ, καὶ τμηθήτω δίχα ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία δίχα ὑπὸ τῆς α δ, εὐθείας, κατὰ τὴν θ'. τοῦ α'. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ γ, ἔστι καὶ ςι καὶ ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ γ, παράλληλος τῇ αδ, ἡ γε, καὶ συμπιπτέτω τῇ γε, ἡ βα, ἐκβαλλομένη κατὰ τὸ ε. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς αδ, εγ, πέπτωκεν ἡ αγ, καὶ βε, πάντως γε κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ α: ἡ μὲν ὑπὸ αγε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γαδ, ἐναλλὰξ, ἡ δὲ ὑπὸ βαδ, ἐκτὸς τῇ ὑπὸ αεγ, ἐντός. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ γαδ, βαδ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αγε, αεγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ κατὰ τὴν ς΄: τοῦ αὐτοῦ, ἡ αγ, ἴση ἐστὶ τῇ αε. ἀλλὰ κατὰ τὴν β΄: τοῦ παρόντος, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἐστὶ καὶ ἡ βα πρὸς τὴν αε, τῇ δὲ αε, δέδεικται ἴση αγ. ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἐστὶ καὶ ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, ὅπερ ἦν τὸ Πρῶτον.

Eucl. Lib. 6. Fig. 11.



Ἔστω δ᾽ ἔτι ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ αδ. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς αδ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἡ γε, ἤχθη παράλληλος τῇ αδ, πάντως γε κατὰ τὴν β΄: τοῦ παρόντος, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἔχει ἡ βα, πρὸς τὴν αε. ὑπετέθη δὲ καὶ ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἄρα ἡ βα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἑκατέραν τῶν αε, αγ. καὶ κατὰ τὴν θ΄: τοῦ ε: αἱ αε, αγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥστε καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ αγε, αεγ, ὁμοίως ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, κατὰ τὴν ε΄: τοῦ πρώτου. ἀλλὰ δὴ κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ αὐτοῦ ἡ μὲν ὑπὸ αεγ, ἐντὸς ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαδ, ἐκτὸς, ἡ δὲ ὑπὸ αγε τῇ ὑπὸ γαδ, ἐναλλὰξ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γαδ, καὶ ἑπομένως ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία δίχα ὑπὸ τῆς αδ, τέτμηται, ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

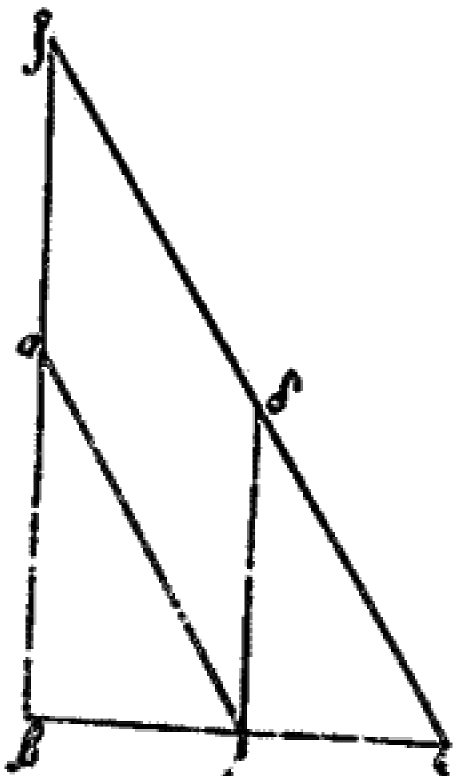
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν τοῖς ἰσοσκελέσι τριγώνοις μιᾶς τῶν ἴσων αὐτοῦ πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἐὰν ἀπὸ τῆς ἐκτὸς γωνίας παράλληλος τῇ βάσει εὐθεῖα ἀχθῇ, δίχα ἡ αὐτὴ τμηθήσεται γωνία, τοῦ γὰρ αγε, ἰσοσκελοῦς τριγ: τῆς αε, ἐκβληθείσης πλευρᾶς, ἐπεὶ ἡ αδ, παράλληλός ἐστι τῇ γε, βάσει, δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ βαγ, ἐκτὸς γωνία δίχα τέτμηται, ὡς ἤδη δέδεικται.

Πρότασις Δ΄: Θεώρημα.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Ἔστωσαν δὴ τρίγωνα ἰσογώνια τὰ αβγ, δγε, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγε, τὴν δὲ ὑπὸ βγα, τῇ πρὸς τῷ ε, καὶ τὴν λοιπὴν τῇ λοιπῇ. Λέγω, ὅτι τῶν αὐτῶν τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας. Κείσθω γὰρ ἡ βγ, ἐπ' εὐθείας τῇ γε. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, ἐλάττονές εἰσι δύο ὀρθῶν, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ α': τῇ δὲ ὑπὸ βγα, ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ ε· πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, βεδ, γωνίαι ἐλάττονές εἰσι δύο ὀρθῶν, καὶ αἱ βα, εδ, ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ συνεχὲς συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν δὴ κατὰ τὸ ζ. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ πρὸς τῷ β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δγε, πάντως γε κατὰ τὴν κη': τοῦ αὐτοῦ, αἱ βζ, γδ, παράλληλοί εἰσιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βγα, τῇ πρὸς τῷ ε, ἴση, ἄρα κατὰ τὴν αὐτὴν παράλληλοί εἰσι, καὶ αἱ γα, εζ. ὥστε τὸ αγδζ, παραλληλόγραμμόν ἐστι. καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ, ἡ μὲν αζ, ἴση ἐστὶ τῇ γδ, ἡ δὲ ζδ, τῇ αγ. καὶ κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος, ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αζ, ἔστι καὶ ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, ἴση δὲ ἡ αζ, τῇ γδ, ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν δγ, ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ δγ, πρὸς τὴν γε. πάλιν ἐπεὶ ἡ γδ, παράλληλός ἐστι τῇ ζβ, ἔστι πάντως γε κατὰ τὴν αὐτὴν, καὶ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, ἡ ζδ, πρὸς τὴν δε, ἴση δὲ ἡ ζδ, τῇ αγ, ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, ἡ αγ, πρὸς τὴν δε, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ἡ γε, πρὸς τὴν εδ. δέδεικται δὲ, ὅτι καὶ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ δγ, πρὸς τὴν γε, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἡ γδ, πρὸς τὴν δε, κατὰ τὴν κβ': τοῦ ε': τῶν ἰσογωνίων ἄρα τριγώνων ἀνάλογον, καὶ τὰ ἑξῆς.

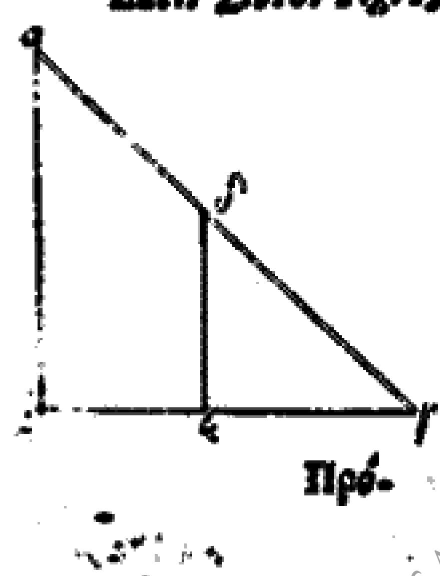
Eucl. Lib. 6. Fig. 12.



ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτων δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἐὰν τριγώνῳ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, τὸν αὐτὸν αὕτη ἕξει λόγον πρὸς ἣν ἂν παραλλήλως ἀχθείη, ὃν καὶ ἑκατέρα τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ἔχει πρὸς τὰ μέρη αὐτῆς. τῷ γὰρ αβγ, τριγώνῳ παρὰ τὴν αβ, πλευρὰν ἀχθήτω παράλληλος ἡ δε, καὶ ἐπεὶ τὰ αβγ, δεγ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, κατὰ τὴν κη': τοῦ α': πάντως γε κατὰ τὴν παροῦσαν, ἔστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ δε, πρὸς τὴν εγ, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν δε, ἡ βγ, πρὸς τὴν εγ. καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ δε, πρὸς τὴν αβ, ἡ γε, πρὸς τὴν γβ.

Eucl. Lib. 6. Fig. 13.

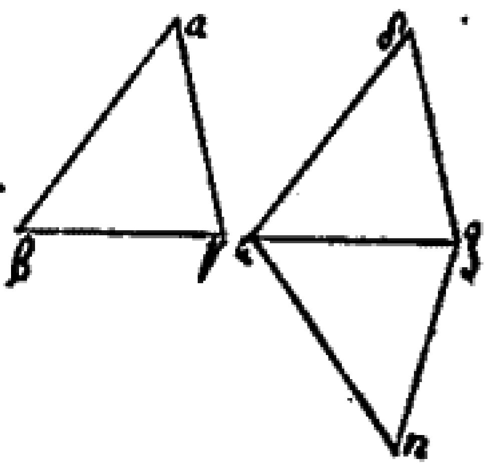


Πρό-

Πρότασις Εʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφʼ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Eucl. Lib. 6. Fig. 14.



Ἐχέτωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀνάλογον· καὶ ἔστω ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ἡ εζ, πρὸς τὴν ζδ, ὡς δὲ ἡ γα, πρὸς τὴν αβ, ἡ ζδ, πρὸς τὴν δε. Λέγω, ὅτι τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, καὶ ἴσας ἔχουσι τὰς γωνίας, τὴν μὲν πρὸς τῷ β, τῇ ὑπὸ δεζ, τὴν δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ ὑπὸ δζε, καὶ τὴν λοιπὴν τῇ λοιπῇ. Συνεστάθω γὰρ πρὸς τῇ εζ, εὐθείᾳ ἡ μὲν ὑπὸ ζεη, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γβα, ἡ δὲ ὑπὸ εζη, τῇ ὑπὸ βγα, καὶ ἔσται πάντως καὶ ἡ λοιπὴ, ἡ πρὸς τῷ η, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ α, ἴση· ὥστε κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὰ αβγ, ηεζ, τρίγωνα ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευράς. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ ηε, πρὸς τὴν εζ, ἀλλʼ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ὑπετέθη καὶ ἡ δε, πρὸς τὴν εζ, ἄρα αἱ δε, ηε, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς τὴν εζ, κατὰ τὴν ια: τοῦ ε: καὶ κατὰ τὴν θ: τοῦ αὐτοῦ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ δζ, τῇ ηζ, ἴση, κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς εζ, δειχθήσεται πάντως καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δεζ, ἴση τῇ ὑπὸ ηεζ, κατὰ τὴν η: τοῦ α: καὶ ὅλον τὸ δεζ, τρίγωνον ὅλῳ τῷ ηεζ, τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς, ἡ μὲν ὑπὸ εζδ, τῇ ὑπὸ εζη, ἡ δὲ πρὸς τῷ δ, τῇ πρὸς τῷ η, ἀλλʼ ἡ μὲν ὑπὸ ηεζ, ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ εζη, τῇ ὑπὸ βγα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δεζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ εζδ, τῇ ὑπὸ βγα, καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ δ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ α. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ, τριγώνῳ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποσχεθέν.

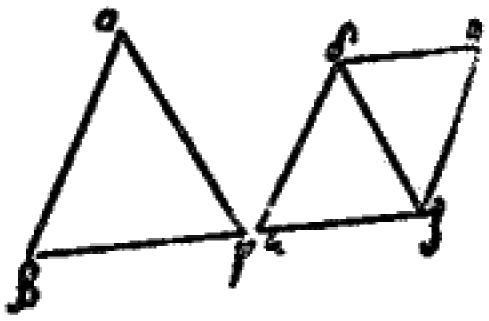
Πρότασις ϛʹ: Θεώρημα.

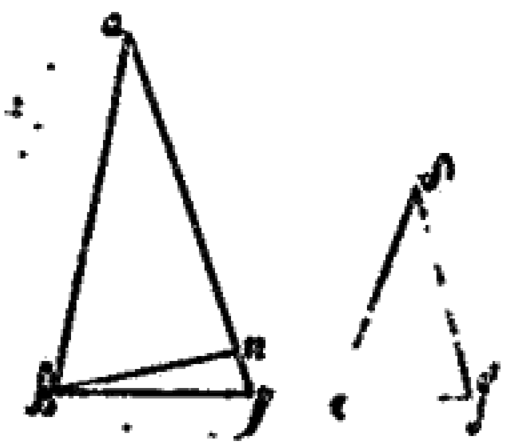
Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφʼ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐχέτωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ, ἴσην, καὶ τὰς βα, αγ, πλευρὰς ἀνάλογον ταῖς εδ, δζ. Λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ, τριγώνῳ. Συνεστάθω γὰρ πρὸς τῇ δζ, εὐθείᾳ, πρὸς μὲν τῷ δ, σημείῳ ἡ ὑπὸ ζδη, γωνία ἴση ὁποτέρᾳ τῶν ὑπὸ βαγ, εδζ, πρὸς δὲ τῷ ζ, ἡ ὑπὸ δζη, τῇ ὑπὸ αγβ, κατὰ τὴν κγʹ: τοῦ α:

καὶ ἔσαι πάντως καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ η, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ β, ἴση. Ἰσογώνια ἄρα τὰ δηζ, αγβ, τρίγωνα, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι, κατὰ τὴν δ': τῦ παρόντος, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, ἡ ηδ, πρὸς τὴν δζ, ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ὑπετέθη καὶ ἡ εδ, πρὸς τὴν δζ, ἄρα, κατὰ τὴν θ': τῦ ε': αἱ εδ, ηδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς δζ, ἔσι καὶ βάσις ἡ εζ, βάσει τῇ ζη, ἴση, καὶ ὅλον τὸ εδζ, τρίγωνον, ὅλῳ τῷ ηδζ, τριγώνῳ ἴσον, καὶ γωνία ἡ μὲν ὑπὸ δεζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δηζ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ δζε, τῇ ὑπὸ δζη, κατὰ τὴν δ': τῦ α': ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ δζη, ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ αγβ, ἡ δὲ πρὸς τῷ η ἴση δέδεικται τῇ πρὸς τῷ β, ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ δζε, ἴση ἐσὶ τῇ ὑπὸ αγβ, ἡ δὲ πρὸς τῷ ε, τῇ πρὸς τῷ β. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ, τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 15.





Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

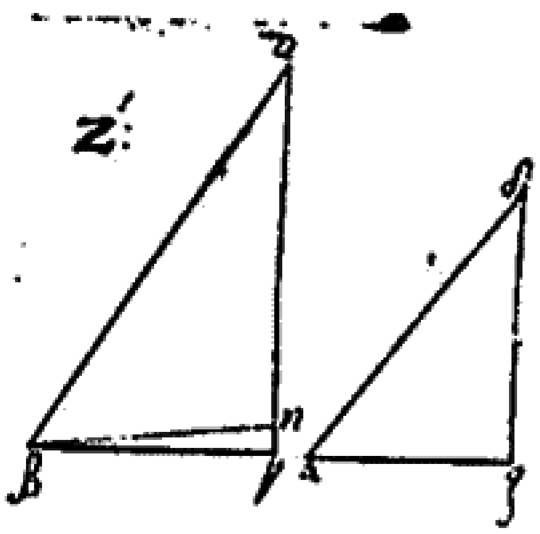
Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσαι τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Ἐχέτωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα γωνίαν μὲν τὴν πρὸς τῷ α, γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ δ, ἴσην, πλευρὰς δὲ τὰς αβ, βγ, ἀνάλογον ταῖς δε, εζ, καὶ ἔσω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς γ καὶ ζ, γωνιῶν ἐλάττων ὀρθῆς. Λέγω, ὅτι τὸ αβγ, τρίγ: ἰσογώνιόν ἐσι τῷ δεζ, καὶ ἔχει τὴν πρὸς τῷ β, ἴσην τῇ πρὸς τῷ ε, εἰ γὰρ μὴ, ἡ μία πάντως αὐτῶν ἔσαι μείζων, ἔσω δὴ αὕτη ἡ πρὸς τῷ β. καὶ συνεσάθω ἡ ὑπὸ αβη, ἴση τῇ πρὸς τῷ ε, ὑπετέθη δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α, ἴση τῇ πρὸς τῷ δ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αηβ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐσὶν, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβη, τρίγωνον τῷ δεζ. ὥστε ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βη, οὕτως ἡ δε πρὸς τὴν εζ, κατὰ τὴν δ': τῦ παρόντος. ἀλλ' ὡς ἡ δε, πρὸς τὴν εζ, ὑπετέθη καὶ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ αβ, ἄρα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἑκατέραν τῶν βη, βγ, καὶ κατὰ τὴν θ': τῦ ε': αἱ βη, βγ, ἴσαι εἰσὶν, ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ, τῇ ὑπὸ βηγ, κατὰ τὴν ε': τῦ α': ἡ δὲ πρὸς τῷ γ, ὑπετέθη ἐλάττων ὀρθῆς, ἄρα ἐλάττων ὀρθῆς ἐσὶ καὶ ἡ ὑπὸ βηγ, ἡ δὲ ὑπὸ βηα, μείζων ὀρθῆς, τῇ δὲ ὑπὸ βηα ἴση δέδεικται ἡ πρὸς τῷ ζ, ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ, μείζων ὀρθῆς, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων,

ἀπἄτοπον ἄρα. ὥστε ἡ ὑπὸ α β γ, οὐκ ἔστι μείζων τῆς πρὸς τῷ ε, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ, ἴση, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστὶ, καὶ ἑπομένως τὸ α β γ, τρίγωνον, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δ ε ζ.

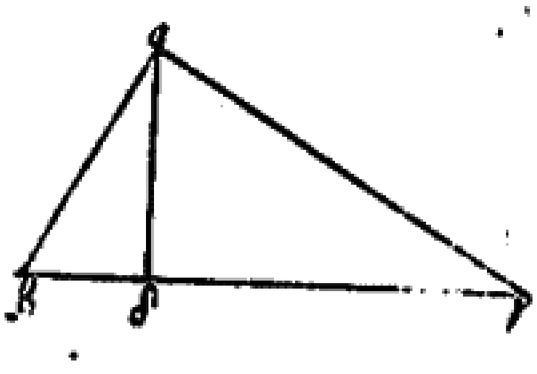
Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς γ, καὶ ζ, μὴ ἔλαττον ὀρθῆς. ὅτι δὲ καὶ οὕτω τὸ α β γ, τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δ ε ζ, δῆλον. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δειχθήσεται ἡ μὲν ὑπὸ β η α, γωνία, ἴση τῇ πρὸς τῷ ζ, αἱ δὲ β η, β γ, εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ β η γ, ἴση ἔσται τῇ πρὸς τῷ γ. ἀλλ' ἡ πρὸς τῷ γ, μὴ ἐλάττων ὑπετέθη ὀρθῆς, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ β η γ, μὴ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. τοῦ β γ η, ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι μὴ ἐλάσσονές εἰσι δύο ὀρθῶν, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ α': οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ α β γ, τῇ πρὸς τῷ ε. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα τὸ α β γ, τρίγωνον τῷ δ ε ζ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 16.



Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.



Ἔστω δὴ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ α β γ. ἀπὸ δὲ τῆς ὑπὸ β α γ, ὀρθῆς αὐτοῦ γωνίας πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς β γ, βάσεως ἡ α δ. Λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν α β δ, α δ γ, τριγώνων ὅμοιόν ἐστι τῷ τε α β γ, ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις. Ἐπεὶ γὰρ τῶν α β γ, α β δ, τριγώνων αἱ ὑπὸ β α γ, β δ α, γωνίαι, ἴσαι εἰσὶν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ β, πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ γ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ β α δ, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνια ἄρα τὰ α β γ, α β δ, τρίγωνα. καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος, ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευρὰς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ β, πρὸς τὴν β α, ἡ β α, πρὸς τὴν β δ. ὡς δὲ ἡ β α, πρὸς τὴν α γ, ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α. τὰ ἄρα α β γ, α β δ, τρίγωνα, ὅμοιά εἰσι, κατὰ τὸν α': ὅρον τοῦ παρόντος. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ α δ γ, ὅμοιον τῷ α β γ. ἔχουσι γὰρ ἴσας τὰς ὑπὸ β α γ, α δ γ, γωνίας, καὶ κοινὴν τὴν πρὸς τῷ γ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δ α γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ β, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνια ἄρα τὰ α β γ, α δ γ, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ': ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευρὰς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ἑπομένως ὅμοιόν ἐστι καὶ τὸ α δ γ, τῷ α β γ. ἑκάτερον ἄρα τῶν α β δ, α δ γ, τριγώνων ὅμοιόν ἐστι τῷ ὅλῳ α β γ.

αβγ. ὅτι δὲ καὶ ἀλλήλοις ὅμοιά εἰσι τὰ αὐτὰ δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βδα, γωνία τοῦ αβδ, τριγώνου ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γδα, τοῦ αδγ, τριγώνου, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, δέδεικται δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ β, ἴση τῇ ὑπὸ δαγ, ἡ δὲ ὑπὸ βαδ, τῇ πρὸς τῷ γ. πάντως γε τὸ αβδ, τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ αδγ, τριγώνῳ, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ΄: ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευράς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ἡ αὐτὴ δα, πρὸς τὴν δγ, ὡς δὲ ἡ δα, πρὸς τὴν αβ, ἡ δγ, πρὸς τὴν γα, καὶ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, ἡ γα, πρὸς τὴν αδ. τὰ ἄρα αβδ, αδγ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, δέδεικται δὲ ὅμοιον ἑκάτερον καὶ τῷ ὅλῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α. Α΄:

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τῆς βάσεως πίπτουσα κάθετος, μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α. Β΄:

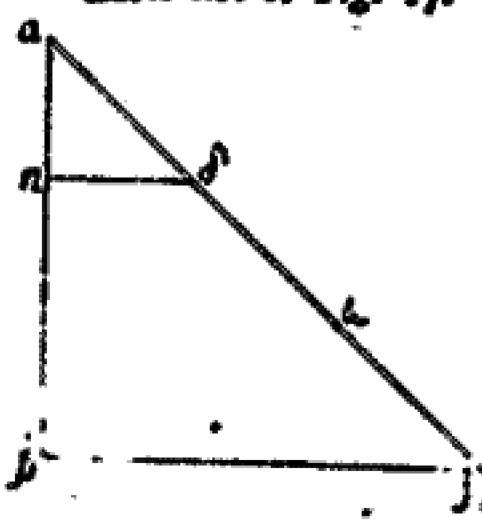
Ἔτι τῆς τε βάσεως καὶ ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρά, μέση ἐστὶν ἀνάλογος. ἡ μὲν γὰρ αβ, μέση δέδεικται ἀνάλογος τῆς βγ, βάσεως καὶ βδ, τμήματος. ἡ δὲ αγ, τῆς βγ, βάσεως καὶ γδ, τμήματος.

Πρότασις Θ΄: Πρόβλημα.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω δὴ ἀφελεῖν τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας μέρος, δὸς εἰπεῖν, τρίτον. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἡ αγ, εὐθεῖα, γωνίαν ποιοῦσα μετὰ τῆς αβ, τὴν τυχοῦσαν. καὶ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς αγ, τὸ τυχὸν μέρος αδ, καὶ τούτῳ ἴσον γινέσθω τό, τε δε, καὶ εζ. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζβ. ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἤχθω παράλληλος τῇ βζ, ἡ δη, καὶ τὸ αη, μέρος γ΄: ἔσται τῆς αβ. κατὰ γὰρ τὴν β΄: τοῦ παρόντος, ὡς ἡ αδ, πρὸς τὴν αζ, οὕτω καὶ ἡ αη, πρὸς τὴν αβ. ἀλλ᾽ ἡ αδ, τρίτον μέρος εἴληπται τῆς αζ, ἄρα καὶ ἡ αη, γ΄: μέρος ἐστὶ τῆς αβ. ὅπερ ἦν τὸ προσταχθέν:

Eucl. lib. 6. Fig. 17.



Πρότασις Ι΄: Πρόβλημα.

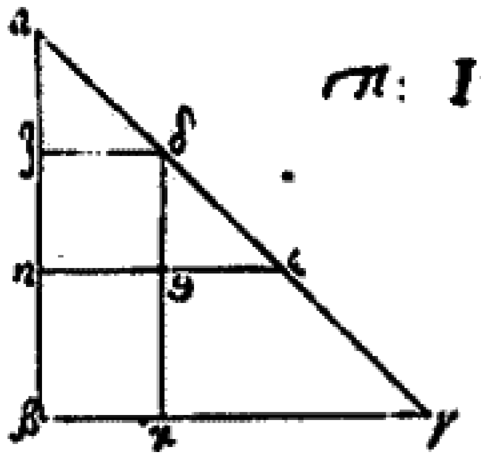
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

Ἔστω δὴ τεμεῖν τὴν αβ, ἄτμητον εὐθεῖαν ὁμοίως τῇ αγ, τετμημένῃ κατὰ τὰ δ καὶ ε, σημεῖα. Κείσθωσαν τοίνυν αἱ αβ, αγ, εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε γωνίαν

ποιεῖν

ποιεῖν πρὸς τῷ α, τὴν τυχοῦσαν. ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς β γ, διήχθωσαν ἀπὸ τοῦ ε, καὶ δ, σημείου παράλληλοι τῇ αὐτῇ β γ, αἱ δ ζ, ε η. ἀπὸ δὲ τοῦ δ, παραλλήλως τῇ α β, ἤχθω ἡ δ κ, τέμνουσα τὴν ε η, κατὰ τὸ θ, καὶ ἔσται τὸ προσταχθέν. Ἐπεὶ γὰρ τὰ ζ θ, θ β, παραλληλόγραμμά εἰσι κατὰ τὴν κατασκευὴν, πάντως γε, κατὰ τὴν δ': ἡ μὲν δ θ, ἴση ἐστὶ τῇ ζ η, ἡ δὲ θ κ, τῇ η β. ἀλλὰ τριγώνου τοῦ δ κ γ, παράλληλος ἦκται ἡ ε θ, τῇ κ γ, πλευρᾷ, ἄρα, κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος, ὡς ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε δ, οὕτως ἡ κ θ, πρὸς τὴν θ δ, ἤτοι ἡ β η, πρὸς τὴν η ζ. Ἐπεὶ δὲ καὶ τριγώνου τοῦ α η ε, παρὰ τὴν η ε, πλευρὰν ἦκται παράλληλος ἡ δ ζ, πάντως γε, κατὰ τὴν αὐτὴν, ὡς ἡ ε δ, πρὸς τὴν δ α, ἡ η ζ, πρὸς τὴν ζ α, δέδεικται δὲ καὶ ὡς ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε δ, ἡ β η, πρὸς τὴν η ζ. ἄρα ἡ α β, ὁμοίως τέτμηται τῇ α γ, κατὰ τὸ προσταχθέν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 6. Fig. 18.

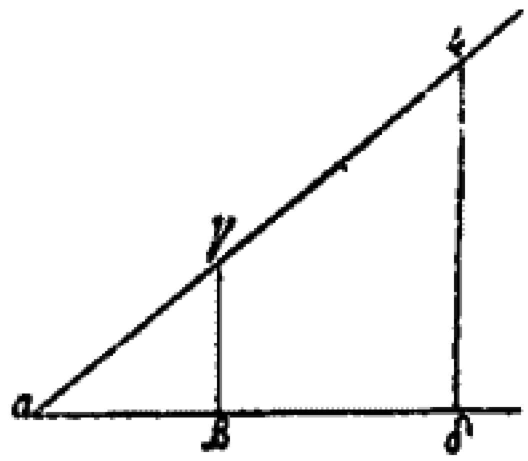


Π: Ι:

Πρότασις ΙΑ': Πρόβλημα.

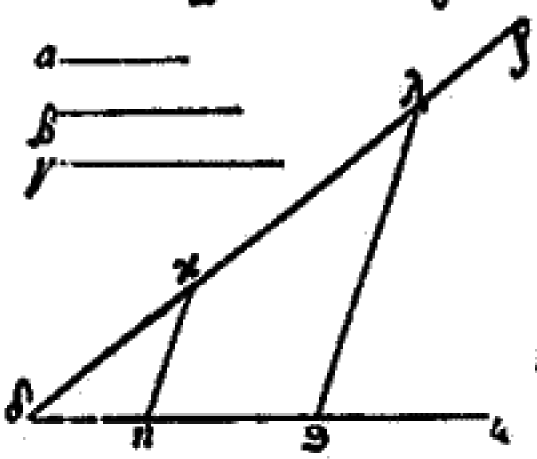
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστω δὴ εὑρεῖν τρίτην ἀνάλογον τῶν α β, α γ εὐθειῶν. Κείσθωσαν αἱ δοθεῖσαι α β, α γ, εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε τὴν τυχοῦσαν ποιεῖν γωνίαν, τὴν πρὸς τῷ α. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ γ β, ἐξαγομένων δὲ τῶν α β, α γ, κατὰ τὸ συνεχὲς, ἔστω ἡ β δ, ἴση τῇ α γ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ, ἤχθω παράλληλος τῇ β γ, ἡ δ ε, καὶ ἡ γ ε, ἔσται ἡ ζητουμένη. κατὰ γὰρ τὴν β': τοῦ παρόντος ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β δ, οὕτως ἡ α γ, πρὸς τὴν γ ε, ἀλλ' ἡ β δ, εἴληπται ἴση τῇ α γ, ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν α γ, οὕτως ἡ α γ, πρὸς τὴν γ ε. ἡ γ ε, ἄρα τρίτη ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α β, α γ, δοθεισῶν εὐθειῶν. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.



Πρότασις ΙΒ': Πρόβλημα.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.



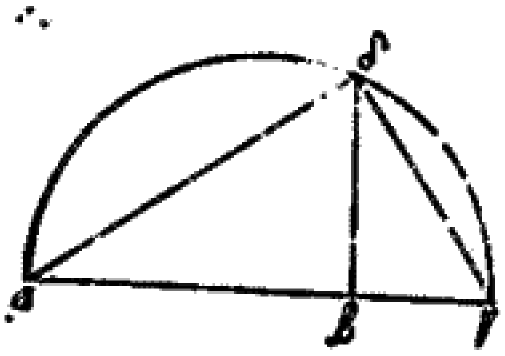
Ζητείσθω δὴ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, γ, δοθεισῶν εὐθειῶν. Κείσθωσαν αἱ τυχοῦσαι δ ε, δ ζ, εὐθεῖαι τυχοῦσαν ποιοῦσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ δ, καὶ εἰλήφθω τῇ μὲν α, ἴση ἡ δ η, τῇ δὲ β, ἡ η θ, καὶ τῇ γ, ἡ δ κ. καὶ τῇ η κ, ἐπιζευχθείσῃ, παράλληλος ἤχθω ἀπὸ τοῦ θ, ἡ θ λ. καὶ ἡ κ λ, ἔσται ἡ ζητουμένη. κατὰ γὰρ τὴν β': τοῦ παρόντος, ὡς ἡ δ η, πρὸς τὴν η θ, οὕτως ἡ δ κ, πρὸς τὴν κ λ, κλ, ἀλλ' ἡ μὲν δκ, ἐλλείπει ἴση τῇ α, ἡ δὲ κθ, τῇ β, καὶ ἡ δκ, τῇ γ. ἄρα ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ γ, πρὸς τὴν κλ. ἡ κλ, ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α, β, γ, δοθεισῶν εὐθειῶν, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΙΓ'. Πρόβλημα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

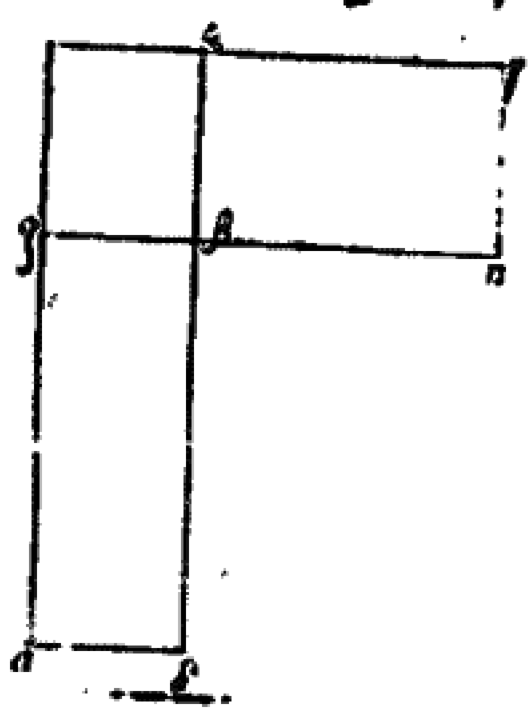
Ἔστωσαν δὴ αἱ αβ, βγ, εὐθεῖαι, καὶ ζητείσθω ἡ μέση αὐτῶν ἀνάλογος. Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ αβ, βγ, δοθεῖσαι εὐθεῖαι, καὶ γραφέτω περὶ τὴν ὅλην αγ, ἡμικύκλιον τὸ αδγ· καὶ ἀπὸ τοῦ β, ἀνεστάθω κάθετος ἡ βδ, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητουμένη. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αδ, δγ· καὶ ἐπεὶ τὸ αδγ, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι, κατὰ τὴν λα': τοῦ γ': ἀπὸ δὲ τῆς πρὸς τῷ δ, αὐτοῦ ὀρθῆς γωνίας πέπτωκε κάθετος ἐπὶ τῆς αγ, βάσεως ἡ δβ. ἄρα, κατὰ τὸ α': πόρισμα τῆς η': τοῦ παρόντος ἡ βδ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αβ, βγ, δοθεισῶν εὐθειῶν. ὅπερ ἦν τὸ προσταχθέν.

Eucl. Lib. 6. Fig. 19.



Πρότασις ΙΔ'. Πρόβλημα.

Τῶν ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.



Ἔστωσαν ἴσα τὰ αβ, βγ, παραλληλόγραμμα, ἔχοντα ἴσας τὰς πρὸς τῷ β, γωνίας. Λέγω δή, ὅτι αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ἀντιπεπόνθασι. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ, ἡ δβ, πρὸς τὴν βι. Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ δβ, τῇ βι, καὶ ἔσονται πάντως ἐπ' εὐθείας καὶ αἱ ηβ, βζ, κατὰ τὴν ιε': τοῦ α': καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ ιζ, παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν τὰ αβ, βγ, ἴσα εἰσί, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πάντως γε κατὰ τὴν ζ': τοῦ ε': τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἑκάτερον πρὸς τὸ ιζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ ζι, τὸ κι, πρὸς τὸ αὐτὸ ζι. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ αβ, πρὸς τὸ ζι, ἔστι καὶ ἡ δβ, πρὸς τὴν βι, κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος. ὡς δὲ τὸ κι, πρὸς τὸ ζι, ἡ ηβ, πρὸς τὴν ζβ, ἄρα καὶ ὡς ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ, ἡ δβ, πρὸς τὴν βι. ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αἱ πλευραὶ τῶν αβ, βγ, παραλληλογράμμων αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ, ἡ δβ, πρὸς τὴν βι. Λέγω, ὅτι τὰ αβ, βγ,

πα-

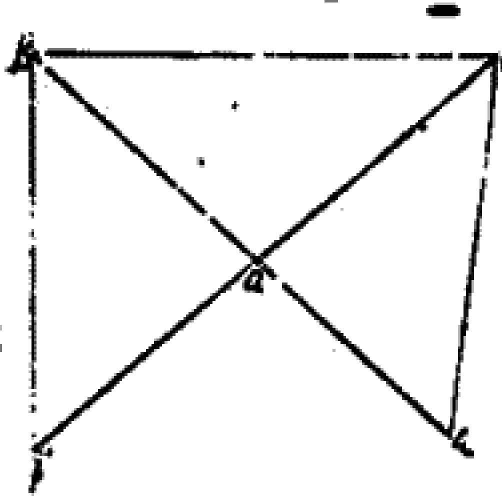
παραλληλόγραμμα ἴσα ἐςί. κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν αʹ: ὡς μὲν ἡ η β, πρὸς τὴν β ζ, ἐςὶ καὶ τὸ η ε, πρὸς τὸ ε ζ, ὡς δὲ ἡ δ β, πρὸς τὴν β ε, τὸ δ ζ, πρὸς τὸ ε ζ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ η β, πρὸς τὴν β ζ, ὑπετέθη ϗ ἡ δ β, πρὸς τὴν β ε, ἄρα τὰ α β, β γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ ε ζ, ϗ κατὰ τὴν θʹ: τοῦ εʹ: ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. τῶν ἴσων τε ἄρα, ϗ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, ϗ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΕʹ: Θεώρημα.

Τῶν ἴσων, ϗ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐςὶν ἐκεῖνα.

Ἔςωσαν δὴ ἴσα τρίγωνα τὰ α β γ, α δ ε, ἔχοντα τὴν ὑπὸ β α γ, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ δ α ε. Λέγω, ὅτι τῶν αὐτῶν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔςαι ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, ὡς ἡ ε α, πρὸς τὴν α β. Κείσθω γὰρ ἡ γ α, ἐπ᾽ εὐθείας τῇ α δ, ϗ ἔςαι πάντως, κατὰ τὴν ιεʹ: τοῦ αʹ: ϗ ἡ β α, ἐπ᾽ εὐθείας τῇ α ε, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ β δ.

Eucl. Lib. 6. Fig. 20.



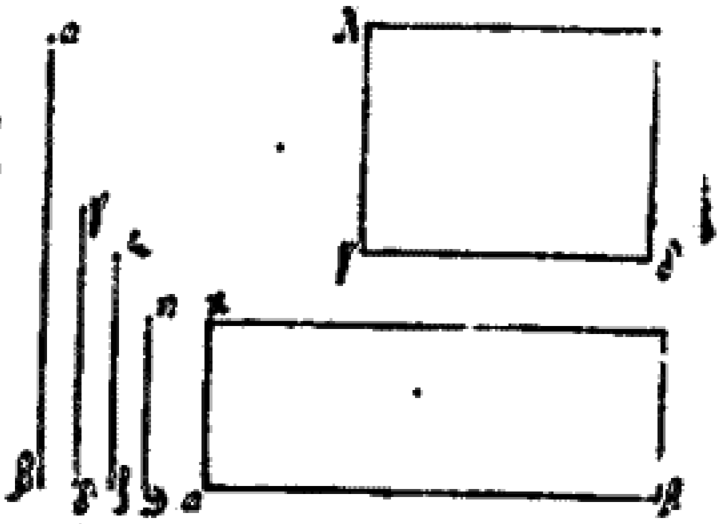
ϗ ἐπεὶ τὰ α β γ, α δ ε, τρίγωνα ἴσα ἐςί, πάντως γε, κατὰ τὴν ζʹ: τοῦ εʹ: ὡς τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ β α δ, οὕτω ϗ τὸ α δ ε, πρὸς τὸ αὐτὸ β α δ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ α β γ, πρὸς τὸ β α δ, ἔχει, καὶ ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, ὡς δὲ τὸ α δ ε, πρὸς τὸ αὐτὸ β α δ, ἔχει καὶ ἡ ε α, πρὸς τὴν α β, κατὰ τὴν αʹ: τοῦ παρόντος, ἄρα, κατὰ τὴν ιαʹ: τοῦ εʹ: ὡς ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, οὕτως ἡ ε α, πρὸς τὴν α β, ὅπερ ἦν τὸ αʹ: Ἀλλὰ δὴ ἔςω ϗ ὡς ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, ἡ ε α, πρὸς τὴν α β. Λέγω, ὅτι τὸ α β γ, τρίγωνον ἰσόν ἐςι τῷ α δ ε. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, ἐςὶ ϗ ἡ ε α, πρὸς τὴν α β, ϗ ὡς μὲν ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, ἐςὶ καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ β α δ, ὡς δὲ ἡ ε α, πρὸς τὴν α β, τὸ α δ ε, πρὸς αὐτὸ τὸ β α δ, κατὰ τὴν αʹ: τοῦ παρόντος, πάντως γε τὰ α β γ, α δ ε, τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἑκάτερον πρὸς τὸ β α δ, κατὰ τὴν ιαʹ: τοῦ εʹ: ϗ κατὰ τὴν θʹ: τοῦ αὐτοῦ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. Τῶν ἴσων τε ἄρα ϗ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, ϗ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ις': Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ ἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν δὴ ἀνάλογον αἱ αβ, γδ, εζ, ηθ, εὐθεῖαι, τουτέστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἡ εζ, πρὸς τὴν ηθ. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αβ, ηθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἰσόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Συνεστάθωσαν γὰρ ἐπὶ τῶν αβ, γδ, κάθετοι αἱ ακ, γλ, καὶ ἔστω ἡ μὲν ακ, ἴση τῇ ηθ, ἡ δὲ γλ, τῇ εζ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ βκ, δλ, παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἔστι καὶ ἡ εζ, πρὸς τὴν ηθ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ τῇ μὲν εζ, ἴση εἴληπται ἡ γλ, τῇ δὲ ηθ, ἡ ακ, πάντως γε ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἔστι καὶ ἡ γλ, πρὸς τὴν ακ, τῶν ἄρα βκ, δλ, ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί· εἰσὶ δὲ καὶ ἰσογώνια, ἄρα κατὰ τὴν ἀντίστροφον τὰ βκ, δλ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ἀλλὰ τὸ μὲν βκ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, ηθ, ἄκρων, ἴση γὰρ ἡ ακ, τῇ ηθ, τὸ δὲ δλ, τὸ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, μέσων, ἴση γὰρ ἡ γλ, τῇ εζ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αβ, ηθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἰσόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔδει δ:

Eucl. Lib. 6. Fig. 21.



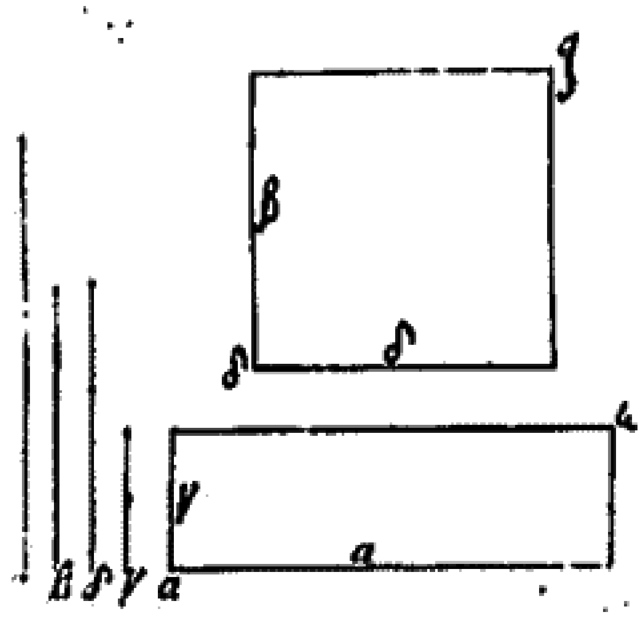
Ἔστω δ' ἔνι τὸ ὑπὸ τῶν αβ, ηθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Λέγω, ὅτι αἱ αβ, γδ, εζ, ηθ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ μὲν βκ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, ηθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴση γὰρ ἡ ακ, τῇ ηθ, τὸ δὲ δλ, τὸ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, ἴση γὰρ ἡ γλ, τῇ εζ· πάντως γε τὰ βκ, δλ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἀλλὰ δὲ καὶ ἰσογώνια, ἄρα κατὰ τὴν ἀντίστροφον, ἀντιπεπόνθασιν αὐτῶν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἡ γλ, ἤτοι ἡ εζ, πρὸς τὴν ακ, δηλ: τὴν ηθ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. Καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν αἱ α, β, γ, εὐθεῖαι ἀνάλογον, ὡς ἡ α, δηλον: πρὸς τὴν β, ἡ β, πρὸς τὴν γ. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β. εἰλήφθω γὰρ ἡ δ, ἴση τῇ β, καὶ ἔσονται τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ α, β, δ, γ, ἀνάλογον. ὥστε κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὸ ὑπὸ τῶν α γ, ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β δ, μέσων. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β, ἴση γὰρ ἡ δ, τῇ β. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τετραγώνῳ. Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν α γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β, τετραγώνῳ. Λέγω, ὅτι αἱ α, β, γ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι.

Eucl. Lib. 6. Fig. 22.



Ληφθείσης γὰρ τῆς δ, ἴσης τῇ β, συνεστάθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν α γ, τὸ α ε, παραλληλόγραμμον, ἀπὸ δὲ τῶν β δ, τὸ δ ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ α ε, ἴσον ἐστὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῷ ἀπὸ τῆς β, τετραγώνῳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν β δ, ἴση γὰρ ἡ δ, τῇ β, ἄρα τὸ α ε, ἴσον ἐστὶ τῷ δ ζ. εἰσὶ δὲ καὶ ἰσογώνια τὰ α ε, δ ζ. ἄρα αἱ πλευραὶ αὐτῶν ἀντιπεπόνθασι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ δ, πρὸς τὴν γ. ἀλλ' ἡ δ, ἴση εἴληπται τῇ β, ἄρα ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ β, πρὸς τὴν γ. Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

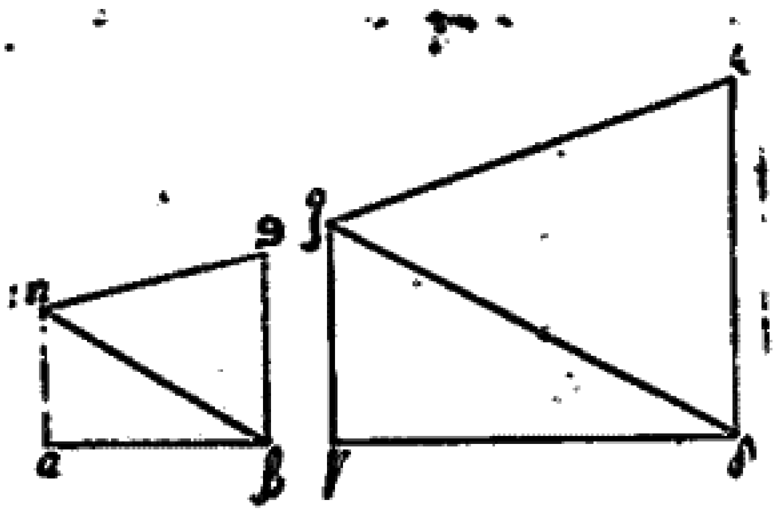
Πρότασις ΙΗ'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἀναγράψαι ἀπὸ τῆς α β, δοθείσης εὐθείας, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τῷ δοθέντι γ ε, εὐθυγράμμῳ. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ζ δ. καὶ συνεστάθωσαν ἐπὶ μὲν τῆς α β, εὐθείας, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις α, καὶ β, ἡ μὲν ὑπὸ α β η, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ γ δ ζ, ἡ δὲ ὑπὸ β α η, τῇ ὑπὸ δ γ ζ. πρὸς δὲ τῇ η β, εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς η, καὶ β, ἡ μὲν ὑπὸ η β θ, γωνία συνεστάθω ἴση τῇ ὑπὸ ζ δ ε. Λέγω, ὅτι τὸ α θ, ὅμοιόν ἐστι τῷ γ ε. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ α β η, γωνία, ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ γ δ ζ, ἡ δὲ πρὸς τῷ α, τῇ πρὸς

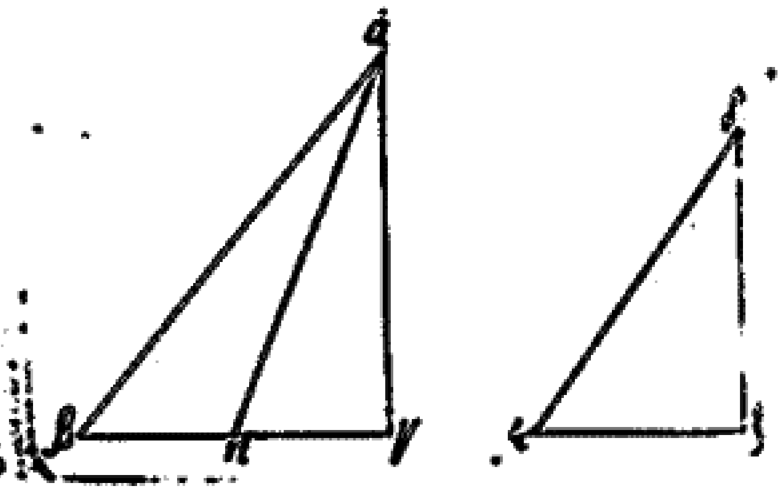
πρὸς τῇ γ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ α η β, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ γ ζ δ· ἰσογώνιον ἄρα τὸ α β η, τρίγωνον τῷ γ δ ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ ζ, πρὸς τὴν β η, ἡ ζ γ, πρὸς τὴν η α, καὶ ἔτι ἡ γ δ, πρὸς τὴν α β. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ η β θ, τρίγωνον, ἰσογώνιον τῷ ζ δ ε, καὶ ἔσται ὡς ἡ δ ζ, πρὸς τὴν β η, ἡ ζ ε, πρὸς τὴν η θ, καὶ ἔτι ἡ ε δ, πρὸς τὴν θ β· ἀλλ᾽ ὡς ἡ δ ζ, πρὸς τὴν β η, δέδεικται ἡ ζ γ, πρὸς τὴν η α, καὶ ἔτι ἡ γ δ, πρὸς τὴν α β, ἄρα κατὰ τὴν ια: τοῦ ε: ὡς ἡ ζ γ, πρὸς τὴν η α, οὕτως ἡ ζ ε, πρὸς τὴν η θ, καὶ ἡ ε δ, πρὸς τὴν θ β, καὶ ἔτι ἡ γ δ, πρὸς τὴν α β· ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ α η β, γωνία ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ γ ζ δ, ἡ δὲ ὑπὸ β η θ, τῇ ὑπὸ δ ζ ε, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ α η θ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ γ ζ ε. Διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α β θ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ δ ε. ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ α, ἴση τῇ πρὸς τῷ γ, ἡ δὲ πρὸς τῷ θ, τῇ πρὸς τῷ ε. ἰσογώνιον ἄρα τὸ α θ, τῷ γ ε. ἔχει δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, πάντως γε κατὰ τὸν α: ὅρον τοῦ παρόντος, ὅμοιόν ἐστιν. Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 23.



Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.



Ἔστωσαν ὅμοια τρίγωνα τὰ α β γ, δ ε ζ, ἴσην μὲν ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, τὰς δὲ β γ, ε ζ, ὑποτεινούσας ὁμολόγους. Λέγω, ὅτι τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ δ ε ζ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστίν, ἤπερ ἡ β γ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ε ζ, ὁμόλογον πλευράν. Εὑρήσθω γὰρ τρίτη ἀνάλογος τῶν β γ, ε ζ, ἡ β η, κατὰ τὴν ια: τοῦ παρόντος· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α η· καὶ ἐπεὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος, πάντως γε ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, ἔσται καὶ ἡ δ ε, πρὸς τὴν ε ζ· ὥστε καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ· ὡς δὲ ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, γέγονε καὶ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν β η, ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, ἔστι καὶ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν β η, ὥστε τῶν α β η, δ ε ζ, τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἄρα κατὰ τὴν ιε: τοῦ παρόντος, τὰ α β η, δ ε ζ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἀλλ᾽ ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν β η, ἔστι καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ α β η, κατὰ τὴν α: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν β η, ἔχει καὶ τὸ α β γ, τρίγ: πρὸς τὸ δ ε ζ,