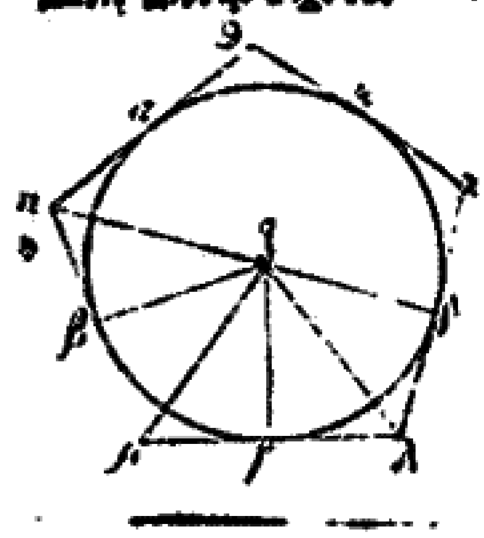
Πρότασις ΙΒ'. Πρόβλημα.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Φέρε δὴ περὶ τὸν α β γ δ ε, κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψωμεν. Νενοήσθωσαν ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου σημεῖα τὰ α β γ δ ε, ὥστε τὰς α β, β γ, γ δ, δ ε, ε α, ἴσας εἶναι. καὶ εἰλήφθω διὰ τῆς α'. τοῦ γ'. τὸ ζ, κέντρον τοῦ κύκλου. καὶ διὰ τῶν α, β, γ, δ, ε, σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ η θ, θ κ, κ λ, λ μ, μ η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζ η, ζ β, ζ μ, ζ γ, ζ λ, ζ δ. Ἐπεὶ οὖν ἡ μ λ, ἅπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν προσέπιπτεν ἡ ζ γ, πάντως γε αἱ πρὸς τῷ γ, γωνίαι ὀρθαί εἰσι, κατὰ τὸ πόρισμα, τῆς ις'. τοῦ γ'. ὡσαύτως καὶ αἱ πρὸς τῷ β, καὶ δ, ὀρθαί εἰσιν. ἀμέλει, κατὰ τὴν μζ'. τοῦ α'. τὸ ἀπὸ τῆς ζ μ, ἰσόν ἐστι τοῖς τε ἀπὸ τῶν ζ γ, γ μ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζ β, β μ, ὥστε, κατὰ τὸ α'. ἀξίωμα, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ζ γ, γ μ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζ β, β μ. ἀλλ' ἡ ζ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ζ β, ἄρα καὶ ἡ γ μ, ἴση ἐστὶ τῇ β μ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζ γ, ἴση τῇ ζ β, καὶ βάσις ἡ αὐτὴ ζ μ. κατὰ τὴν η'. ἄρα τοῦ α'. καὶ ὅλον τὸ ζ β μ, τρίγωνον, ἰσόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ζ γ μ, τριγώνῳ, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ β ζ μ, γωνία τῇ ὑπὸ γ ζ μ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ζ μ β, τῇ ὑπὸ ζ μ γ. καὶ ἑπομένως ἡ μὲν ὑπὸ β ζ γ, τῆς ὑπὸ γ ζ μ, διπλῆ ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ β μ γ, τῆς ὑπὸ γ μ ζ.



Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ μὲν ὑπὸ γ ζ δ, διπλῆ τῆς ὑπὸ γ ζ λ, ἡ δὲ ὑπὸ γ λ δ, τῆς ὑπὸ γ λ ζ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ β ζ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ ζ δ, κατὰ τὴν κζ'. τοῦ γ'. διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς β γ, γ δ, περιφερείας, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ γ ζ μ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ ζ λ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζ γ μ, τῇ ὑπὸ ζ γ λ, ὁμοίως ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ὡς δέδεικται, ἄρα τὰ ζ γ μ, ζ γ λ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας, καὶ τὴν ζ γ, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινήν, ὥστε καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξουσι, κατὰ τὴν κς'. τοῦ α'. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ζ μ γ, τῇ ὑπὸ ζ λ γ, καὶ εὐθεῖα ἡ μ γ, εὐθείᾳ τῇ γ λ, ὁμοίως ἴση, ἡ δὲ ὅλη μ λ. διπλασία τῆς μ γ. Διὰ τὰ αὐτὰ δείκνυται καὶ ἡ η μ, διπλασία τῆς β μ, ἀλλ' ἡ β μ, ἴση ἐστὶ τῇ μ γ, ἄρα καὶ ἡ η μ, ἴση ἐστὶ τῇ μ λ, κατὰ τὸ ς'. ἀξίωμα. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ ἑκάστη τῶν η θ, θ κ, κ λ, ἴση ἑκατέρᾳ τῶν η μ, μ λ. ἄρα τὸ η θ κ λ μ, ἰσόπλευρόν ἐστι. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ ζ μ γ, ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ ζ λ γ, καὶ τῆς μὲν ζ μ γ, διπλασία ἐστὶν ἡ ὑπὸ β μ γ, ἤτοι ἡ ὑπὸ η μ λ, τῆς δὲ ὑπὸ ζ λ γ, ἡ ὑπὸ κ λ μ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ η μ λ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κ λ μ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς η, θ, κ, γωνιῶν ἴση ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν πρὸς

τοῖς

τοῖς μ, καὶ λ. τὸ ἄρα η θ κ λ μ, ἰσογώνιόν ἐστι, δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον. περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον περιγέγραπται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

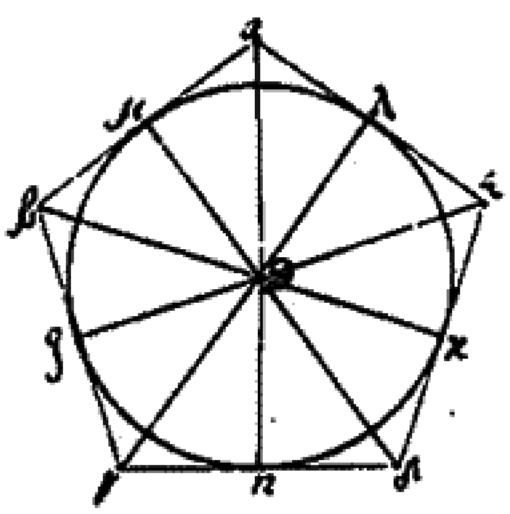
Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐν τοῖς ἰσογωνίοις καὶ ἰσοπλεύροις πενταγώνοις τῶν πλευρῶν δίχα τμηθεισῶν, καὶ ἐπ' αὐτῶν καθέτων ἀγομένων, αἱ ἀπὸ τῆς συνδρομῆς τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι, δίχα τὰς γωνίας τέμνουσι.

Πρότασις ΙΓ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιόν ἐστι, κύκλον ἐγγράψαι.

Φέρε δὴ εἰς τὸ α β γ δ ε, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον, κύκλον ἐγγράψωμεν. Τμηθήτωσαν αἱ β γ, γ δ, δίχα κατὰ τὰ ζ, η, σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τῶν β γ, γ δ, κάθετοι ἀχθήτωσαν, αἱ ζ θ, η θ, προσπίπτουσαι ἀλλήλαις, κατὰ τὸ θ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ, σημείου, τῆς συνδρομῆς δηλονότι τῶν ζ θ, η θ, καθέτων, ἤχθω ἐπὶ τὴν πρὸς τῷ γ, γωνίαν, ἡ θ γ. Κατὰ δὴ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, ἡ ὑπὸ β γ δ, γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς θ γ, ὥστε ἡ ὑπὸ θ γ ζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ θ γ η. ἐστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ θ ζ γ, τῇ ὑπὸ θ η γ, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. τὰ δύο ἄρα τρίγωνα θ ζ γ, θ η γ, ἔχουσι τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ θ ζ γ, ζ γ θ, ἴσας δυσὶ ταῖς ὑπὸ θ η γ, η γ θ, ἔχουσι δ' ἔτι καὶ τὴν πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰν, τὴν ζ γ, ἴσην τῇ γ η, ἄρα καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔχουσι, κατὰ τὴν κϛ'. τοῦ α. ὥστε ἡ θ ζ, ἴση ἐστὶ τῇ θ η. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη, τῶν θ κ, θ λ, θ μ, ἴση ἑκατέρᾳ τῶν θ ζ, θ η, ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ ζ, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν η, κ, λ, μ, σημείων, ἁπτόμενος κατὰ ταῦτα τῶν α β, β γ, γ δ, δ ε, ε α, πλευρῶν τοῦ πενταγώνου, διὰ τὸ πρὸς ὀρθὰς εἶναι τὰς α β, β γ, γ δ, δ ε, ταῖς διὰ τοῦ κέντρου ἐπ' ἄκρας, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ'. τοῦ γ'. Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 4. Fig. 11.



Πρότασις ΙΔ'. Πρόβλημα.

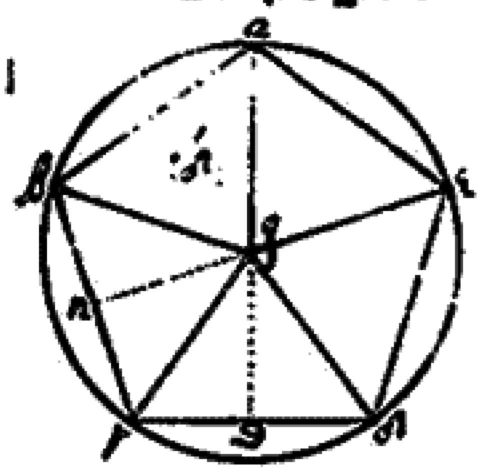
Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Φέρε δὴ περὶ τὸ α β γ δ ε, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον, κύκλον περιγράψωμεν. Τμηθήτω ἑκατέρα τῶν β γ, γ δ, δίχα κατὰ τὰ η, θ, σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν η, θ, σημείων κάθετοι ἀχθήτωσαν ἐπ' αὐτῶν αἱ ζ η, ζ θ, συμβάλλουσαι

ἀλλή-

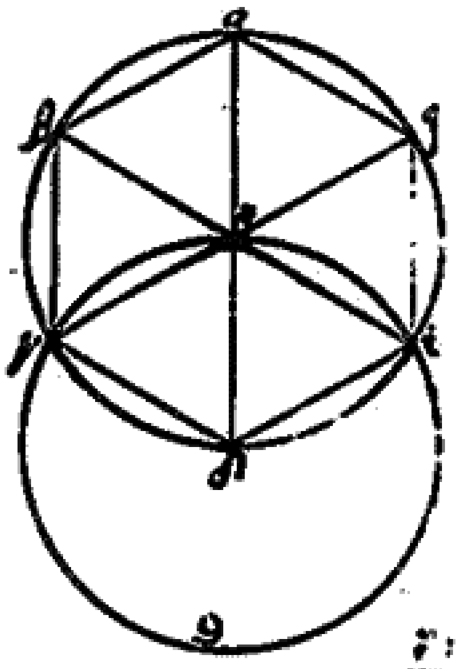
ἀλλήλαις κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐφ' ἑκάστην τῶν πενταγώνου γωνιῶν ἠχθήτωσαν αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε. κατὰ τὸ πόρισμα ἄρα τῆς ιβ'. τοῦ παρόντος, αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε, εὐθεῖαι δίχα τέμνουσι τὰς τοῦ πενταγώνου γωνίας. ὥστε ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ β. καὶ τῆς μὲν πρὸς τῷ α, ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ζαβ, τῆς δὲ πρὸς τῷ β, ἡ ὑπὸ ζβα, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ζαβ, τῇ ὑπὸ ζβα, κατὰ τὸ ζ'. ἀξίωμα. καὶ ἑπομένως ἡ ζα, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, κατὰ τὴν ς. τοῦ α. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ζγ, ζδ, ζε, ἴση ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν ζα, ζβ. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, γ, δ, ε, σημείων. Τοῦ αβγδ, ἄρα κύκλου ἡ περιφέρεια ἅπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ αβγδε, πενταγώνου, καὶ ἑπομένως περιγέγραπται περὶ αὐτὸ κατὰ τὸν ς'. ὅρον τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 4. Fig. 12.



Πρότασις ΙΕ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.



Δέον δὴ εἰς τὸν αβγδεζ, κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψομεν. Ἤχθω τοῦ κύκλου ἡ αδ, διάμετρος, καὶ εἰλήφθω τὸ η, κέντρον. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δη, κύκλος γεγράφθω ὁ γηεθ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ γη, εη, ἐκβληθήτωσαν κατὰ τὰ β, καὶ ζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εζ, ζα, καὶ τὸ αβγδεζ, ἑξάγωνον, ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ τὸ δ, κέντρον ἐστὶ τοῦ γηεθ, κύκλου, πάντως γε ἡ δγ, ἴση ἐστὶ τῇ δε. ἔστι δὲ καὶ τὸ η, κέντρον τοῦ αβγδεζ, ἄρα καὶ ἡ ηγ, ἴση ἐστὶ τῇ ηε. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ηδ, αἱ δύο πάντως γε γη, ηδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς εη, ηδ, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ γδ, βάσει τῇ δε, ἴση ἐστίν, ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γηδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εηδ, κατὰ τὴν η. τοῦ α. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ εηζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δηε, ὥστε αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ γηδ, δηε, εηζ, ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν ιε. τοῦ α. ἴσαι ἔτι εἰσὶν καὶ αἱ τούτων κατὰ κορυφὴν, αἱ ὑπὸ γηβ, βηα, αηζ. αἱ ἕξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ αηβ, βηγ, γηδ, δηε, εηζ, ζηα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἑπομένως αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εζ, ζα, περιφέρειαι ἐφ' ὧν αἱ ῥηθεῖσαι βεβήκασι γωνίαι, ἴσαι ὁμοίως εἰσί, κατὰ τὴν κς'. τοῦ γ'. κατὰ δὲ τὴν κθ. τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εζ, ζα, εὐθεῖαι ἔτι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα τὸ αβγδεζ, ἑξάγωνον. ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ γδ, κοινὴ προσκείσθω ἡ αζεδ, ὅλη ἄρα

ἡ βαζεδ,

ἡ βαζεδ, ἴση ἐςὶ τῇ γδεζα, περιφερείᾳ. ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῆς βαζεδ, βέβηκεν ἡ ὑπὸ βγδ, γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς γδεζα, ἡ ὑπὸ γβα, ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ γβα, καὶ τὴν κζ'. τοῦ γ'. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἑκάςη τῶν πρὸς τοῖς α, ζ, ε, δ, γωνιῶν ἴση ἑκατέρᾳ τῶν πρὸς τοῖς β, γ. ὥςε τὸ αβγδεζ, ἑξάγωνον, ἰσογώνιόν ἐςι. δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον. Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἑξάγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐςὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

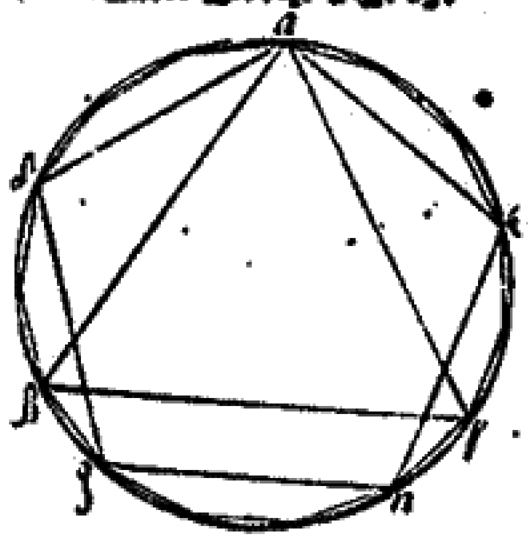
Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνατὸν εἰς οἱονδήποτε κύκλον ἑξάγωνον ἐγγράφειν. εἰδέ σοι βουλητὸν καὶ περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, σημείων ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, ὥσπερ δὴ καὶ ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, καὶ ἔςαι τὸ ζητούμενον. δυνατὸν δ' ἔτι, κατὰ τὰ περὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένα, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράφειν, ἢ περὶ τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον περιγράφειν.

Πρότασις Ις'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Φέρε δὴ εἰς τὸν αβγ, κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψωμεν. Ἐγγραφέτω α. τὸ αβγ, ἰσόπλευρον τρίγωνον. εἶτα τὸ αδζηε, πεντάγωνον. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ, ηγ. Λέγω τοίνυν ἑκατέραν τῶν βζ, γη, πλευρὰν εἶναι τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου. εἰς μὲν γὰρ τὴν αδβ, περιφέρειαν τρίτον οὖσαν ὅλης τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, πέντε πλευραὶ τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου ἐφαρμοσθῆναι δυνατόν. εἰς δὲ τὴν αδ, πέμπτον οὖσαν μέρος, τρεῖς ἐφαρμοσθήσονται, εἰς τὴν λοιπὴν ἄρα δβ, δύο. ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν δβζ, τρεῖς ἐφαρμόττονται, ὡς πέμπτον τοῦ κύκλου καὶ αὐτὴν οὖσαν, ἄρα εἰς τὴν βζ, μία τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου πλευρὰ ἐφαρμοσθήσεται, ὡσαύτως καὶ εἰς τὴν γη. ἐὰν ἄρα κατὰ τὸ ἐφεξῆς εὐθείας ἴσας τῇ βζ, ἢ γη, εἰς τὸν κύκλον ἐναρμόσωμεν, ἐγγραφήσεται πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει τὸ προςαχθέν.

Eucl. Lib. 4. Fig. 15.



Τέλος τοῦ Τετάρτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων:

Προσί-

Προοίμιον τοῦ Πέμπτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Τίς ὁ τοῦ Βιβλίου εὑρετής, ὁ σκοπός, τὸ χρήσιμόν τε καὶ τάξις.

Τὸ Πέμπτον τοῦτο Βιβλίον, ὡς καὶ τὰ πρὸ αὐτοῦ, στοιχεῖον Εὐκλ. ἐπιγράφεται. σὶ δέ τινες εὑρετὴν τοῦτο εἶναι, Εὔδοξόν τινα τοῦ Πλάτωνος διδάσκαλον. τοῦ δὲ χάριν τὸ τοῦ Εὐδόξου ὄνομα ἀπολιπὸν, τὸ τοῦ Εὐκλείδου ἐκληρώσατο; ἢ ὅτι ἐκείνου μὲν ἡ εὕρεσις, τούτου δὲ ἡ τάξις τῶν ὅρων τε καὶ προτάσεων. καὶ παρ' Εὐδόξου τὰς ἀφορμὰς λαβὼν Εὐκλείδης εὐμεθοδίστερον ἐκείνου κατέστρωσέ τε αὐτὸ καὶ ἐρρυθμίσατο. δίδου γὰρ σοφῷ ἀφορμὴν καὶ σοφώτερος ἔσται.

Σκοπὸς δὲ τοῦ ὅλου Βιβλίου περὶ Ἀναλογιῶν διαλαβεῖν. Ἔστι δὲ Ἀναλογία σύγκρισις, ἤτοι σχέσις, λόγων τινῶν καθ' ὁμοιότητα, ἐν τρισὶν ὅροις τοὐλάχιστον θεωρουμένη. Λόγος δὲ δύο μεγεθῶν, ἢ ἀριθμῶν ἐστι σύγκρισις, λέγεται δὲ ὁ Λόγος καὶ σχέσις. ὅταν οὖν, φέρ' εἰπεῖν, δύο μεγέθη ἢ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους συγκρίνωνται, τὰ μεγέθη μὲν ἢ οἱ ἀριθμοὶ, ὅροι καλοῦνται, ἡ δὲ τούτων σύγκρισις Λόγος, ἤτοι σχέσις, ὡς εἴρηται. ὅταν δὲ ὁ Λόγος οὗτος πρὸς ἕτερον ὅμοιον συγκρίνηται, ὡς ὁ τοῦ γ, καὶ ϛ, πρὸς τὸν τοῦ ϛ, καὶ ιβ, ἡ σύγκρισις αὕτη Ἀναλογία ἤκουσε. Διχῶς δὲ ἡ Ἀναλογία γενέσθαι δύναται. ἡ μὲν γὰρ Συνεχὴς, ἡ δὲ Διεζευγμένη. καὶ Συνεχὴς μὲν Ἀναλογία ἐστὶν, ἡ τοὺς ὅρους κατὰ τὴν σύγκρισιν συνεχεῖς ἔχουσα, ὡς ἡ τοῦ β, δ, η, ιϛ. καὶ λοιπῶν. Διεζευγμένη δὲ ἡ τοὺς ὅρους κατὰ τὴν σύγκρισιν ἀνὰ δύο λαμβάνουσα, ὡς ἡ τοῦ β, δ, ϛ, ιβ. Εἴδη δὲ τοῦ Λόγου πέντε. τρία μὲν ἁπλᾶ, τὰ δύο δὲ σύνθετα. καὶ ἁπλᾶ μὲν τὸ Πολλαπλάσιον, τὸ Ἐπιμόριον, καὶ τὸ Ἐπιμερές. καὶ Πολλαπλάσιον μὲν λέγεται μέγεθος μεγέθους τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν ὑπερέχει τὸ ἔλασσον ἅπαξ, ἢ δὶς, ἢ τρὶς, ἢ πλεονάκις. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, ὡς ὁ δ, τοῦ β, καὶ ὁ θ, τοῦ γ. Ἐπιμόριον δὲ, ὅταν τὸ μεῖζον μέγεθος, ἢ ὁ ἀριθμὸς περιέχει τὸν ἐλάσσονα ἅπαξ, καὶ ἓν αὐτοῦ ἔτι ὁποιονδήποτε μέρος, ὡς ὁ δ, τοῦ γ, καὶ ὁ ε, τοῦ δ. Ἐπιμερὲς δὲ, ὅταν τὸ μεῖζον μέγεθος, ἢ ὁ ἀριθμὸς, περιέχει τὸν ἐλάττονα ἅπαξ, καί τινα αὐτοῦ μέρη, ὡς ὁ ε, τοῦ γ, καὶ ὁ ζ, τοῦ δ, καὶ οἱ ὅμοιοι. καὶ ταῦτα μὲν τὰ ἁπλᾶ. Σύνθετα δὲ τὸ Πολλαπλασιεπιμόριον, καὶ τὸ Πολλαπλασιεπιμερές. καὶ Πολλαπλασιεπιμόριον μὲν, ὅταν τὸ μεῖζον μέγεθος, ἢ ὁ ἀριθμὸς περιέχει τὸν ἐλάττονα πλεονάκις, καί τι μέρος αὐτοῦ, ὡς ὁ ζ, τοῦ γ, καὶ ὁ θ, τοῦ δ, καὶ λοιποί. Πολλαπλασιεπιμερὲς δὲ, ὅταν ὁ μείζων περιέχει τὸν ἐλάττονα πλεονάκις, καί τινα αὐτοῦ μέρη, ὡς ὁ η, τοῦ γ, ὁ ια, τοῦ δ, καὶ λοιποί.

Τοιαύτας μὲν οὖν τὰς προσηγορίας τὰ μείζω μεγέθη, ἢ οἱ μείζονες ἀριθμοὶ ἔλαχον. Τὰ ἐλάττονα δὲ μεγέθη, ἢ οἱ ἀριθμοὶ μετὰ τῆς, ὑπὸ, προφέρονται,

πειπέντε καὶ αὐτῶν ὄντων τῶν εἰδῶν, τὸ μὲν γὰρ Ὑποπολλαπλάσιον, τὸ δὲ Ὑπεπιμόριον, τὸ δὲ Ὑπεπιμερὲς, τὸ δὲ Ὑποπολλαπλασιεπιμόριον, καὶ τὸ ἔσχατον Ὑποπολλαπλασιεπιμερὲς λέγεται. Ἀρχικαὶ δὲ Ἀναλογίαι τρεῖς, Γεωμετρικὴ, Ἀριθμητικὴ, καὶ Ἁρμονική.

Ἐπεὶ οὖν τοῦτο τὸ Βιβλίον περὶ Ἀναλογιῶν διαλαμβάνει, χρησιμεύει πάντως οὐ μόνον τῇ Γεωμετρίᾳ, ἀλλὰ καὶ Ἀριθμητικῇ τε καὶ Μουσικῇ, καὶ ταῖς τούτων ὑποβιβηκυίαις Ἐπιστήμαις. ἁπλῶς δ' εἰπεῖν πάσῃ Μαθηματικῇ Ἐπιστήμῃ ἐπωφελής πως ὑπάρχει.

Τάξιν δὲ καὶ εἱρμὸν, ὃν καὶ τὰ πρὸ αὐτοῦ τηρεῖ. προτεταγμένων γὰρ τῶν Ὅρων ἕπονται αἱ Προτάσεις. ἀλλά γε καὶ ἐπὶ τῶν ὅρων τε καὶ προτάσεων διδασκαλικὸν ἔχει τὸν τρόπον. ἀπὸ γὰρ τῶν ἁπλουστέρων ἀρχόμενον, ἐπὶ τὰ καθολικώτερα μεταβαίνει. Ὅροι δέ εἰσι τούτου οἱ πάντες εἴκοσι. Προτάσεις δὲ πέντε πρὸς ταῖς εἴκοσιν. ἀλλ' ἵνα μὴ περιττολογεῖν δόξωμεν, φέρε δὴ τῆς τῶν Ὅρων Ἑρμηνείας ἁψώμεθα.

ἈΠΟΣΗΜΕΙ'ΩΣΗΣ.

* Σημείωσαι, ὅτι ἐπὶ τῆς αὐωτέρω σελίδος, ἀμέλει 104: στίχῳ ιϛ': ἔνθα φησὶν, ὡς ὁ τοῦ γ, καὶ ϛ, πρὸς τὸν τοῦ ϛ, καὶ ιβ, ληπτέον οὕτως, ἀντὶ τῆς σημασίας τοῦ, ὡς ὁ τοῦ 3, καὶ 6, πρὸς τὸν τοῦ 6, καὶ 12. ὡσαύτως καὶ στίχῳ ιθ': ὡς ἡ τοῦ 2, 4, 8, 16. Ὁμοίως καὶ τοὺς ἑξῆς τοιούσδε ἀριθμοὺς, τοὺς Ἀναλογίας παριστῶντας ἐπὶ τῆς αὐτῆς σελίδος.

Ποδηγετήσει ὑμᾶς ἡ Ἀποσημείωσις αὕτη ἐπὶ τὸ διαγινώσκειν τοὺς τοιούσδε ἀριθμοὺς, πανταχοῦ τῶν ἑπομένων Βιβλίων, καὶ Πραγματειῶν. ἐν οἷς συνήθως ὁ Συγγραφεὺς ἐχρήσατο τοῖς τοιούτοις Ἑλληνικοῖς Ἀριθμοῖς κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν σημασίαν, καὶ μάλιστα ἔνθα ὁ αὐτῷ λόγος γίνεται περὶ Ἀναλογιῶν.

ἙΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ὉΡΩΝ ΤΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

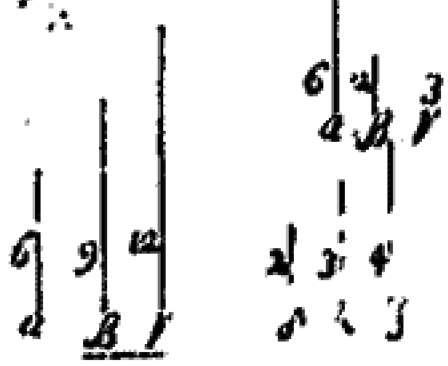
Ὅρος Πρῶτος.

Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

Ἐπειδὴ περὶ Ἀναλογιῶν ὁ τοῦ βιβλίου σκοπὸς, ὡς προείρηται, ἔδει πάντως ἐπὶ τῶν ὅρων καὶ τὸν τῆς Ἀναλογίας ἀποδοῦναι ὁρισμόν. Ἐκ Λόγων δὲ τῆς Ἀναλογίας συγκειμένης, δεῖ πρῶτον τὸν Λόγον ὁρίσασθαι· τοῦ Λόγου δὲ ἐν Μεγέθεσι θεωρουμένου, περὶ τῆς τῶν Μεγεθῶν προσηγορίας οἰκειότερον διαλαβεῖν. διὸ δὴ καὶ Εὐκλείδης ἐπὶ τοῦ α΄. ὅρου τὸ Μέρος ὑπογράφει λέγων, Μέρος ἐστὶ Μέγεθος Μεγέθους καὶ τὰ ἑξῆς: τῶν γὰρ Μεγεθῶν, ὅσα λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχουσι, τὸ ἔλαττον τοῦ μείζονος, ἢ μέρος, ἢ μέρη ἐστί· καὶ μέρος μὲν ἐπὶ τοῦ Πολλαπλασίου, μέρη δὲ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν. τὸ γὰρ Πολλαπλάσιον μόνον μέγεθος ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος ὁλοκλήρως καταμετρεῖται. οἷον τὸ α, μέγεθος, μέρος μὲν λέγεται τῶν β γ δ ε, ὅτι καθ' ἕνα ἕκαστον τούτων κατά τινα ὁλόκληρον καταμετρεῖ ἀριθμόν. τῶν δὲ ζ η θ, οὐκ ἔστι μέρος, ἀλλὰ μέρη τούτων τινὲς αὐτὸ ἀποκαλοῦσιν. οὐδένα γὰρ αὐτῶν κατά τινα ὁλόκληρον καταμετρεῖ ἀριθμόν. τί δὴ χάριν μόνου τοῦ λόγον μέρους ἔχοντος Μεγέθους ἐμνήσθη, οὐ μὴν δὲ καὶ τοῦ λόγον ἔχοντος μερῶν; ἢ ὅτι τοῦ Πολλαπλασίου μόνου ἔμελλε τὸν ὁρισμὸν ἀποδοῦναι, ὡς ἁπλουστέρου τε, καὶ ταῖς ἀποδείξεσι χρησιμωτέρου, οὐχὶ δὲ καὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν.

Eucl. Lib. 5. Fig. 1.

Β΄: Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.



Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι τῶν Μεγεθῶν, ὅσα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, εἰ μὲν τὸ ἔλαττον καταμετρῇ τὸ μεῖζον, καταμετρεῖται πάντως καὶ τὸ μεῖζον ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος, καὶ τὸ μὲν ἔλαττον μέρος καλεῖται, ὡς ἤδη εἴρηται, τὸ μεῖζον δὲ πολλαπλάσιον· ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος ὁριζόμενος ἀποφαίνεται. οἷον τῶν α β, Μεγεθῶν, τὸ μὲν β, Μέρος, τὸ α,

δὲ

δὲ Πολλαπλάσιον λέγεται· τὸ μὲν γὰρ καταμετρεῖ, τὸ δὲ καταμετρεῖται κατὰ τὸν γ, ἀριθμόν. Ἐὰν δὲ ὦσι πλείονα μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τῷ πλήθει, μείζονα δὲ τῷ μεγέθει, ἕκαστον δὲ τῶν μειζόνων ἰσάκις μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἰδίου μέρους, τὰ μείζονα μεγέθη ἰσάκις πολλαπλάσια λέγονται· οἷον ἐπεὶ τὰ α β γ, ἰσάκις μετρεῖται ὑπὸ τῶν δ ε ζ, ἰσάκις Πολλαπλάσια λέγονται.

Γ': Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

Τῶν Μεγεθῶν τὸ μὲν κατὰ μῆκος μόνον θεωρεῖται, ὡς γραμμή, ἥτις καὶ ὑφ' ἓν διαστατὸν λέγεται, τὸ δὲ κατὰ τὸ μῆκος, καὶ πλάτος, ὡς ἐπιφάνεια, ἥτις καὶ διχῆ διαστατὸν λέγεται, καὶ ἄλλα κατὰ μῆκος, πλάτος τε, καὶ βάθος, ὡς τὰ σώματα, ἃ καὶ τριχῆ διαστατὰ λέγεται. Τοῦ αὐτοῦ δὲ γένους Μεγέθη εἰσίν, ὅσα ἢ κατὰ τὸ ὑφ' ἓν διαστατὸν θεωρεῖται, ἢ κατὰ τὸ διχῆ διαστατόν, ἢ κατὰ τὸ τριχῆ. Πηλικότης δὲ λέγεται ἡ τῶν μεγεθῶν ποσότης, ἥτις καὶ συνεχὴς ποσότης προσαγορεύεται, εἰς ἀντιδιαστολὴν τῆς τῶν ἀριθμῶν ποσότητος, ἥτις καὶ διωρισμένη παρὰ τοῖς πάλαι φιλοσόφοις λέγεται Ποσότης· ὥστε δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι τῆς μὲν γραμμῆς πηλικότης, τὸ μῆκος μόνον λέγεται, ἐπιφανείας δὲ τὸ μῆκος ἅμα καὶ πλάτος, καὶ τοῦ σώματος τὸ μῆκος πλάτος τε, καὶ βάθος. Ὅταν οὖν συγκρίνηται γραμμὴ ἑτέρᾳ γραμμῇ, ἢ ἐπιφάνεια ἐπιφανείᾳ, ἢ σῶμα σώματι· τὰ μὲν συγκρινόμενα, Ὁμογενῆ μεγέθη λέγεται, ἡ δὲ τούτων σύγκρισις, Σχέσις κατὰ πηλικότητα. αὕτη δὲ ἡ Σχέσις, Λόγος μεγεθῶν προσαγορεύεται. Ἐπεὶ δὲ ἡ σύγκρισις τῶν μεγεθῶν πολυειδής ἐστι, κατὰ τὰ διάφορα τοῦ Λόγου εἴδη· ἐν γὰρ τοῖς πολλαπλασίοις, πολλαπλασιότης, ἢ ὑποπολλαπλασιότης δύναται λέγεσθαι. ἐν δὲ τοῖς ἐπιμορίοις, ὑπεροχή, ἢ ἔλλειψις καθ' ἕν τι μέρος. καὶ ἐν τοῖς ἐπιμερέσιν, ὑπεροχή, ἢ ἔλλειψις κατὰ πλείονα μέρη, τούτου γε χάριν τὸ ποιά, προσέθηκεν, ὥστε πληροῦσθαι τὸν ὁρισμὸν τοῦ Λόγου τὸν τρόπον τοῦτον. Λόγος ἐστὶν ἡ τοιάδε τῶν μεγεθῶν σχέσις κατὰ πηλικότητα. Παρατηρητέον δὲ τὰ Μεγέθη ὁμογενῆ εἶναι. ἐν γὰρ τοῖς ἄλλου γένους μεγέθεσιν, οὔτε σύγκρισις ἀκριβὴς γενέσθαι δύναται· πῶς γὰρ γραμμή, ἐπιφάνεια, καὶ σῶμα ἀλλήλοις συγκριθῶσιν, ὅπου γε τὸ μὲν ὑφ' ἓν διαστατόν, τὸ δὲ διχῆ, καὶ τὸ ἄλλο τριχῆ διαστατόν ἐστι; οὔτε μὴν ἡ ὁποιαδήποτε αὐτοῖς γενομένη σύγκρισις Λόγος ὀνομασθῆναι δύναται.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα καὶ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς Λόγου λαβεῖν. ὥσπερ γὰρ ὁ τῶν μεγεθῶν Λόγος, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλά ἐστι ποιὰ σχέσις, οὕτω καὶ τῶν ἀριθμῶν, Λόγος ἐστίν, ἡ κατὰ ποσότητα πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις.

Δ': Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

Ἀποδοὺς ἐν τῷ ἀνωτέρω ὅρῳ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐν Μεγέθεσι Λόγου, βούλεται ἐπὶ τοῦ παρόντος δηλῶσαι, καὶ τίνα τὰ λόγον ἔχοντα Μεγέθη. ὥσπερ οὖν λόγος ἐστὶ τῶν ὁμογενῶν Μεγεθῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, οὕτω καὶ Μεγέθη λόγον ἔχειν λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. τίνα δὲ ταῦτα; ἢ τὰ ὁμογενῆ. γραμμὴ γὰρ γραμμῆς διὰ πολλαπλασιασμοῦ δύναται ὑπερέχειν, ὡσαύτως καὶ ἐπιφάνεια ἐπιφανείας, καὶ σῶμα σώματος. ὥστε γραμμὴ καὶ ἐπιφάνεια, ἢ ἐπιφάνεια καὶ σῶμα, ἢ σῶμα καὶ γραμμὴ λόγον ἔχειν οὐ δύνανται. οὔτε γὰρ ἡ γραμμὴ ἐπιφανείας, ἢ σώματος διὰ πολλαπλασιασμοῦ ὑπερέχειν δύναται, οὔτε ἡ ἐπιφάνεια γραμμῆς, καὶ σώματος, οὔτε μὴν τὸ σῶμα γραμμῆς καὶ ἐπιφανείας. τὰ ὁμογενῆ ἄρα μόνα Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα λέγεται.

Ε': Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ληφθέντα κατάλληλα.

Δηλώσας ἐν τῷ ἀνωτέρω τίνα τὰ λόγον ἔχοντα μεγέθη, βούλεται ἐπὶ τοῦ παρόντος διασαφῆσαι, καὶ τίνα τῶν Μεγεθῶν ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι λόγῳ λέγεται. ὥσπερ δὲ ὁ λόγος ἐν δύο μεγέθεσι θεωρεῖται, οὕτω καὶ ἡ τῶν λόγων Ὁμοιότης ἐν δυσὶ τοὐλάχιστον λόγοις εὑρίσκεται, ἡ γὰρ Ὁμοιότης σχέσις ἐστίν, ἡ δὲ σχέσις ἀναφορά τινος πρὸς ἕτερον. δύο δὲ λόγοι ἐν τέτταρσι περιέχονται μεγέθεσι. διὸ καὶ ἔφη, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον. εἰ δὲ καὶ ἐν τρισὶ μεγέθεσι δύο λόγοι ἐνίοτε περιληφθῆναι δύνανται, ἀλλά γε καὶ οὕτω ὡς τέτταρα ἐννοεῖται, δὶς γὰρ τὸ δεύτερον λαμβάνεται. οἷον ἐν τοῖς α β γ, μεγέθεσι δύο λόγοι θεωροῦνται, ὡς γὰρ τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ β, πρὸς τὸ γ. ἰδοὺ δὲ τὸ β, δὶς λαμβανόμενον. ὥστε τὰ α β γ, ἐνεργείᾳ μὲν τρία ἐστὶ μεγέθη, δυνάμει δὲ τέτταρα. Ὅταν οὖν ἐν τέσσαρσι μεγέθεσι, τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον παραβαλλομένου, καὶ τοῦ τρίτου πρὸς τὸ τέταρτον, ἡ αὐτὴ σχέσις εὑρεθῇ, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν λέγεται.

Eucl. Lib. 5. Fig. 2.

Ἵνα δὲ τοῦτο ἀκριβῶς ἔχωμεν θεωρεῖν. ἐπεὶ τὸν ἐν μεγέθεσι λόγον οὐκ ἀεὶ γινώσκομεν, ὥσπερ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς, διὰ τὸ ἀσαφὲς εἶναι ὁποῖον μέρος τὸ ἔλαττον τοῦ μείζονός ἐστι μεγέθους, τούτου ἕνεκα δεῖ ἑκάστου τῶν τεσ-

σάρων

σάρων μεγεθῶν πολλαπλάσιόν τι λαμβάνειν, ὥστε τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις εἶναι πολλαπλάσια, ὥσπερ καὶ τὰ τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου. εἶτα παραβάλλειν τὸ τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον τῷ τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ τοῦ τρίτου τῷ τοῦ τετάρτου, κἂν μὲν ἅμα τὸ τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ τοῦ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου ἐλλείπωσιν, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχωσι, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν λέγεται, καὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον. οἷον ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ α β, γ δ, καὶ τὰ μὲν α, καὶ γ, πρῶτον δηλ: καὶ τρίτον πολλαπλασιασθήτωσαν ἐπὶ τὸν ε, ἀριθμὸν, καὶ ἔστωσαν τούτων ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ζ, η. τὰ δὲ β, δ, δεύτερον καὶ τέταρτον ἐπὶ τὸν θ, καὶ ἔστωσαν τούτων ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ κ λ. Αὖθις πολλαπλασιασθήτωσαν τὰ αὐτὰ β, δ, ἐπὶ τὸν μ, καὶ ἔστωσαν τούτων ἕτερα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ν, ξ. καὶ πάλιν αὖ πολλαπλασιασθήτωσαν τὰ αὐτὰ ἐπὶ τὸν ο, καὶ ἔστωσαν τῶν αὐτῶν καὶ ἕτερα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ π, ρ. εἶτα παραβληθήτωσαν χωρὶς τὰ ζ η, τοῖς κ λ, ν ξ, π ρ. καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ πρώτῳ πολλαπλασιασμῷ τό, τε ζ, τοῦ κ, καὶ τὸ η, τοῦ λ, ἅμα ἐλλείπουσιν, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ ἅμα ἰσάζει τό, τε ζ, τῷ ν, καὶ τὸ η, τῷ ξ, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ πολλαπλασιασμῷ τό, τε ζ, τοῦ π, καὶ τὸ η, τοῦ ρ, ἅμα ὑπερέχουσιν, ἔστι πάντως ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς τὸ πρῶτον α, πρὸς τὸ δεύτερον β. οὕτω τὸ γ, τρίτον πρὸς τέταρτον τὸ δ.

Eucl. Lib. 5. Fig. 3.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ὥστε δυνάμεθα ἐκ τούτου συναγαγεῖν καὶ ἀνάπαλιν, ὅτι ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπει, ἢ ἅμα ὑπερέχει, ἢ ἅμα ἰσάζει ληφθέντα κατάλληλα.

ϛʹ: Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογα καλείσθω.

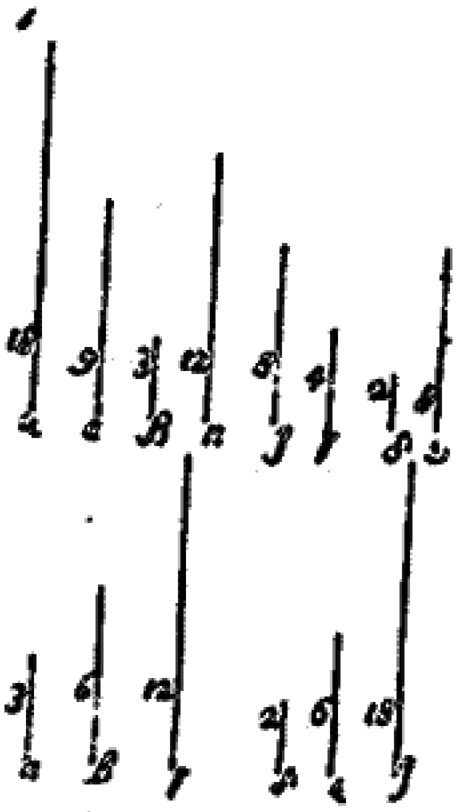
Διδάξας τὸν τρόπον, καθ' ὃν τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη εὑρίσκειν ἔχομεν, καὶ πῶς δεῖ ταῦτα καλεῖν ἤδη κελεύει. τὰ γοῦν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα Ἀνάλογα καλεῖν ἐθέλει. ὥστε ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος τὰ α β, γ δ, Ἀνάλογά εἰσι, τὸν αὐτὸν γὰρ ταῦτα ἔχει λόγον.

Ζʹ. Ὅταν

Ζʹ: **Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ γʹ: πρὸς τὸ δʹ:**

Καθάπερ τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη διὰ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων γινώσκομεν, οὕτω γε διὰ τῶν αὐτῶν, καὶ τῶν μὴ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων μεγεθῶν τὸ μείζονα λόγον ἔχον θηρεῦσαι ἔχομεν. Κείσθωσαν οὖν τέσσαρα μεγέθη τὰ α β, γ δ. καὶ εἰλήφθωσαν, ὡς καὶ πρότερον, τά τε τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ε, καὶ ζ. καὶ τὰ τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου τὰ η, θ. καὶ παραβεβλήσθωσαν τὰ ε, καὶ ζ, τοῖς η, καὶ θ. καὶ ἐπεὶ τὸ ε, ὑπερέχει τοῦ η, καὶ τὸ ζ, οὐχ ὑπερέχει τοῦ θ, διὰ τοῦτο τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ δ. Ἰστέον δ' ὅτι καὶ ἐπὶ τῶν μείζονα λόγον ἐχόντων μεγεθῶν ἐνίοτε εὑρίσκεται τό, τε τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον ὑπερέχον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ τοῦ τρίτου, τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου, ἀλλ' οὐκ ἰσάκις. ἐὰν δὲ καὶ ἐφ' ἕτερον ἀριθμὸν πολλαπλασιασθῶσι, καὶ τοῦτο γένηται δὶς καὶ τρὶς, οὐ πάντως ἀεὶ ὑπερέξει τὸ τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ τοῦ τρίτου τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου. ἀλλ' ὅταν τὸ τοῦ πρώτου ἴσον ᾖ τῷ τοῦ δευτέρου, τὸ τοῦ τρίτου, ἔλαττον ἔσαι τοῦ τετάρτου, ὅταν δὲ τὸ τοῦ τρίτου ἴσον ᾖ τῷ τοῦ τετάρτου, τὸ τοῦ πρώτου μεῖζον ἔσαι τοῦ δευτέρου. διὸ δὴ ἵνα τὸ μείζονα λόγον ἔχον μέγεθος εὑρεθῇ, ἐπί τε μείζονας ἀριθμοὺς καὶ ἐλάττονας δεῖ τὰ μεγέθη πολλαπλασιάζεσθαι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 4.



Ηʹ: **Ἀναλογία δὲ ἐστιν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.**

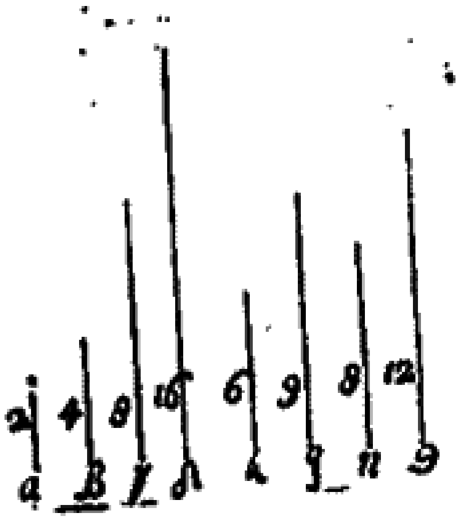
Ὁρίσας αὐωτέρω τὸν ἐν τοῖς μεγέθεσι λόγον, καὶ τίνα μὲν τὰ λόγον ἔχοντα μεγέθη, τίνα δὲ τὰ ἐν τῷ αὐτῷ ὄντα λόγῳ διδεικνὺς, καὶ πῶς τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα καλεῖται, διδάξας μέχρι τοῦ ϛʹ: ὅρου, ἐπὶ τοῦ παρόντος καὶ τὸν τῆς Ἀναλογίας συνάγει ὁρισμόν. καί φησιν, Ἀναλογία ἐστὶν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης. ὥσπερ γὰρ τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη Ἀνάλογα καλεῖσθαι προσέταττεν, οὕτω τοι καὶ Ἀναλογίαν τὴν τῶν λόγων ὁμοιότητα καλεῖν ἐθέλει. ὅταν οὖν ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσιν, ὡς ἐν τοῖς α β γ, ἢ δ ε ζ, ὁ αὐτὸς λόγος εὑρίσκεται. τὰ μὲν μεγέθη ἐκεῖνα, ὡς εἴρηται, Ἀνάλογα καλεῖται. ἡ δὲ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων ὁμοιότης Ἀναλογία. ὥστε δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι πλειόνα ἐν πλείοσι μεγέθεσιν ὁ αὐτὸς λόγος οὐ θεωρεῖται, ἀλλ' ἐν μὲν τοῖς, ἕτερός τις εὑρίσκεται, ἐν δὲ τοῖς, ἄλλος. οὔτε τὰ μεγέθη ἐκεῖνα Ἀνάλογα καλεῖσθαι δύναται, οὔτε μίαν ἡ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων σύγκρισις

Ἀνα-

Ἀναλογία, ἀλλ᾽ ὡς οὕτως εἰπεῖν, Ἑτερολογία τις, καὶ τὰ μεγέθη ἐκεῖνα Ἑτερόλογα· ὡς ἐπὶ τοῦ ὑποδείγματος τοῦ ζ΄: ὅρμ δῆλον καθίσαται.

Ἰστέον δὲ, ὅτι τῆς Ἀναλογίας εἰς δύο διαιρουμένης εἴδη, ἡ μὲν Συνεχὴς, ἡ δ᾽ Διεζευγμένη, ἡ καὶ Διηχὴς λέγεται. καὶ Συνεχὴς μὲν, ὁπόταν ὁ αὐτὸς λόγος ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσι κατὰ συνέχειαν θεωρεῖται,

Eucl. Lib. 5. Fig. 5.



ὡς ἐν τοῖς α β γ δ, ὡς γὰρ ἔχει τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτως καὶ τὸ β, πρὸς τὸ γ, καὶ τὸ γ, πρὸς τὸ δ· διὸ καὶ τὰ τοιαῦτα μεγέθη, Ἀνάλογα Συνεχῆ καλεῖσθωσαν. Διεζευγμένη δὲ, ὁπόταν ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσιν ὁ αὐτὸς μὲν λόγος θεωρεῖται, οὐ μὴν δὲ κατὰ συνέχειαν, ὡς ἐν τοῖς ε ζ, η θ. ὡς γὰρ ἔχει τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, οὐκ ἔτι φαμὲν καὶ τὸ ζ, πρὸς τὸ η, ἀλλά γε οὕτως ἔχει καὶ τὸ η, πρὸς τὸ θ. ὅθεν τὰ τοιαῦτα Ἀνάλογα Διεζευγμένα καλείσθωσαν.

Θ΄: Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν.

Ἐπεὶ ἡ Ἀναλογία λόγων ἐστὶν ὁμοιότης, κατὰ τὰ ἀνωτέρω· ἡ δὲ τῶν λόγων ὁμοιότης ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσι πέφυκε γίνεσθαι, ἀδύνατον γὰρ ἐν δυσὶ μόνοις μεγέθεσι δύο λόγους θεωρεῖσθαι, ἀναγκαῖον πάντως εἰδέναι καὶ μέχρι πόσων συστελλομένη μεγεθῶν ἡ Ἀναλογία δύναται σώζεσθαι. διὸ δὴ περὶ τούτο διασαφῆσαι ἡμῖν βουλόμενος Εὐκλείδης ἐπ᾽ ἐλάττονας τῶν τριῶν ὅρων, φησὶ, μὴ καταλήγειν. Ὅρους δὲ τὰ μεγέθη, ἐν οἷς ἡ Ἀναλογία, καλεῖ. ὁρίζεται γάρ πως ἐν αὐτοῖς ἡ Ἀναλογία. Ἵνα δὲ ὁ λόγος πληρέστερος γένηται, ἰστέον, ὅτι ἡ μὲν Συνεχὴς Ἀναλογία, περὶ ἧς καὶ Εὐκλ: τὸν λόγον πεποίηκεν, ἐν τρισὶν, ὡς εἴρηται, ἐλαχίστοις ὅροις ἐστὶν, ἡ δὲ διεζευγμένη ἐν τέσσαρσιν.

Ι΄: Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ΙΑ΄: Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

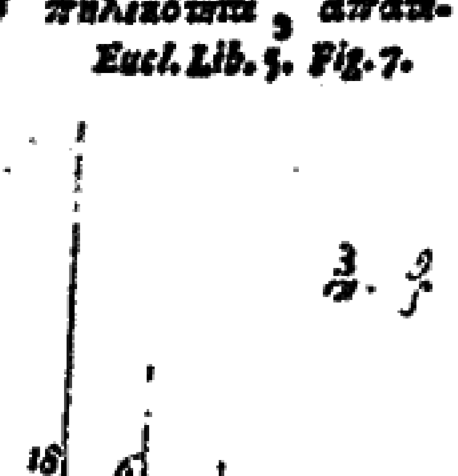
Ἐν καὶ τοῖς κατὰ συνέχειαν λόγον ἔχουσι μεγέθεσιν, ἕκαστον τῶν μεγεθῶν τῷ πλησίον παραβάλλεται, καθ᾽ ὃ καὶ ἡ συνεχὴς Ἀναλογία συνίσταται· δύναται ἔμπης καὶ πρὸς τὰ ἀπώτερον παραβληθῆναι. Ἐπεὶ δὲ ὅσῳ μᾶλλον ἀπώτερόν ἐστι, πρὸς ὃ ἡ παραβολὴ, τοῦ παραβαλλομένου, τοσούτῳ καὶ τὸ παραβαλλόμενον μείζονα πρὸς ἐκεῖνο ἔχει τὸν λόγον. διὰ τοῦτο καὶ Εὐκλείδης τὴν τῶν πρὸς τὰ ἀπώτερον λόγων ὑπεροχὴν δηλῶσαι βουλόμενος, δυσὶν ἐχρήσατο παραδείγμασιν, εἰπών, ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον καὶ τὰ ἑξῆς. Ἵνα δὲ τοῦτο δὴ-τὸ δῆλον γίνεται, ἔστωσαν ἐπὶ παραδείγματος τρία μὲν μεγέθη ἀνάλογα συνεχῆ τὰ α β γ, τέσσαρα δὲ τὰ δ ε ζ η. τὸ μὲν α, πρὸς τὸ γ, παραβαλλόμενον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ β. τὸ δὲ δ, πρὸς τὸ η, παραβαλλόμενον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ ε. σαφὲς δὲ τὸ λεγόμενον. μεταξὺ γὰρ

Eucl. Lib. 5. Fig. 6.

τοῦ α, καὶ γ, δύο λόγοι θεωροῦνται, ὅ, τε τοῦ α, πρὸς τὸ β, καὶ ὁ τοῦ β, πρὸς τὸ γ. διὸ καὶ ὁ τοῦ α, πρὸς τὸ γ, λόγος, διπλασίων λέγεται τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ α, πρὸς τὸ β. μεταξὺ δὲ τοῦ δ, καὶ η, τρεῖς λόγοι εἰσί. διὸ καὶ ὁ τοῦ δ, πρὸς τὸ η, λόγος, τριπλασίων λέγεται τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ δ, πρὸς τὸ ε. Ἐὰν δὲ τὰ μεγέθη πέντε ὦσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ πέμπτον τετραπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. εἰ δὲ ἕξ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἕκτον πενταπλασίονα, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὡσαύτως, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεγεθῶν, αὔξεται καὶ ὁ λόγος τῶν ἄκρων.

Εἰς σαφεστέραν δὲ κατάληψιν τῶν εἰρημένων, ἰστέον, ὅτι ὁ τοῦ πρώτου μεγέθους λόγος πρὸς τὸ ἔσχατον, σύγκειται ἐκ τῆς πηλικότητος τῶν μεταξὺ μεγεθῶν. οἷον ἡ πηλικότης τοῦ α, πρὸς τὸ β, καὶ τοῦ β, πρὸς τὸ γ, ἐστὶν ὁ θ. τοῦ δὲ θ, πρὸς ἑαυτὸν ἅπαξ πολλαπλασιαζομένου, γίνεται ὁ κ, ὁ γοῦν κ, ἐστὶν ὁ λόγος, ὃν ὁ α, πρὸς τὸ γ, ἔχει. Ἐπεὶ δὲ καὶ τῶν δ ε ζ η, ἡ τῶν συνεχῶν πρὸς ἄλληλα πηλικότης ἐστὶν ὁ αὐτὸς θ, τοῦ δὲ θ, δὶς πρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένου, γίνεται ὁ λ, τὰ γὰρ δύο δὶς λαμβανόμενα τέσσαρα ποιοῦσι, τὰ τέσσαρα δ' αὖθις δὶς λαμβανόμενα ὀκτώ, ὁ λ, πάντως ἐστὶν ὁ λόγος, ὃν ὁ δ, πρὸς τὸ η, ἔχει. κατὰ τοῦτο δὲ νοητέον τὸ τοῦ λόγου ἐν τοῖς τοιούτοις διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον, καὶ πᾶσαν τὴν ἐπὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ αὔξησιν. εἰ γὰρ ἐννοήσῃ τις τὸν τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τρίτον λόγον, διπλάσιον εἶναι τῇ πηλικότητι, ἀπατηθήσεται. Ἔστωσαν γὰρ τρία μεγέθη συνεχῆ ἀνάλογα κατὰ τὸν τριπλάσιον λόγον τὰ μ ν ξ, ὧν πηλικότης ἐστὶν ὁ π. τούτου δὲ πρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένου ἅπαξ, γινέσθω ὁ ρ. τὸ μ, ἄρα πρὸς τὸ ξ, ἔχει τὸν ρ, λόγον, τουτέστι τὸ μ, ἐννεαπλάσιόν ἐστι τοῦ ξ, ἐπεὶ δὲ ὁ μ, τοῦ ν, τριπλάσιός ἐστιν, εἴγε ὁ τοῦ μ, λόγος πρὸς τὸ ξ, διπλάσιος ἦν τῇ πηλικότητι τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ μ, πρὸς τὸ ν, ἔδει πάντως τὸ μ, τοῦ ξ, ἑξαπλάσιον εἶναι, δὶς γὰρ ὁ τρία λαμβανόμενος τὸν ἓξ ποιεῖ, ἀλλὰ τοῦτο οὐκ ἔστιν, ἐννεαπλάσιον γάρ, ὡς εἴρηται, δείκνυται τὸ μ, τοῦ ξ. δέον ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ λόγου τῶν ἄκρων, ἢ τριπλάσιον, ἢ ἄλλως πως πολλαπλάσιον μὴ τῇ πηλικότητι ἐννοεῖν, ἀλλὰ καθ' ὃ ἐκ δύο, ἢ τριῶν σύγκειται λόγων, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν, μὴ κατὰ διπλασίασιν, ἢ τριπλασίασιν τῆς προσθήκης τῆς τοῦ λόγου πηλικότητος,

Eucl. Lib. 5. Fig. 7.



τητος, ἀλλά γε καὶ διπλασίασιν, ἢ τριπλασίασιν τῆς πολλαπλασιάσεως τῆς αὐτῆς πηλικότητος.

ΙΒ′: Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

Ἐπεὶ εἰς λόγον ἀρχῆς οὐχ ἧττον καὶ τὰ Ὁμόλογα λαμβάνεται, ἢ τὰ ἀνάλογα, διά τοι τοῦτο ἐπὶ τοῦ παρόντος διδάσκει, καὶ τίνα χρὴ Ὁμόλογα καλεῖν, λέγων, Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα καὶ τὰ ἑξῆς. ἵνα δὲ καὶ τοῦτο σαφέστερον γένηται, ἀναγκαῖον εἰδέναι τίνα τῶν μεγεθῶν ἡγούμενα, καὶ τίνα ἑπόμενα λέγεται. τούτων γὰρ ἀγνοουμένων, οὐδὲ τὰ Ὁμόλογα γνωσθήσεται. τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ὄντων λόγῳ μεγεθῶν, τὰ μὲν προλαμβανόμενα, ἢ γοῦν ἀφαιρούμενα, ὁποῖα ἂν ὦσιν, Ἡγούμενα λέγεται, τὰ δὲ προσλαμβανόμενα, ἢ πρὸς ἃ ἡ ἀναφορὰ, Ἑπόμενα καλεῖται. οἷον ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ α β, γ δ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τουτέστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ. τὰ γοῦν α γ, κἄν τε ὑπερέχωσι τῶν β δ, κἄν τε ἐλλείπωσιν, Ἡγούμενα καλεῖται, ὡς προταττόμενα ἅμα καὶ προλαμβανόμενα. τὰ δὲ β, καὶ δ, Ἑπόμενα, ὡς ὑποταττόμενα. Ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ α β, τοῖς γ δ. ἐὰν μὲν τὰ δύο ὁμοῦ α β, τοῖς δυσὶ γ δ, παραβάλλωνται, ἀνάλογα καλεῖται, κατὰ τὸν ϛ′: τοῦ παρόντος ὅρον, ὡς ἀναλογίαν τινὰ πρὸς ἄλληλα ἔχοντα. ἐὰν δὲ τὸ α, χωρὶς τῷ γ, παραβάλληται, καὶ τὸ β, τῷ δ, Ὁμόλογα καλεῖται. ὃν γὰρ τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸν αὐτὸν καὶ τὸ γ, πρὸς τὸ δ, λόγον ἔχει. καὶ ἀνάπαλιν, ὃν λόγον ἔχει τὸ β, πρὸς τὸ α, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὸ δ, πρὸς τὸ γ. ἐὰν δὲ συνεχὴς ἡ ἀναλογία ᾖ, ὡς ἐπὶ τῶν ε ζ η. ἐπεὶ τὸ ζ, δὶς λαμβάνεται, ὡς γὰρ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, οὕτως ἔχει καὶ τὸ αὐτὸ ζ, πρὸς τὸ η, τὸ ζ, ἑπόμενόν τε ἐστὶ, καὶ ἡγούμενον, ἑπόμενον μὲν πρὸς τὸ ε, ἡγούμενον δὲ πρὸς τὸ η. ὥστε τὰ μὲν ε ζ, ὡς ἡγούμενα, τὰ δὲ ζ η, ὡς ἑπόμενα, Ὁμόλογά ἐστι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 8.

ΙΓ′: Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ, λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

Διδάξας μέχρι τοῦδε, τίς τε ὁ λόγος τῶν μεγεθῶν, καὶ τίνα μεγέθη λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχειν δύναται, τίνα δὲ ἐν τῷ αὐτῷ εἰσὶ λόγῳ, καὶ πῶς τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον καλεῖται, τίνα τε τὰ ἡγούμενα, καὶ τίνα τὰ ἑπόμενα, καὶ ἄλλα, ὅσα εἰς ἀκριβῆ τῆς ἀναλογίας συντείνουσι γνῶσιν, ἄρχεται ἐντεῦθεν διακρῖναι, καὶ πόσα τὰ τοῦ λόγου εἴδη. Ὁ Λόγος μὲν οὖν τῶν ὁμογενῶν μεγεθῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα δηλονότι πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, ὡς γένος λαμβάνεται. εἴδη δὲ τούτου ἕξ, τὸ Ἐναλλὰξ, τὸ Ἀνάπαλιν, ἡ Σύνθεσις, ἡ Διαίρεσις, ἡ Ἀναστροφὴ, καὶ