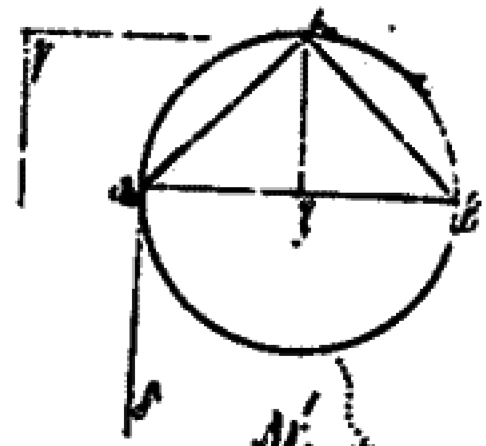
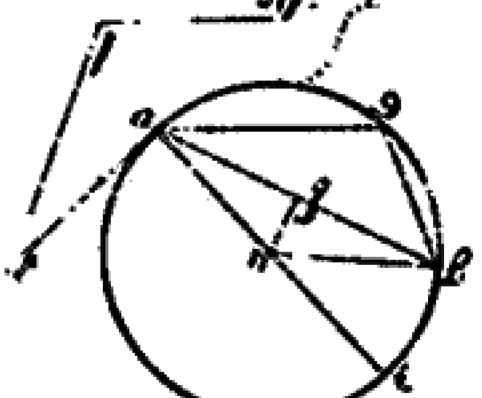
Ἔστω πλάτυτέρα ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία ἀμβλεῖα, καὶ γενέσθω ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ δ α β, ὡς προειρημένως. τῆς δὲ κατασκευῆς γενομένης, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς α. καταγραφῆς, ἐπεὶ ἡ α β, δίχα τέτμηται, πάντως γε αἱ α ζ, ζ η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς β ζ, ζ η, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α ζ η, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ β ζ η, ἄρα καὶ βάσις ἡ α η, βάσει τῇ β η, ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ η α, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β, ὡς ὁ α β ε. Εἰλήφθω δὲ τυχὸν σημεῖον τὸ θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α θ, θ β. καὶ ἐπεὶ ἡ δ α, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς α ε, ἅπτεται πάντως τοῦ κύκλου, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ις′. τοῦ παρόντος. καὶ δὲ τὴν αἰτίαν, ἡ ὑπὸ δ α β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ α θ β. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δ α β, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῷ γ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α θ β, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. ἐπὶ τῆς α β, ἄρα γέγραπται τὸ α θ β, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

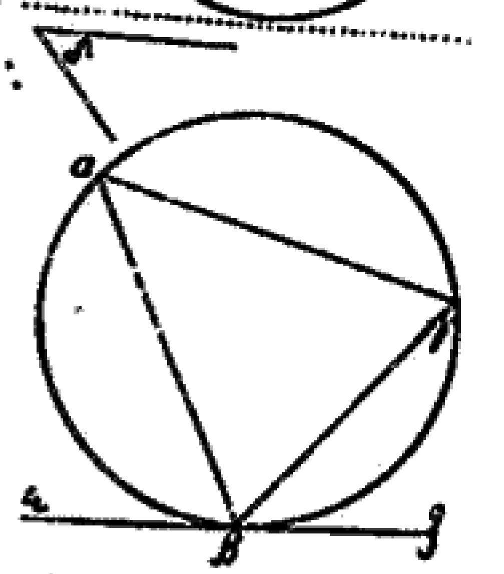
Eucl. Lib. 3. Fig. 28.





Πρότασις ΛΔ′. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



Ἔστω δὲ ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ α β γ, κύκλου τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ δ, δοθείσῃ. Ἀπὸ τοῦ ζ, τινὸς τυχόντος σημείου ἤχθω ἐφαπτομένη τοῦ α β γ, κύκλου κατὰ τὸ β, ἡ ζ ε, διὰ τῆς ιζ′. τοῦ παρόντος, καὶ κατὰ τὸ β, σημεῖον πρὸς τῇ ε ζ, εὐθείᾳ γενέσθω ἴση τῇ πρὸς τῷ δ, γωνίᾳ ἡ ὑπὸ ζ β γ, διὰ τῆς κγ′. τοῦ α. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ β α, α γ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ε ζ, ἅπτεται τοῦ κύκλου, πάντως γε ἡ ὑπὸ ζ β γ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β α γ, ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ζ β γ, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῷ δ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ β α γ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ. τέτμηται ἄρα τὸ β α γ, τμῆμα, ὡς ἐζητεῖτο, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΛΕ′. Θεώρημα.

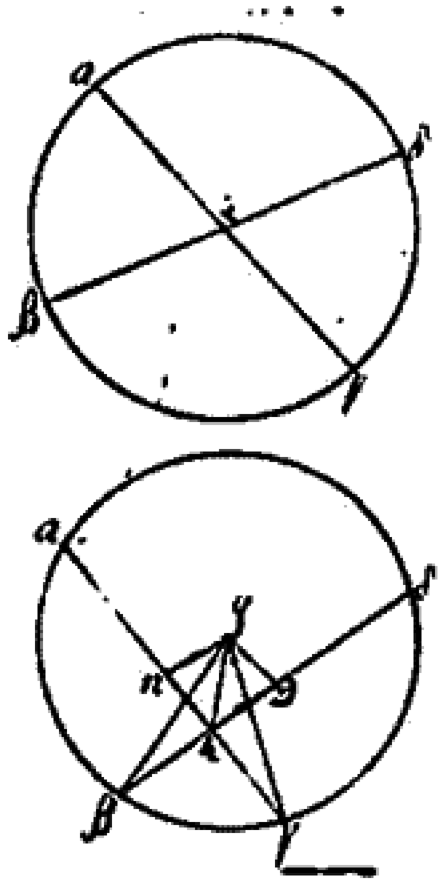
Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ α β γ δ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ α γ, β δ, κατὰ τὸ ε. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β ε, ε δ, ὀρθογωνίῳ.

εἰ μὲν

εἰ οὖν αἱ αγ, βδ, διὰ τοῦ κέντρου διέρχονται, ἐπεὶ δίχα ἑκατέρα τέμνεται, δῆλον τὸ ὑποσχεθέν. εἰδὲ μὴ διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν, ὡς ἐπὶ τοῦ β΄. διαγράμματος, εὑρέθήτω τὸ τοῦ κύκλου κέντρον, διὰ τῆς α΄. τοῦ παρόντος, καὶ ἔσω τοῦτο τὸ ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν αγ, βδ, πιπτέτωσαν κάθετοι, αἱ ζη, ζθ, διὰ τῆς ιβ΄. τοῦ α΄. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζβ, ζγ, ζε. ἑκατέρα γοῦν τῶν αγ, βδ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ζη, ζθ, κατὰ τὴν γ΄. τοῦ παρόντος. καὶ δὲ τὴν ε΄. τοῦ β΄. ἐπεὶ ἡ αγ, εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ η, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ ε, τέτμηται, πάντως γε τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ηε, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ηγ, τετραγώνῳ, κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ἀπὸ τῆς ηζ, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογ. μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν εη, ηζ, τετραγώνων ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ηγ, ηζ, τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν εη, ηζ, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζε. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν γη, ηζ, τὸ ἀπὸ τῆς ζγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αε, εγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζγ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς ζβ. ἴσαι γὰρ αἱ ζγ, ζβ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δε, εβ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ζβ, τετραγώνῳ. ὥστε κατὰ τὸ α΄. ἀξίωμα, τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δε, εβ, ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου, κοινοῦ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου ἀφαιρουμένου, ἐγκαταλείπεται τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν δε, εβ, ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔδει τὸ ὑποσχεθέν. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 29.

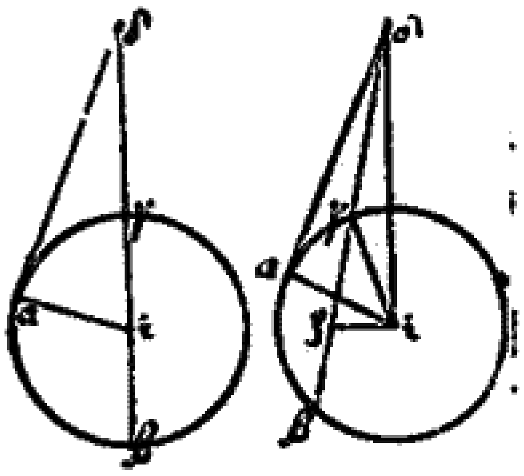


Πρότασις Λϛ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου ἤδη τοῦ αβγ, οὗ κέντρον τὸ ε, ληφθήτω σημεῖον ἐκτὸς, τὸ δ. ἀφ᾽ οὗ πρὸς τὸν κύκλον πιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ δβ, δα, ἡ μὲν δβ, τέμνουσα, ἡ δὲ ἁπτομένη τοῦ κύκλου. ἀλλ᾽ ἐπεὶ ἡ τέμνουσα δύναται καὶ διὰ τοῦ κέντρου καὶ μὴ, διέρχεσθαι, ὑποκείσθω πρῶτον διὰ τοῦ κέντρου. ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ α, ἐπιζεύχθω ἡ εα, ἐφ᾽ ἧς ὀρθή ἐστιν ἡ δα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ΄. ἐπεὶ οὖν ἡ βγ, δίχα τέ-

τέτμηται κατὰ τὸ ε, κέντρον, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ γδ, πάντως γε κατὰ τὴν ϛ'. τοῦ β'. τὸ ὑπὸ τῶν βδ, δγ, ὀρθογ. μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γε, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. ἀλλ' ἡ γε, ἴση ἐστὶ τῇ εα, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, δγ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τετραγ. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν δα, αε, τετράγωνα, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, δγ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δα, αε, τετραγώνοις. κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ἐγκαταλείπεται τὸ ὑπὸ τῶν βδ, δγ, ὀρθογ. ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δα, τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. — Eucl. Lib. 3. Fig. 30.



Ἔστω δὲ ἡ δβ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ δβ, ἡ εζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ βγ, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ ζ, κατὰ τὴν γ'. τοῦ παρόντος, καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ γδ, πάντως γε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης βδ, καὶ τῆς προσκειμένης γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γζ, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δζ, τετραγώνῳ κατὰ τὴν ϛ'. τοῦ β'. κοινοῦ προσκειμένου τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγώνου, τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν εζ, ζγ, τετραγώνων ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δζ, ζε, τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν εζ, ζγ, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν δζ, ζε, τὸ ἀπὸ τῆς δε, κατὰ τὴν μζ'. τοῦ α'. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γε, τετραγώνου, ἤτοι τῆς αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. τούτῳ δὲ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν δα, αε, τετράγωνα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μζ'. τοῦ α'. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δα, αε, τετραγώνοις. κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ἐγκαταλείπεται τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δα, τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

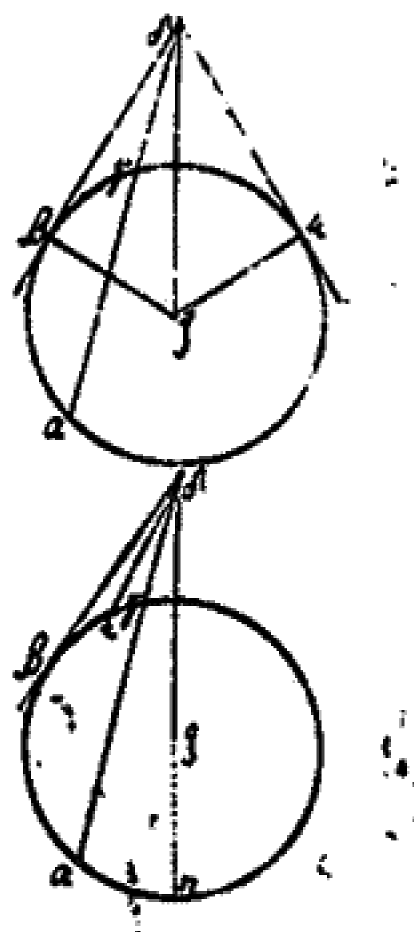
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐκτὸς ὄντος τοῦ κύκλου ἑκατέρωθεν ἀπάγωνται εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. τὸ γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐναπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς κυρτῆς περιφερείας καὶ τοῦ σημείου, ὡς δέδεικται.

Πρότασις ΛΖ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Τοῦ αβγ, ἤδη κύκλου εἰλήφθω σημεῖον ἐκτὸς τὸ δ, ἀφ' οὗ ἀχθήτωσαν αἱ δγα, δβ, δβ, ἡ μὲν δγα, τέμνουσα, ἡ δὲ δβ, προσπίπτουσα τῷ κύκλῳ. ἔστω δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δβ, τετραγώνῳ. Λέγω, ὅτι ἡ δβ, ἅπτεται τοῦ κύκλου. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ δ, ληφθέντος σημείου καθ᾽ ἕτερον μέρος ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ἡ δε, διὰ τῆς ιζ΄. τοῦ παρόντος. καὶ εὑρεθέντος τοῦ ζ, κέντρου κατὰ τὴν α΄. τοῦ παρόντος, ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζβ, ζε. καὶ ἐπεὶ ἡ ζε, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς δε, κατὰ τὴν ιη΄. τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε ἡ ὑπὸ ζεδ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἀλλ᾽ ἡ μὲν δε, ἅπτεται, ἡ δὲ δγα, τέμνει τὸν κύκλον, ἄρα κατὰ τὴν προτέρω, τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, περιεχόμενον ὀρθογ. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δβ, ἡ δε, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δβ. ἀλλὰ καὶ ἡ ζε, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, ὡς ἀπὸ τοῦ ζ, κέντρου ἐξαγόμεναι, ἄρα αἱ δε, εζ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δβ, βζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ δζ, κοινή, πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ ζεδ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζβδ, κατὰ τὴν η΄. τοῦ α΄. ἀλλ᾽ ἡ ζβ, διὰ τοῦ κέντρου ἐστί, καὶ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπ᾽ αὐτῆς πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ βδ, ἅπτεται ἄρα ἡ βδ, τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ΄. τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 3. Fig. 31.



Ἄλλως. Τῶν αὐτῶν γὰρ κειμένων, μὴ ἔστω ἁπτομένη, εἰ δυνατόν, ἡ δβ, τοῦ αβγ, κύκλου, ἀλλ᾽ ἑτέρα τις ἡ δε. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν δε, ἅπτεται, ἡ δὲ δγα, τέμνει τὸν κύκλον, πάντως γε τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, ἴσον ὑπετέθη καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δβ. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς δε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δβ. καὶ ἑπομένως ἡ δε, ἴση ἐστὶ τῇ δβ, ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τὴν η΄. τοῦ παρόντος. ἡ γὰρ δε, ὡς ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου, δηλ. τῆς δη, ἐλάττων ἐστὶ τῆς δβ, τῆς ἀπώτερον. Ὁμοίως δὲ δείξομεν καὶ περὶ οἱασδήποτ᾽ ἄλλης. οὐκ ἄρα ἄλλη τις εὐθεῖα ἅπτεται τοῦ κύκλου, ἢ ἡ δβ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Τέλος τοῦ Τρίτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Προοιμιακὴ περίληψις τοῦ Τετάρτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Τὸ ἀνὰ χεῖρας Βιβλ. προβληματικὸν ὂν ἅπαν, διδάσκει τινὶ μεθόδῳ ἐγγραπτέα τῷ κύκλῳ, ἢ περιγραπτέα τὰ πολύγωνα, καὶ τακτικὰ σχήματα. Ἐκ τούτου μόνου παρέχθη ἡ μέθοδος τῆς κατασκευῆς, καὶ χρήσεως τῶν κανονίων τῶν ἡμιτόνων, ἀποτεμνόντων καὶ τεμνουσῶν. Ὅθεν καὶ τῇ Τριγωνομετρίᾳ τὰ μάλιστα χρήσιμον. διὰ γὰρ τοῦ ἐγγράφειν τῷ κύκλῳ καὶ περιγράφειν πολύγωνα, τὰ τῶν ὑποτεινουσῶν, ἀποτεμνόντων, τεμνουσῶν τε, καὶ ἡμιτόνων Κανόνια κατασκευάζειν μανθάνομεν. ὧν τῇ δυνάμει τὰ μεγέθη τῶν οἱωνδηποτοῦν σωμάτων ἐσχηματισμένων, καὶ ἐπιπέδων σχημάτων δυνάμεθα εὑρεῖν, καὶ ἔτι τοὺς πρὸς ἄλληλα λόγους. Διὰ τούτου τὰς τῶν Ἀστέρων φάσεις, ὀρθῶς γινώσκομεν, καθ᾽ ἃς πλανῶνται, τὴν τριγωνικὴν ἀμέλει, τετραγωνικήν, καὶ ἑξαγωνικήν, συνόδους τε καὶ πανσελήνους. αἵτινες τῆς τῶν πολυγώνων ὅλως ἐν κύκλῳ ἐγγραφῆς ἐξήρτηνται. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ πολυθρύλλητος Τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου. διὰ γὰρ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν ἐγγραφομένων τῷ κύκλῳ καὶ περιγραφομένων πολυγώνων, γινώσκεται τὸ τοῦ κύκλου ἐμβαδόν. εἴ, τε τῶν κύκλων πρὸς ἀλλήλους λόγοι, διπλάσιος, τριπλάσιος, καὶ οἱ ἑξῆς, ἐκ τοῦ διπλασίου, τριπλασίου, καὶ τῶν ἑξῆς, τῶν ἐγγραφομένων, καὶ περιγραφομένων πολυγώνων, πρὸς ἄλληλα λόγων, γινώσκονται. χρησιμεύει τοῦτο λίαν τῇ πρὸς τὰ στρατιωτικὰ ὀχυρώματα Ἀρχιτεκτονικῇ, κεχρημένῃ μάλιστα τοῖς ἐγγεγραμμένοις πολυγώνοις τῷ κύκλῳ.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

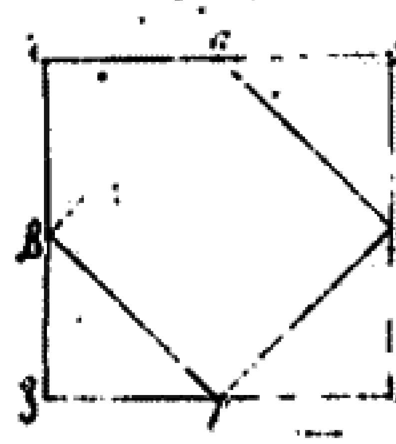
Ὅρος Πρῶτος.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

Β'. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ γράφεται, ἅπτηται.

Ἐπεὶ τρόπος ἐπιστημονικῆς θεωρίας ἐστὶν ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων ἀρχομένους ἐπὶ τὰ τελειότερα μεταβαίνειν, καὶ συνθετώτερα, τούτου γε χάριν καὶ Εὐκλ. διδάξας ἐπὶ τοῦ προτέρου Βιβλίου, τοῦ τρίτου λαχόντος τάξιν, περὶ τῶν εὐθειῶν τε καὶ γωνιῶν τῶν ἐν τοῖς κύκλοις καὶ τοῖς τῶν κύκλων τμήμασιν, ἄρχεται ἐπὶ τοῦ παρόντος ἑρμηνεῦσαι περὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τῶν ἐν τε τοῖς εὐθυγράμμοις, καὶ τοῖς κύκλοις ἐγγραφομένων τε καὶ περιγραφομένων. διὸ καὶ τὰ προσήκοντα τινὰ τοῦ Βιβλίου ἀποσημειώσας, ὡς ὅρους τε καὶ ἀρχὰς τῶν ἄλλων προτίθησιν. ἄρχεται δὲ τῆς ἐγγραφῆς τε καὶ περιγραφῆς τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τῆς ἐν ἀλλήλοις, αὐτοῦ τούτου ἴσως ἕνεκα. τῶν ὁμοειδῶν γὰρ ἡ σχέσις εὐληπτοτέρα τῆς τῶν ἀνομοειδῶν καθέστηκε. φησὶ γοῦν, τηνικαῦτα σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι μὲν λέγεται, ὁπηνίκα ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος ἅπτηται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, σχήματος. περιγράφεσθαι δὲ περὶ σχῆμα λέγεται, ἡνίκα ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου σχήματος ἅπτηται ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, σχήματος. οἷον τὸ μὲν α β γ δ, σχῆμα ἐγγράφεσθαι λέγεται εἰς τὸ ε ζ η θ, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἅπτεται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ ε ζ η θ. τὸ δὲ ε ζ η θ, περιγράφεσθαι λέγεται περὶ τὸ α β γ δ, σχῆμα, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἅπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ α β γ δ, σχήματος.

Eucl. Lib. 4. Fig. 1.

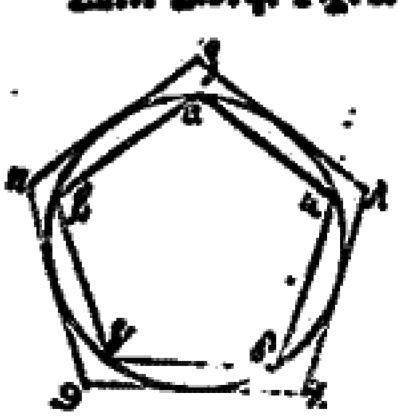


Γ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Δ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἅπτηται.

Δηλώσας ἐν τοῖς ἀνωτέρω δυσὶν ὅροις, τίνα τὰ συστατικὰ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τῶν τε εἰς ἄλληλα ἐγγραφομένων, καὶ τῶν περὶ ἄλληλα περιγραφομένων, ἅπτεται ἐπὶ τοῦ παρόντος ἐν δυσὶν αὖθις ὅροις, τῶν συστατικῶν τῆς ἐγγραφῆς τε καὶ περιγραφῆς τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τοῖς κύκλοις παραβαλλομένων. καὶ δή φησι, Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον τηνικαῦτα ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος, ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Περιγράφεσθαι δὲ τηνικαῦτα, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου σχήματος τῆς τοῦ κύκλου ἅπτηται περιφερείας. οἷον τὸ μὲν α β γ δ ε, σχῆμα εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον λέγεται, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ γωνιῶν τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἅπτεται. τὸ δὲ ζ η θ κ λ, περιγεγραμμένον, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἅπτεται τοῦ κύκλου.

Eucl. Lib. 4. Fig. 2.



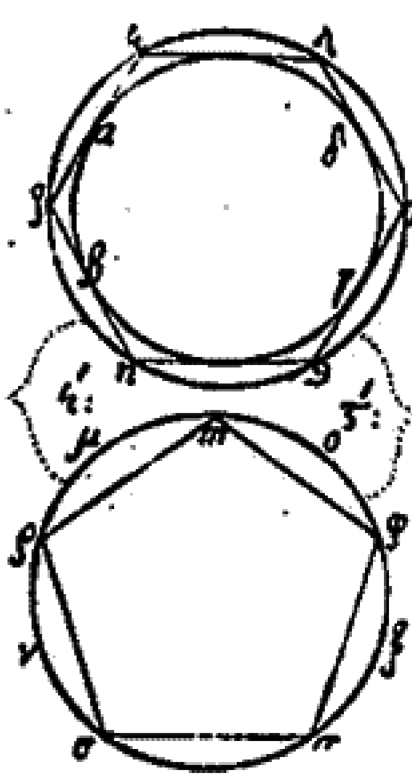
Ε'. Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

ϛ'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

Διδάξας ἐν τοῖς δυσὶ προτέροις ὅροις, πότε τῶν εὐθυγράμμων ἕκαστον σχημάτων εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, καὶ πότε περὶ κύκλον περιγράφεσθαι· ἐπεὶ ἄμφω ταῦτα δύναται καὶ ὁ κύκλος παθεῖν, βούλεται ἐν τοῖς δυσὶ τούτοις ὅροις διατρανῶσαι, καὶ πότε μὲν εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον κύκλος ἐγγράφεσθαι λέγεται, πότε δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι. δύο μὲν οὖν ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων θεωρουμένων, τῶν γωνιῶν, φημί, καὶ πλευρῶν, ἑνὸς δὲ ἐπὶ τοῦ κύκλου, ὡς ἁπλουστέρου, τῆς αὐτοῦ δηλονότι περιφερείας. ἐν ἐκείνοις μέν, ὧν αἱ γωνίαι τοῦ κύκλου ἥπτοντο, ἐγγεγραμμένα ἐλέγετο· ὧν δὲ αἱ πλευραί, περιγεγραμμένα. ἐπὶ δὲ τοῦ κύκλου, ὅταν μὲν ἡ περιφέρεια αὐτοῦ τῶν πλευρῶν ἅπτηται τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος, τότε ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ σχῆμα λέγεται, ὅτε δὲ ἡ περιφέρεια ἅπτηται τῶν γωνιῶν, τηνικαῦτα ὁ κύκλος περιγεγραμμένος λέγεται περὶ τὸ σχῆμα. οἷον ὁ μὲν α β γ δ, κύκλος ἐγγράφεσθαι λέγεται εἰς τὸ ε ζ η θ κ λ, σχῆμα, ὅτι ἡ τούτου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ σχήματος ἅπτεται.

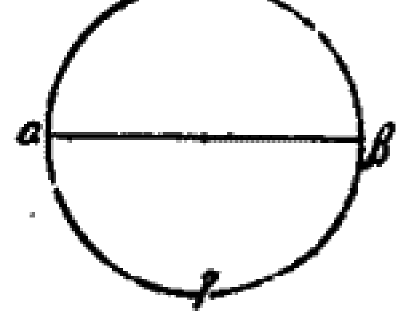
ται. ὁ δὲ μ ν ξ ο, κύκλος περιγράφεσθαι περὶ π ρ σ τ φ, σχῆμα, ὅτι ἡ τούτου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ σχήματος ἅπτεται. ὥστε ἡνίκα τὸ σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς κύκλον, τηνικαῦτα ὁ κύκλος περιγεγραμμένος ἐστὶ περὶ τὸ σχῆμα. καὶ ἀνάπαλιν, ὅτε τὸ σχῆμα περιγεγραμμένον ἐστὶ περὶ τὸν κύκλον, τότε ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος ἐστὶν εἰς τὸ σχῆμα.

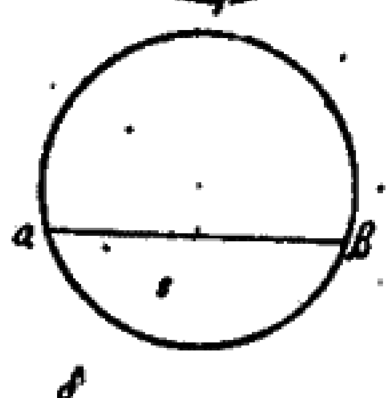
Eucl. Lib. 4. Fig. 3.



Ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

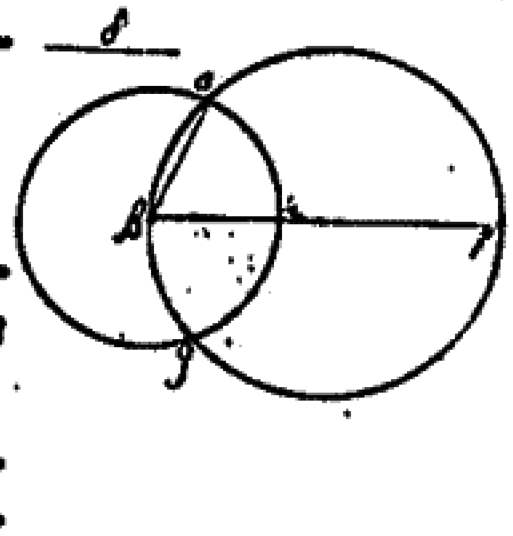
Ἐπεὶ τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων τοῖς πλείοσιν οὐ μόνον ἡ δεῖξις ἀναγκαία, ἀλλ' οὐχ ἧττον καὶ ἡ κατασκευή. ἐν δὲ τῷ κύκλῳ τριχῶς ἐνδέχεται θεωρεῖσθαι τὴν εὐθεῖαν. ἢ γὰρ ἅπτεται τοῦ κύκλου, ἢ τέμνει αὐτόν, ἢ ἐναρμόζεται εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἡ μὲν ἁπτομένη εἰς κατασκευὴν τῶν περὶ κύκλον περιγραφομένων σχημάτων συμβάλλει, περὶ ἧς ἐν τῷ προτέρῳ ἡρμήνευσε βιβλίῳ. ἡ δὲ ἐναρμοσμένη εἰς κατασκευὴν τῶν ἐγγραφομένων εἰς κύκλον ἀναγκαία, ἧς ἐν οὐδενὶ τῶν προτέρων βιβλίων, ὡς μὴ χρειώδους τότε, μνήμην ἐποιήσατο. τούτου εἵνεκα ἐπὶ τοῦ παρόντος, ὡς ἀναγκαίας οὔσης καὶ τῆς ταύτης γνώσεως, ἑρμηνεύει περὶ αὐτῆς. Ἐναρμόζεσθαι τοίνυν εὐθεῖα εἰς κύκλον, φησὶ, λέγεται, ὅταν τὰ τῆς ἐναρμοσμένης πέρατα ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου, ὡς ἡ α β, ἧς τὰ α, καὶ β, πέρατα ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ α β γ, κύκλου ἐστίν. ὥστε ἐπεὶ ἐν κύκλῳ εὐθεῖα, ἢ διὰ τοῦ κέντρου, ἢ ἐκτὸς τούτου γράφεται, πάντως γε δύο καὶ τῆς ἐναρμοσμένης εἰς κύκλον εὐθείας τὰ εἴδη, ἤτοι διάμετρος καὶ ἡ χορδή. τίς δὲ ὁ τρόπος τοῦ ἑκάστην εὐθεῖαν, εἰς ἕκαστον κύκλον ἐναρμόζεσθαι, ἑξῆς ἐρεῖ.





Πρότασις Α'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.



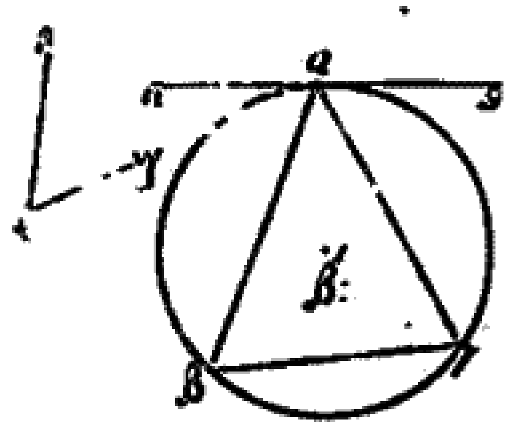
Ἔστω δὴ ἐναρμόσαι εἰς κύκλον τὸν α β γ, εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ δ. Ἤχθω ἡ β γ, διάμετρος τοῦ κύκλου. κἂν ἴση ᾖ ἡ β γ, τῇ δ, γέγονε τὸ προσταχθέν. εἰ δὲ μείζων, ἀφῃρήσθω ἴση τῇ δ, ἡ β ε, ἡ βε, κατὰ τὴν γ'. τοῦ α'. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βε, κύκλος γεγράφθω ὁ αεζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βα. Ἐπεὶ οὖν τὸ β, κέντρον ἐστὶ τοῦ αεζ, κύκλου, πάντως γε ἡ βα, ἴση ἐστὶ τῇ βε, ἀλλ' ἡ βε, ἴση εἴληπται τῇ δ, καὶ ἡ αβ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δ. Εἰς τὸν αβγ, ἄρα κύκλον ἐνήρμοσται ἡ βα, ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Β'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

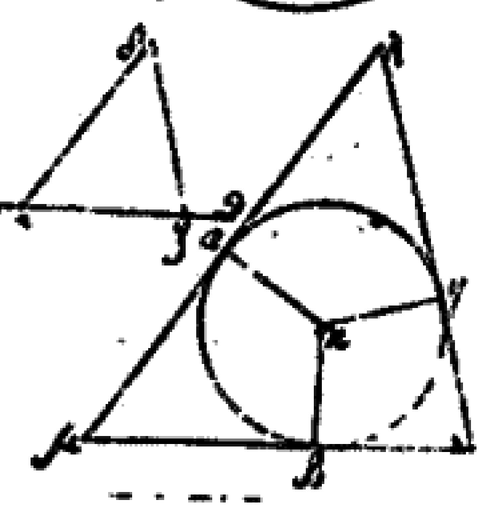
Εἰς τὸν αβγ, ἤδη κύκλον ἔσω ἐγγράψαι τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ δοθέντι δεζ. ἤχθω ἀπτομένη τοῦ κύκλου κατὰ τὸ α, ἡ ηθ. καὶ γενέσθω τῇ μὲν πρὸς τῷ ζ, γωνίᾳ τοῦ δεζ, τριγώνου ἴση, ἡ ὑπὸ ηαβ, κατὰ τὴν κγ'. τοῦ α'. τῇ δὲ πρὸς τῷ ε, ἡ ὑπὸ θαγ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ηθ, ἅπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς εἰς τὸν κύκλον ἤχθη τέμνουσα ἡ αγ, ἄρα ἡ ὑπὸ θαγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβγ, τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι, κατὰ τὴν λβ'. τοῦ γ'. ἀλλ' ἡ ὑπὸ θαγ, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῷ ε, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηαβ, καὶ ἑπομένως τῇ πρὸς τῷ ζ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ βαγ, ἴση ἔσται τῇ πρὸς τῷ δ. τὸ αβγ, ἄρα τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δεζ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα αβγ, κύκλον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 4. Fig. 4.



Πρότασις Γ. Πρόβλημα.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.



Περὶ τὸν δοθέντα ἤδη αβγ, κύκλον ἔσω περιγράψαι τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ δεζ. Ἐξαχθέντω ἡ εζ, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ η, καὶ θ, σημεῖα. καὶ εἰλήφθω τὸ κ, κέντρον τοῦ κύκλου, κατὰ τὴν α'. τοῦ γ'. καὶ τῇ μὲν ὑπὸ δεη, γωνίᾳ, ἴση γενέσθω ἡ ὑπὸ βκα. τῇ δὲ ὑπὸ δζθ, ἡ ὑπὸ βκγ, κατὰ τὴν κγ'. τοῦ α'. καὶ διὰ τῶν α, β, γ, σημείων ἀχθήτωσαν ἀπτόμεναι τοῦ κύκλου, κατὰ τὴν ιζ'. τοῦ γ'. αἱ λμ, μν, νλ, αἵτινες ὀρθαί εἰσι, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ'. τοῦ αὐτοῦ, ὥστε ἑκάστη τῶν ὑπὸ καμ, κβμ, κγν, ὀρθή ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ παντὸς τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, διὰ τὸ εἰς δύο διαιρεῖσθαι τρίγωνα, καὶ τὰς τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, κατὰ τὴν λβ'. τοῦ α'. ἄρα καὶ τοῦ ακβμ, τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ δὲ ὑπὸ καμ, κβμ, δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, ἑκατέρα γὰρ ὀρθή,

ὡς

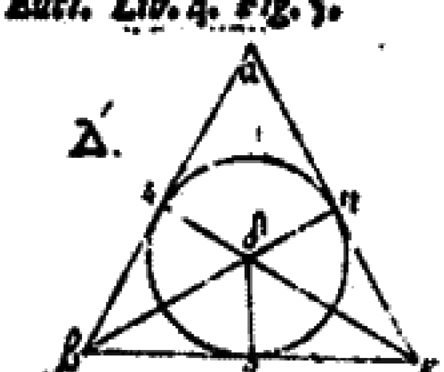
ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ ακβ, αμβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ δεη, δεζ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, κατὰ τὴν ιγ'. τοῦ α. ἄρα αἱ ὑπὸ ακβ, αμβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δεη, δεζ. γέγονε δὲ ἡ ὑπὸ ακβ, ἴση τῇ ὑπὸ δεη, ἐγκαταλείπεται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αμβ, ἴση τῇ ὑπὸ δεζ. Διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ὑπὸ βνγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δζε. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ αλγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εδζ. τὸ λμν, ἄρα τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δεζ. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸ δοθέντα αβγ, κύκλον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

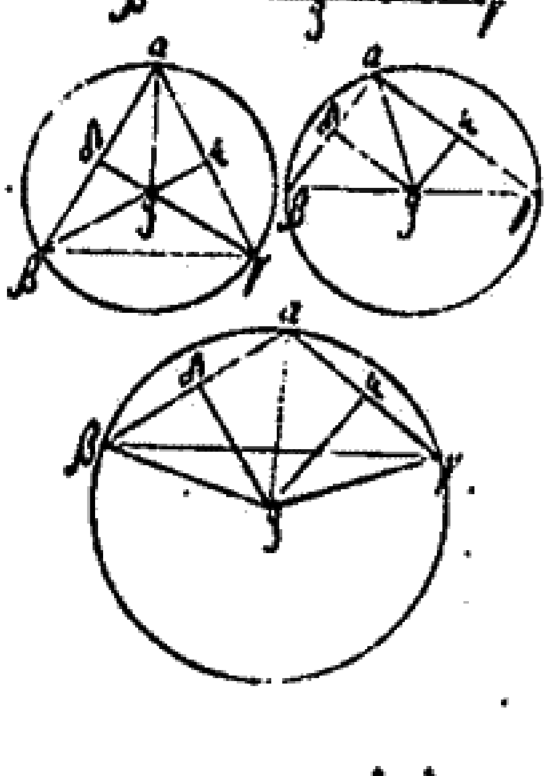
Πρότασις Δ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω δὴ ἐγγράψαι κύκλον εἰς τὸ αβγ, τρίγωνον. Τμηθήτω ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνιῶν δίχα, κατὰ τὴν θ'. τοῦ α. ταῖς βδ, γδ, εὐθείαις, συμβαλλούσαις ἀλλήλαις κατὰ τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ, ἀχθήτωσαν κάθετοι ἐπὶ τῶν αβ, βγ, γα, αἱ δε, δζ, δη. Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ὑπὸ εβδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζβδ, δίχα γὰρ ἡ ὑπὸ εβζ, τέτμηται. ἡ δὲ ὑπὸ βεδ, τῇ ὑπὸ βζδ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. ἄρα τῶν δεβ, δζβ, τριγώνων δύο γωνίαι δυσὶ γωνίαις ἴσαι εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ βδ, ὑποτείνουσα ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινὴ, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ τοῦ δεβ, τριγώνου, ἴσαι εἰσὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς τοῦ δζβ, κατὰ τὴν κς'. τοῦ α. ἡ δε, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ δη, ἴση τῇ δζ. ὥστε αἱ δε, δζ, δη, ἴσαι εἰσί. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, γραφόμενός τις κύκλος ἐλεύσεται καὶ διὰ τῶν ζ, καὶ η, καὶ ἅψεται τῶν αβ, βγ, γα, πλευρῶν τοῦ αβγ, τριγώνου, διὰ τὸ καθέτους εἶναι ἐπὶ τῶν εδ, δζ, δη, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ις'. τοῦ γ'. ὅπερ ἔδει τὸ προσταχθέν.

Eucl. Lib. 4. Fig. 5.





Πρότασις Ε'. Πρόβλημα.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω δὴ περιγράψαι κύκλον περὶ τὸ αβγ, τρίγωνον. Τμηθήτω αἱ αβ, καὶ αγ, πλευραὶ τοῦ τριγώνου δίχα κατὰ τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα, ἀφ' ὧν ἀχθήτωσαν κάθετοι ἐπὶ τῶν αβ, αγ, αἱ δζ, εζ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζβ, ζγ, ζα. Ἐπεὶ δὲ τῶν δζ, εζ, συμβαλλουσῶν ἀλλήλαις κατὰ τὸ ζ, τριχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι τὴν τούτων συνδρομὴν, ἢ γὰρ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ἔσται τὸ ζ, ὡς ἐπὶ τῆς α. καταγραφῆς τοῦ σχήματος, ἢ ἐπὶ τῆς βγ, ὡς ἐπὶ τῆς β'. ἢ γοῦν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς γ'. ἐφ' ἑκάστου δὲ τῆς καταγραφῆς τρόπου ἡ αὐτή ἐστι δεῖξις. φέρε δὴ

ἐπὶ

ἐπὶ τοῦ α΄. μόνου τὴν ἀπόδειξιν ποιήσωμεν. Αἱ μὲν οὖν δα, δβ, ἴσαι εἰσί, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἑκατέρᾳ ἡ δζ. ἄρα καὶ βάσις ἡ βζ, βάσει τῇ ζα, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν δ. τοῦ α΄. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ γζ, ἴση τῇ αζ. ὥστε αἱ τρεῖς ζα, ζβ, ζγ, ἴσαι εἰσί. καὶ ὁ κέντρῳ μὲν ζ, διαστήματι δὲ τῇ ζα, γραφόμενος κύκλος, ἐλεύσεται καὶ διὰ τῶν β, καὶ γ, σημείων, καὶ περιγεγραμμένος ἔσται περὶ τὸ αβγ, τρίγωνον, κατὰ τὸν ε΄. ὅρον τοῦ παρόντος. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῆς β΄. καὶ γ΄. καταγραφῆς τὸ ζ, κέντρον εἶναι τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ.

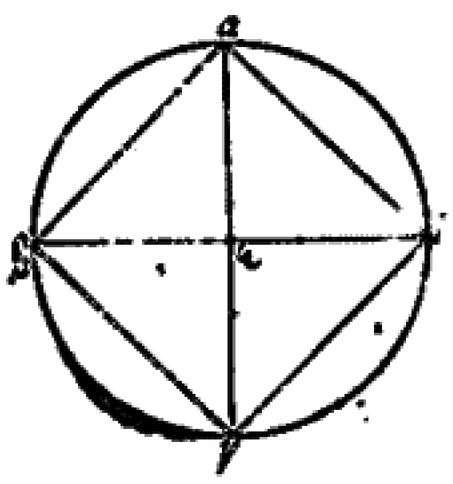
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ὅταν τῶν δύο τοῦ τριγώνου πλευρῶν δίχα τεμνομένων, αἱ ἐπ᾽ αὐτῶν ἀγόμεναι κάθετοι ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπέσωσιν, ἡ ὑπὸ τῆς ἀτμήτου ὑποτεινομένη γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ * τοὔμπαλιν, ἐν μείζονι γὰρ ἐστὶ τμήματι. ὅταν δὲ ἐπὶ τῆς ἀτμήτου, ὀρθή, καὶ * τοὔμπαλιν, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ. ὅταν δὲ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, μείζων ὀρθῆς, ἐν ἐλάττονι γάρ ἐστι τμήματι κύκλου.

Πρότασις ς΄. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἐγγράψαι τετράγ. εἰς τὸν αβγδ, κύκλον, οὗ κέντρον τὸ ε. Ἀχθήτωσαν δὲ αἱ αγ, βδ, τοῦ κύκλου διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τεμνόμεναι. καὶ ἐπιζευχθήτωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δα. καὶ τὸ αβγδ, ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἰς τὸν κύκλον, τετράγωνον ἔσται. Ἐπεὶ γὰρ αἱ βε, εδ, ἴσαι εἰσίν, ὡς ἡμιδιάμετροι, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ εα. ἄρα κατὰ τὴν δ. τοῦ α΄. καὶ ἡ βα, ἴση ἐστὶ τῇ αδ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ μὲν αβ. ἴση τῇ βγ, ἡ δὲ αδ, τῇ δγ. ὥστε τὸ αβγδ, τετράπλευρον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν λα΄. τοῦ γ΄. ἑκάστη γὰρ τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἐν ἡμικυκλίῳ ἐστίν, ἄρα τετράγωνον ἐστίν. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 4. Fig. 6.



Πρότασις Ζ΄. Πρόβλημα.

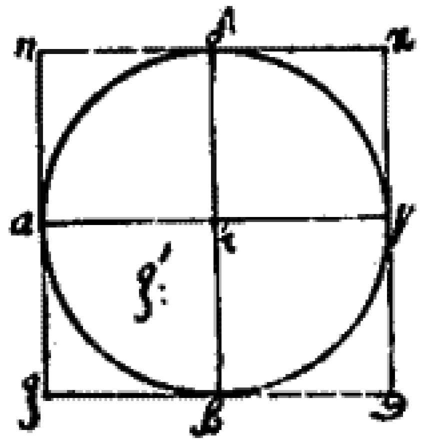
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω περιγράψαι τετράγωνον περὶ τὸν αβγδ, κύκλον. Ἀχθήτωσαν δὲ αἱ αγ, βδ, διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τεμνόμεναι, καὶ διὰ τῶν αβγδ, σημείων διήχθωσαν ἁπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ ζη, ζθ, θκ, κη. καὶ τὸ ζθκη, τετράπλευρον, τὸ περὶ τὸν αβγδ, περιγραφὲν κύκλον, τετράγωνον ἔσται. κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ις΄. τοῦ γ΄. αἱ τε ζη, καὶ θκ, πρὸς ὀρθάς εἰσιν ἐπὶ τῆς αγ, διαμέτρου. ὥστε αἱ ὑπὸ ζαγ, θγα, γωνίαι, ὀρθαί εἰσι, καὶ ἑπομένως αἱ ζη, θκ, παρά-

παρά.

παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν κη΄. τοῦ α΄. Διὰ τὰ αὐτὰ τοίνυν καὶ αἱ ζθ, ηκ, παράλληλοί εἰσι. τὸ ζθκη, ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ἀλλὰ ταῖς μὲν ζη, θκ, ἴσηντε καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ βδ, ταῖς δὲ ζθ, ηκ, ἡ αγ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κη΄. τοῦ α΄. αἱ δὲ βδ, αγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡς διάμετροι, ἄρα αἱ ζη, ζθ, θκ, κη, ἴσαι εἰσιν, καὶ τὸ ζθκη, ἰσόπλευρόν ἐστι. Λέγω δ᾽ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ ζαγ, θγα, ὀρθαί εἰσι, καὶ τὸ ζγ, παραλληλόγραμμον, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αζθ, γθζ, ἀπεναντίον ὀρθαί εἰσι κατὰ τὴν λδ΄. τοῦ α΄. κατὰ δὲ τὴν αὐτὴν ἔτι καὶ αἱ ὑπὸ ζηκ, θκη, ὀρθαί εἰσιν, ἄρα τὸ ζθκη, ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἀλλὰ δὴ καὶ ἰσόπλευρον, ὡς δέδεικται, τετράγωνον ἄρα. ὅπερ ἔδει τὸ προταχθέν.

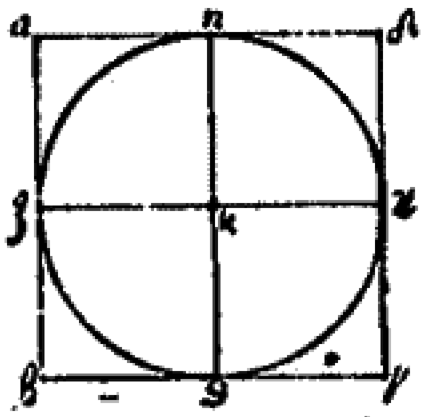
Eucl. Lib. 4. Fig. 7.



Πρότασις Η΄. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἐγγράψαι κύκλον εἰς τὸ αβγδ, τετράγωνον. Τμηθήτωσαν δὲ αἱ αβ, αδ, δίχα κατὰ τὰ ζ, καὶ η, σημεῖα. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ ζ, ἤχθω παράλληλος τῇ αδ, ἢ βγ, ἡ ζκ, ἀπὸ δὲ τοῦ η, ὁμοίως ἤχθω παράλληλος τῇ αβ, ἢ δγ, ἡ ηθ, τέμνουσα τὴν ζκ, κατὰ τὸ ε. Λέγω τοίνυν ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εζ, γραφόμενος κύκλος διέρχεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων η, κ, θ. Τὰ γὰρ αη, κβ, αθ, θδ, παραλληλόγραμμά ἐστι, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι, κατὰ τὴν λδ΄. τοῦ α΄.



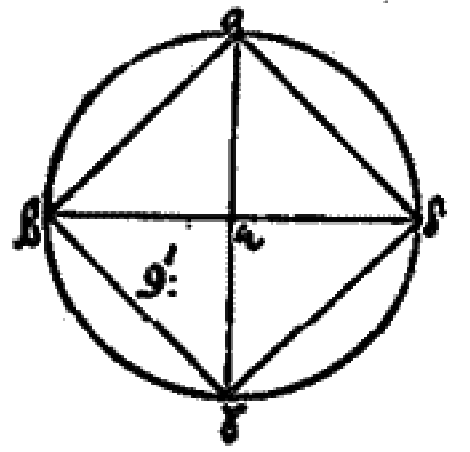
ὥστε αἱ ζκ, αδ, ἴσαι εἰσιν, ἑπομένως δὲ καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν· ἡ αη, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ζε. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ μὲν αζ, ἴση ἐστὶ τῇ ηε. ἡ δὲ ηδ, τῇ εκ. καὶ ἡ ζβ, τῇ εθ. ἐπεὶ δὲ αἱ αη, ηδ, καὶ αζ, ζβ, ἴσαι εἰσι, κατὰ τὴν κατασκευὴν, πάντως γε καὶ αἱ ηε, ζε, θε, κε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εζ, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν η, κ, θ, σημείων, ἁπτόμενος τῶν αδ, αβ, βγ, γδ, εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς η, ζ, θ, κ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ΄. τοῦ γ΄. εἰς τὸ δοθὲν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Θ΄. Πρόβλημα.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω δὴ περιγράψαι κύκλον περὶ τὸ αβγδ, τετράγωνον. Ἐπιζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ, τοῦ τετραγώνου διάμετροι, τεμνόμεναι ἀλλήλαις κατὰ τὸ ε, καὶ τὸ ε, κέντρον ἔσται τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αδ, ἴση ἐστὶ τῇ αβ, κοινὴ δὲ ἡ αγ, καὶ βάσις ἡ γδ, βάσει τῇ γβ, ἴση, πάντως γε, κατὰ τὴν η΄. τοῦ α΄. ἡ ὑπὸ δαγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ, ὥστε ἡ πρὸς τῷ α, γωνία τοῦ τετραγώνου δίχα τέτμηται. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς β, γ, δ, σημείοις γωνίαι δίχα τέμνονται. ἔστι δὲ ἡ πρὸς τῷ α, ἴση τῇ πρὸς τῷ β· καὶ ἡ μὲν ὑπὸ εαβ, ἡμίσειά ἐστι τῆς πρὸς τῷ α. ἡ δὲ ὑπὸ εβα, τῆς πρὸς τῷ β· ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ εα, ἴση ἐστὶ τῇ εβ, κατὰ τὴν ϛ. τοῦ α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ εβ, τῇ εγ, καὶ ἡ εγ, τῇ εδ, καὶ ἡ εδ, τῇ εα, ὥστε αἱ εα, εβ, εγ, εδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἄρα ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εα, περιγραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, γ, δ, σημείων. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 4. Fig. 8.

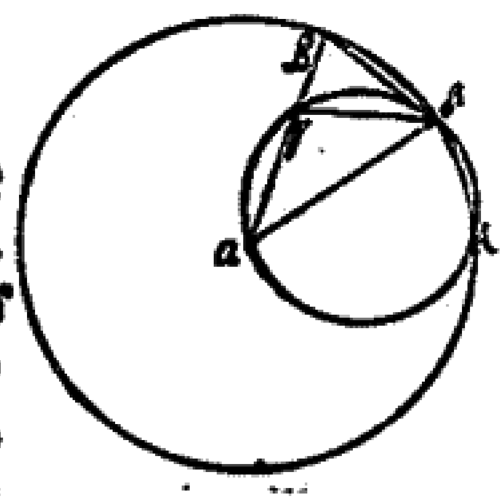


Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι παντὸς τετραγώνου αἱ διάμετροι δίχα τέμνονται.

Πρότασις Ι'. Πρόβλημα.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.



Κείσθω δὴ εὐθεῖά τις ἡ αβ· καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, διὰ τῆς ια. τοῦ β. ὥστε τὸ ὑπό τε τῆς ὅλης αβ, καὶ βγ, ἐλάττονος τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ αγ, μείζονος τμήματος τετραγώνῳ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, γραφέτω κύκλος ὁ βδε, καὶ ἐνηρμόσθω, κατὰ τὴν α. τοῦ παρόντος, εἰς τὸν βδε, κύκλον εὐθεῖα ἴση τῇ αγ, ἡ βδ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, δγ, καὶ ἔσται τὸ προσταχθέν. Περὶ γὰρ τὸ αγδ, τρίγωνον περιγεγράφθω ὁ αγδε, κύκλος, κατὰ τὴν ε. τοῦ παρόντος. καὶ ἐπεὶ αἱ αβ, αδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὡς ἡμιδιάμετροι, πάντως γε τὸ αβδ, τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν. ὅτι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ, αδβ, πρὸς τῇ βάσει αὐτοῦ γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαδ, πρὸς τῇ κορυφῇ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνῳ, κατὰ τὴν κατασκευὴν, εἴληπται δὲ ἡ βδ, ἴση τῇ αγ, πάντως τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ὀρθογ. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, τετραγώνῳ. ὥστε κατὰ τὴν λζ'. τοῦ γ'. ἡ βδ, ἅπτεται τοῦ αγδε, κύκλου. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἀπὸ τῆς ἁφῆς, δηλ. τοῦ δ, σημείου ἤχθη ἡ δγ, τέμνουσα τὸν κύκλον. πάντως γε ἡ ὑπὸ βδγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ τμήματος γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ γαδ, κατὰ τὴν λβ'. τοῦ γ'. κοινῆς δὲ προστιθεμένης τῆς ὑπὸ γδα, ἅπασα ἄρα ἡ ὑπὸ βδα, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ γδα, γαδ. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ γδα, γαδ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ βγδ, κατὰ τὴν λβ'. τοῦ α. ἄρα ἡ ὑπὸ βδα, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγδ, τῇ δὲ ὑπὸ βδα, ἴση ἐστὶν, ὡς δέδεικται, ἡ ὑπὸ αβδ, κατὰ τὴν ε. τοῦ α.

τοῦ α. ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβδ, ὥστε ἡ δβ, ἴση ἐστὶ τῇ δγ, καὶ τὴν ῥηθεῖσαν ϛ. ἀλλὰ τῇ δβ, ἴση ἐστὶν ἡ γα, ἄρα ἡ γδ, ἴση ἐστὶ τῇ γα, καὶ ἑπομένως αἱ ὑπὸ γδα, γαδ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ δύο ὁμοῦ τῆς μιᾶς ὑπὸ γαδ, διπλάσιαι. ταῖς δὲ ὑπὸ γδα, γαδ, ἴση ἐστὶ καὶ ὑπὸ βδα, καὶ ἡ ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ δβα, ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ, αδβ, πρὸς τῇ βάσει τοῦ τριγωνίου διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαδ. γέγραπται ἄρα τὸ αβδ, ἰσοσκελὲς τρίγωνον, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν τῆς λοιπῆς. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω δὲ ἐγγράψαι εἰς τὸν αβγδε, κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Κείσθω, κατὰ τὴν αὐτοπέραν, τὸ ζηθ, τρίγωνον ἰσοσκελὲς, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω, κατὰ τὴν β'. τοῦ παρόντος, εἰς τὸν αβγδε, κύκλον τὸ αγδ. ὥστε ἑκατέραν τῶν ὑπὸ αγδ, αδγ, διπλασίονα εἶναι τῆς ὑπὸ γαδ. καὶ τμηθήτω δίχα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αγδ, αδγ, διὰ τῶν γε, δβ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γβ, βα, αε, εδ, καὶ τὸ αβγδε, πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αγδ, αδγ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γαδ, καὶ δίχα τέτμηνται, αἱ γεγονυῖαι ἄρα πέντε γωνίαι, γαδ, αγε, εγδ, αδβ, βδγ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ κατὰ τὴν κϛ'. τοῦ γ'. ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, αἱ ἄρα αβ, βγ, γδ, δε, εα, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὴν κθ'. τοῦ γ'. τὸ ἄρα αβγδε, πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ δε, κοινῆς προσκειμένης τῆς βγδ, πάντως γε ὅλη ἡ αβγδ, περιφέρεια, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ βγδε. καὶ κατὰ τὴν κϛ'. ἄρα τοῦ γ'. καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, αἱ ὑπὸ αεδ, βαε, ἴσαι εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ αβγ, βγδ, γδε, ἴση ἐστὶν, ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ βαε, αεδ. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε. δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον. ἄρα εἰς τὸν αβγδε, κύκλον ἐγγέγραπται πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 4. Fig. 9.