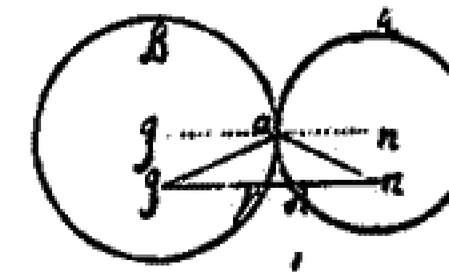
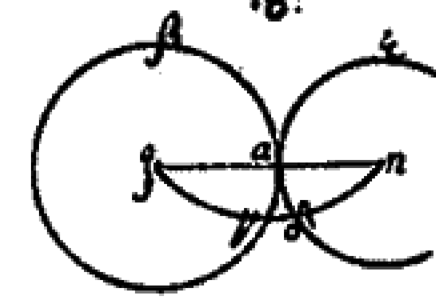
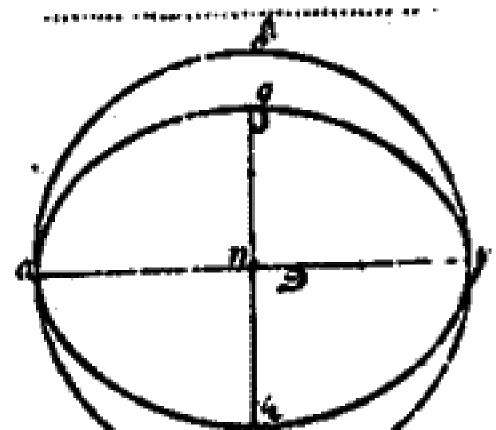
θεῖα διὰ τοῦ α, διελεύσεται. εἰ γὰρ δυνατὸν, διελθέτω ὡς ἡ ζγδη, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζα, ηα. καὶ ἐπεὶ τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ, κύκλου, ἡ ζα, πάντως ἴση ἐστὶ τῇ ζγ. ὡσαύτως καὶ ἡ ηα, ἴση ἐστὶ τῇ ηδ, ὥστε αἱ ζα, αη, ἴσαι εἰσι ταῖς ζγ, δη. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς γδ, ἔσται ἅπασα ἡ ζγδη, μείζων τῶν ζα, αη, ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τὴν κ΄. τοῦ α΄. ἢ καὶ οὕτω. Διελθέτω, εἰ δυνατὸν, ἡ ἀπὸ τοῦ η, ἐπὶ τὸ ζ, μὴ διὰ τοῦ α, ἀλλὰ διὰ τῶν γ, καὶ δ, ὡς ἡ ζγδη, ἐπὶ τοῦ β΄. σχήματος, ἥτις εὐθεῖα ὑποκείσθω. καὶ ἀπὸ τῶν ζ, η, κέντρων ἀχθήτωσαν αἱ ζα, αη. εἰ μὲν καὶ ἡ ζαη, εὐθεῖά ἐστιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ὑπόκειται καὶ ἡ ζγδη, πάντως γε δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἄτοπον. εἰ δὲ ἡ ζαη, οὐκ ἔστιν εὐθεῖα, τὸ ζαη, σχῆμα τρίγωνον ἔσται, οὗ βάσις ἡ ζγδη, πλευραὶ δὲ αἱ ζα, αη, καὶ δειχθήσεται ὡς ἀνωτέρω ἡ ζγδη, βάσις, μείζων τῶν ζα, αη, πλευρῶν, ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τὴν κ΄. τοῦ α΄. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα καὶ τὰ ἑξῆς.

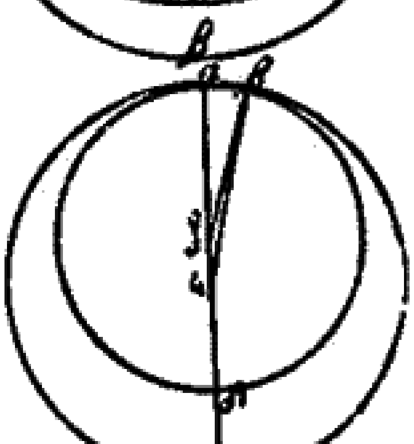
Eucl. Lib. 3. Fig. 14.



ιβ:





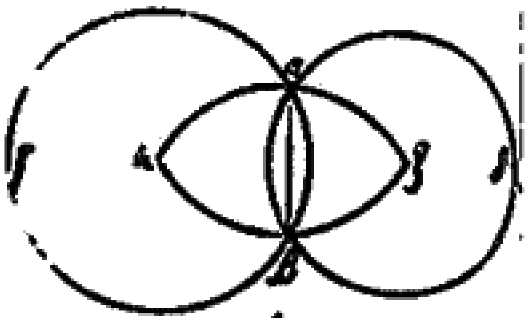


Πρότασις ΙΓ΄. Θεώρημα.

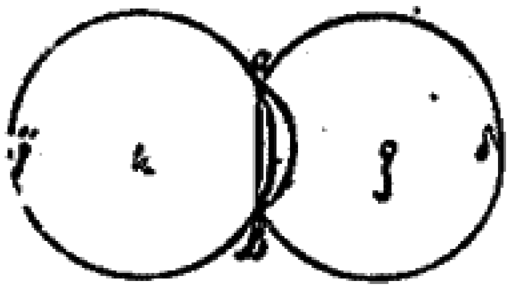
Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ καθ᾽ ἕν, ἐάν τε ἐντὸς, ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

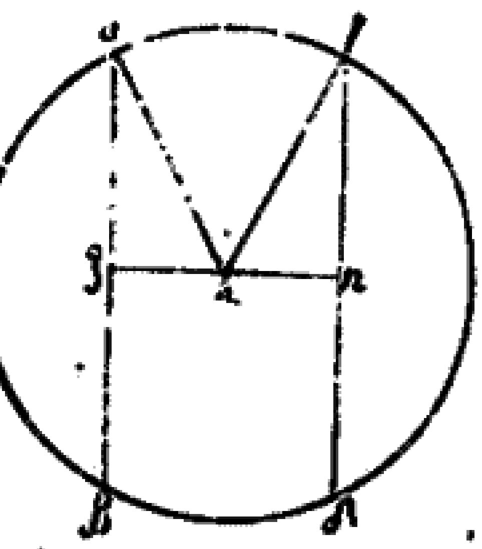
Κύκλος γὰρ ὁ αβγδ, οὗ κέντρον τὸ η, ἀπτέσθω, εἰ δυνατὸν, τοῦ αεγζ, κύκλου, οὗ κέντρον τὸ θ, ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἕν, τὰ α, γ. ἡ διὰ τῶν ηθ, ἄρα διερχομένη, ἐπὶ τὰς ἐπαφὰς πεσεῖται τῶν κύκλων, κατὰ τὴν ια΄. τοῦ παρόντος, ὡς ἡ αγ, καὶ ἐπεὶ τὸ η, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγδ, κύκλου, πάντως γε ἡ ηα, ἴση ἐστὶ τῇ ηγ, ἡ δὲ ηγ, μείζων ἐστὶ τῆς θγ. ἄρα καὶ ἡ αη, μείζων ἐστὶ τῆς θγ, ἡ δὲ αθ, πολλῷ μείζων τῆς αὐτῆς θγ. Ἐπεὶ δ᾽ αὖθις τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αεγζ, κύκλου, πάντως γε ἡ θα, ἴση ἐστὶ τῇ γθ. δέδεικται δὲ καὶ πολλῷ μείζων ταύτης, ὅπερ ἄτοπον. Εἰ δέ τις εἴποι τὰ τῶν ἀφῶν σημεῖα ἐγγὺς ἀλλήλων εἶναι, καὶ μὴ κατὰ διάμετρον. ἀπτέσθω οὕτως ὁ αβγ, τοῦ αβδ, κατὰ τὰ α, καὶ β. καὶ τοῦ μὲν αβγ, ἔστω κέντρον τὸ ε, τοῦ δὲ αβδ, τὸ ζ. πάντως γε ἡ διὰ τῶν ε, ζ, διαβαίνουσα, ἐπὶ μίαν τῶν ἀφῶν, εἰ μὴ καὶ ἐπὶ τῶν δύο, πεσεῖται, κατὰ τὴν ια΄. τοῦ παρόντος. πιπτέτω δὴ ἐπὶ τὸ α, ὡς ἡ αγ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βζ, βε. ἄρα αἱ εζ, ζβ, μείζους εἰσὶ τῆς εβ, κατὰ τὴν κ΄. τοῦ α΄. ἤτοι τῆς αε, ἴση γὰρ ἡ αε, τῇ εβ. κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς εζ, ἐναπολειφθήσεται ἡ ζβ, μείζων τῆς ζα, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ γὰρ ζα, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, ὅτι τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβδ, κύκλου.

Eucl. Lib. 3. Fig. 15.



ιϛ΄.





Ἀπτέσθω ἔτι ὁ αβδ, κύκλος, οὗ κέντρον τὸ ζ, τοῦ αβγ, οὗ κέντρον τὸ ε, ἐκτὸς κατὰ τὰ α, καὶ β. κατὰ τὴν ιβ΄. ἄρα τοῦ παρόντος ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἁφῆς διελεύσεται. Διελθέτω οὖν διὰ μὲν τοῦ α, ὡς ἐπὶ τοῦ α΄. σχήματος, ἡ εαζ, διὰ δὲ τοῦ β, ἡ εβζ, δύο ἄρα εὐθεῖαι εαζ, εβζ, χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὸ ιβ΄. ἀξίωμα, οὐ καὶ οὕτως. Ἐπεὶ ἐφ' ἑκατέρου τῶν κύκλων εἴληπται δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπιζευγνυμένη ἐπ' αὐτὰ εὐθεῖα, ἡ ἐντὸς πεσεῖται ἑκατέρου τῶν κύκλων, ὡς ἡ αβ, ἐπὶ τοῦ α΄. σχήματος, ἢ τοῦ μὲν ἐντός, τοῦ δὲ ἐκτός, ὡς ἐπὶ τοῦ β΄. σχήματος. ἀλλὰ καθ' ἑκάτερον ἀδύνατον. εἰ γὰρ ἐντὸς ἑκατέρου τέμνουσιν οἱ κύκλοι ἀλλήλους, καὶ οὐχ ἅπτονται. εἰ δὲ τοῦ μὲν ἐντὸς τοῦ δὲ ἐκτός, ὡς μὲν ἀληθές, ὡς δὲ ψευδὲς ἔσται ἡ β΄. τοῦ παρόντος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἕν, κύκλος κύκλου ἐφάπτεται. δέδεικται δὲ μηδὲ ἐντός. Κύκλος ἄρα κύκλου οὐκ ἐφάπτεται καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΔ΄. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβδγ, οὗ κέντρον τὸ ε, ἔστωσαν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ αβ, γδ. Λέγω ταύτας ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου. Πιπτέτωσαν γὰρ ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀπὸ τοῦ ε, αἱ εζ, εη, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αε, εγ. κατὰ τὴν γ΄. ἄρα τοῦ παρόντος αἱ αβ, γδ, δίχα τέμνονται ὑπὸ τῶν εζ, εη, ὥστε ἡ αβ, διπλασία ἐστὶ τῆς αζ, καὶ ἡ γδ, τῆς γη. ἀλλ' αἱ αβ, γδ, ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ αἱ αζ, γη, ὁμοίως ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ ζ΄. ἀξίωμα. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς αζ, ἰσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς γη, ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αε, ἰσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς γε. ἴση γὰρ ἡ αε, τῇ εγ, κατὰ τὸν ιε΄. ὅρον τοῦ α΄. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αε, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αζ, ζε, κατὰ τὴν μζ΄. τοῦ αὐτοῦ. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εγ, τὰ ἀπὸ τῶν γη, ηε, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν αζ, ζε, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γη, ηε. ἀφαιρουμένων οὖν τῶν ἀπὸ τῶν αζ, γη, ἴσων, ἐγκαταλείπονται ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ζε, ηε, ὥστε

καὶ ἡ

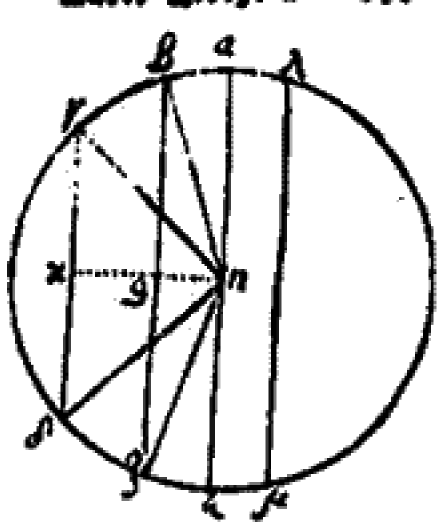
καὶ ἡ ζε ἴση ἐστὶ τῇ ηε, ἀλλ' αἱ ζε, ηε, κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τῶν αβ, γδ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου· αἱ αβ, ἄρα γδ, ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, κατὰ τὸν δ'. ὅρον τοῦ παρόντος. Ἀλλὰ δὴ ἀπεχέτωσαν αἱ αβ, γδ, ἴσον ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου, λέγω ταύτας ἴσας εἶναι. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, δειχθήσεται, ὡς καὶ ἀνωτέρω, ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, δίχα τέμνεσθαι παρὰ τῶν εζ, εη, κατὰ τὴν γ'. τοῦ παρόντος· καὶ ἑπομένως τὴν μὲν αβ, συναχθήσεται διπλασίαν εἶναι τῆς αζ, τὴν δὲ γδ, τῆς γη. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γε, διὰ τὸ ἴσας εἶναι ἀλλήλαις τὰς αε, γε, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αη, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αζ, ζε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γε, τὰ ἀπὸ τῶν γη, ηε· δειχθήσεται πάντως καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αζ, ζε, ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν γη, ηε· ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν ζε, ηε, ἴσων, ἐγκαταλειφθήσεται τὰ ἀπὸ τῶν αζ, γη, ἴσα, καὶ ἑπομένως αἱ αζ, γη, ὁμοίως ἴσαι. ὥστε καὶ αἱ τούτων διπλάσιαι, αἱ αβ, γδ, ἴσαι ἔσονται κατὰ τὸ ς'. ἀξίωμα. Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΕ΄. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγδ, οὗ κέντρον τὸ η, ἔστω διάμετρος μὲν ἡ αε, ἔγγιον δὲ ταύτης ἡ βζ, ἀπώτερον δὲ ἡ γδ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν αε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ δὲ βζ, μείζων τῆς γδ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ηβ, ἴση ἐστὶ τῇ ηα, καὶ ἡ ζη, τῇ ηε, κατὰ τὸν ιέ, ὅρον τοῦ α. πάντως γε αἱ βη, ηζ, ἴσαι εἰσὶ τῇ αε, αἱ δὲ βη, ηζ, μείζονές εἰσι τῆς βζ, κατὰ τὴν κ'. τοῦ α. καὶ ἡ αε, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς βζ. Αὖθις ἐπεὶ αἱ βη, ηζ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς γη, ηδ, ὡς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κέντρου, ἡ δὲ ὑπὸ βηζ, γωνία, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γηδ, καὶ βάσις ἄρα ἡ βζ, μείζων ἐστὶ τῆς γδ, βάσεως, κατὰ τὴν κδ'. τοῦ α. ὁμοίως δὴ δείξομεν. κἂν ἄλλη τις εὐθεῖα ἀπώτερον ᾖ τῆς γδ, ἐλάττονα εἶναι τῆς αὐτῆς γδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib.3. Fig.16.

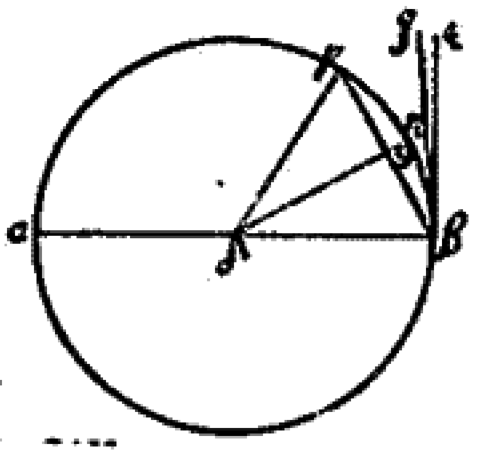


ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ἐφ' ἑκάτερα τῆς αε, δύο μόνας ἴσας συνίστασθαι εὐθείας, εἰ γὰρ μὴ, ἔσονται αἱ ἀπώτερον τῆς ἔγγιον ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον.

Πρότασις Ις'. Θεώρημα.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων. *Eucl. Lib. 3. Fig. 17.*



Ἐπὶ τῆς αβ, ἤδη διαμέτρου τοῦ αγβ, κύκλου, οὗ κέντρον τὸ δ, κάθετος ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἀγομένη ἡ βε, λέγω, ὅτι ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. εἰ γὰρ δυνατὸν πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ βγ. καὶ ἀχθήτω ἡ δγ, ἐπεὶ οὖν ἡ δβ, ἴση ἐστὶ τῇ δγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ δβγ, γωνία, τῇ ὑπὸ δγβ, κατὰ τὴν ε'. τοῦ α'. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δβγ, ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δγβ. αἱ δύο ἄρα γωνίαι τοῦ δγβ, τριγώνου δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὴν ιζ, τοῦ α'. Ὁμοίως δειχθήσεται μηδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας πίπτειν, ἐκτὸς ἄρα, ὡς ἡ βε. Λέγω ὅτι μεταξὺ τῆς βε, εὐθείας, καὶ βθγ, περιφερείας μὴ δυνατὸν εὐθεῖαν ἑτέραν ἐμπίπτειν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐμπιπτέτω, ὡς ἡ βζ, καὶ ἐπ' αὐτῆς ἤχθω κάθετος ἡ δη, ἡ γὰρ δβ, οὐκ ἐπ' αὐτῆς, ἀλλ' ἐπὶ τῆς βε, κάθετός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δηβ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ δβη, ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δβ, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς δη, κατὰ τὴν ιθ'. τοῦ α'. τῇ δὲ δβ, ἴση ἐστὶν ἡ δθ, κατὰ τὸν ιε'. ὅρον τοῦ α'. καὶ ἡ δθ, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς δη, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνατὸν ἐμπεσεῖν. Λέγω δὲ καὶ γ'. ὅτι ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς αβ, διαμέτρου, καὶ τῆς βθγ, κοίλης περιφερείας, ἁπάσης ὀξείας γωνίας μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς βε, εὐθείας, καὶ τῆς βθγ, κυρτῆς περιφερείας, ἐλάττων ἐστίν. εἰ γὰρ αὖ εἴη ἄλλη τις γωνία μείζων μὲν τῆς τοῦ ἡμικυκλίου, ἐλάττων δὲ τῆς λοιπῆς, ἐμπεσεῖται πάντως εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς βε, εὐθείας, καὶ βθγ, περιφερείας εὐθεῖά τις ἄλλη, ὡς ἡ βζ, ὅπερ τὸ ἀδύνατον εἶναι δέδεικται. πάσης ἄρα ὀξείας γωνίας μεγίστη μὲν ἡ τοῦ ἡμικυκλίου, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἡ τῇ διαμέτρῳ ἄρα τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς διὰ τοῦ κέντρου, ἅπτεται τοῦ κύκλου, εἰ γὰρ μὴ, ἐντὸς πεσεῖται, ὅπερ ἀδύνατον. καὶ τὸ ἔμπαλιν, ἡ ἐπτομένη τοῦ κύκλου, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ διαμέτρῳ.

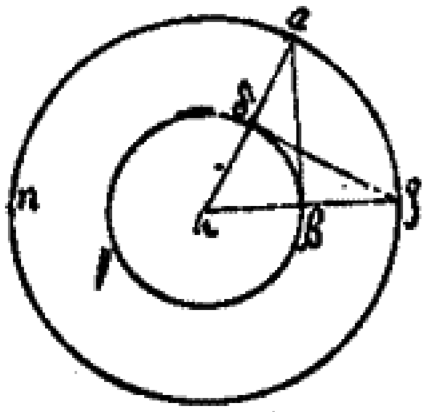
Πρό-

Πρότασις ΙΖ'. Πρόβλημα.

Α'πὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

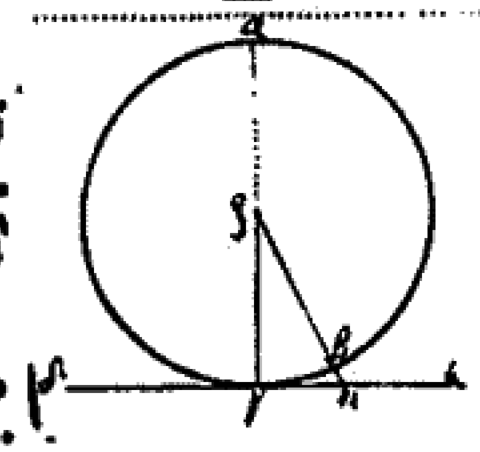
Α'πὸ τοῦ δοθέντος ἤδη σημείου τοῦ α, τοῦ δοθέντος β γ δ, κύκλου ἐφαπτομένην γραμμὴν δεῖ ἀγαγεῖν. Εἰλήφθω τοίνυν τὸ ε, κέντρον τοῦ β γ δ, κύκλου κατὰ τὴν α'. τοῦ παρόντος. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ α ε, τέμνουσα τὸν β γ δ, κύκλον κατὰ τὸ δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ ε α, κύκλος γραφήτω ὁ α ζ η, καὶ ἀπὸ τοῦ δ. κάθετος ἀχθήτω ἡ δ ζ, ἐπὶ τῆς ε δ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ε β ζ, καὶ ζ δ. καὶ ἐπεὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶν ἑκατέρου τῶν κύκλων, πάντως γε ἡ ε α, ἴση ἐστὶ τῇ ε ζ, ἡ δὲ ε δ, τῇ ε β. ὥστε αἱ α ε, ε β, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ζ ε, ε δ, περιέχουσι δὲ καὶ γωνίαν κοινὴν τὴν πρὸς τῷ ε, καὶ βάσις ἄρα ἡ α β, βάσει τῇ δ ζ, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὴν δ'. τοῦ α'. καὶ τὸ α ε β, τρίγωνον, ἴσον τῷ δ ε ζ, τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ α β ε, γωνία τῇ ὑπὸ ζ δ ε, ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ζ δ ε, ὀρθή ἐστιν, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α β ε. ἡ α β, ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς ε β, τῆς διὰ τοῦ κέντρου, ὥστε κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, ἅπτεται ἡ α β, τοῦ β γ δ, κύκλου. ὅπερ ἔδει τὸ προςαχθέν.

Eucl. Lib. 3. Fig. 18.



Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Ε'ὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἁπτομένην.



Κύκλου ἤδη τοῦ α β γ, οὗ κέντρον τὸ ζ, ἁπτέσθω ἡ δ ε, κατὰ τὸ γ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, κέντρου ἐπὶ τὸ γ, ἀχθήτω ἡ ζ γ. Λέγω ταύτην κάθετον εἶναι ἐπὶ τῆς δ ε. εἰ γὰρ μὴ, ἔσω ἡ ζ η, κάθετος ἐπὶ τῆς δ ε. ὥστε ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ζ η γ, ὀρθή ἐστι, πάντως γε ἡ ὑπὸ ζ γ η, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ κατὰ τὴν ιη'. τοῦ α'. ἡ ζ γ, μείζων ἐστὶ τῆς ζ η, ἀλλ' ἡ ζ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ζ β, κατὰ τὸν ιε', ὅρον, ἄρα καὶ ἡ ζ β, μείζων ἐστὶ τῆς ζ η, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄλλη τις ἔσαι κάθετος ἐπὶ τῆς δ ε, ἢ ἡ ζ γ. Ε'ὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηται καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

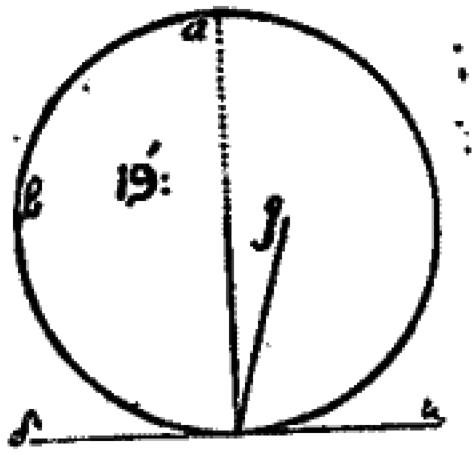
Ε'ὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσαι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου ἤδη τοῦ α β γ, ἁπτέσθω ἡ δ ε, κατὰ τὸ γ. καὶ ἀπὸ τοῦ γ, πρὸς ὀρθὰς

ἐπὶ

ἐπὶ τῆς δε, ἤχθω ἡ γα. Λέγω ἐπὶ τῆς γα, εἶναι τὸ κέντρον τοῦ αβγ, κύκλου. εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ ζ. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζγ, ἡ ζγ, ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς δε, ἔστι δὲ καὶ ἡ γα, ὁμοίως κάθετος ἐπὶ τῆς δε, κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα ἡ ὑπὸ ζγε, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγε, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς καὶ τὰ ἑξῆς.

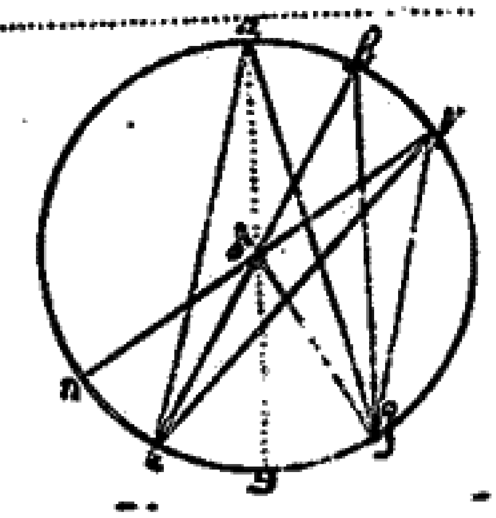
Eucl. Lib. 3. Fig. 19.



Πρότασις Κʹ. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγ, οὗ κέντρον τὸ δ, ἔστω γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ ἡ ὑπὸ εδζ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἡ ὑπὸ εαζ, ἑκατέρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βεβηκυῖα βάσεως, τῆς εθζ, περιφερείας. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ εδζ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εαζ. ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ αδ, καὶ ἤχθω ἐπὶ τὸ θ, καὶ ἐπεὶ αἱ δα, δε, ἴσαι εἰσίν, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, πάντως γε ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δαε, δεα, γωνίαι κατὰ τὴν εʹ. τοῦ αʹ. ταῖς δὲ ὑπὸ δαε, δεα, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδθ, κατὰ τὴν λβʹ. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ εδθ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δαε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ζδθ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δαζ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, ὅλης τῆς ὑπὸ εαζ, διπλασίων ἐστίν.



Ἔστω ἔτι ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας πλαγίως κειμένη ἡ ὑπὸ εβζ. Λέγω καὶ ταύτης τὴν ὑπὸ εδζ, διπλασίω εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ αἱ δβ, δζ, ἴσαι εἰσίν, ἴσαι πάντως εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δβζ, δζβ, γωνίαι κατὰ τὴν εʹ. τοῦ αʹ. ταῖς δὲ ὑπὸ δβζ, δζβ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδζ, κατὰ τὴν λβʹ. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, τῆς μιᾶς αὐτῶν, ἤτοι τῆς ὑπὸ δβζ, διπλασίων ἐστίν.

Ἔστω καὶ γʹ. πλαγιώτερον πρὸς τῇ περιφερείᾳ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἡ ὑπὸ εγζ. ὅτι δὲ καὶ ταύτης διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδζ, δῆλον. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ δγ, ἀγομένη ἐπὶ τὸ η. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ δγζ, δζγ, ἴσαι εἰσί, διὰ τὰ εἰρημένα, καὶ ταύταις ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηδζ, ἐκτός, πάντως γε τῆς μιᾶς, ἤτοι τῆς ὑπὸ δγζ, διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηδζ. ἀλλὰ καὶ τῆς ὑπὸ δγε, διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηδε, διὰ τὰ αὐτά. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, διπλασίων ἐστὶ λοιπῆς τῆς ὑπὸ εγζ. Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Αʹ. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐν κύκλῳ πᾶσαι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι

ἴσαι

ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, κατὰ τὸ ζ'. ἀξίωμα, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν.

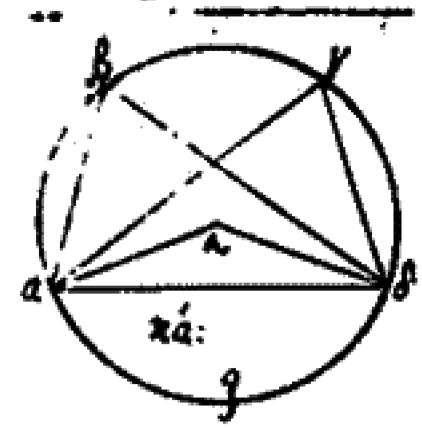
Β'. Ἔτι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου συνιστάμεναι γωνίαι ἐπὶ διπλασίων βεβήκασι περιφερειῶν, ἢ αἱ πρὸς τῷ κέντρῳ ἴσαι ταῖς πρὸς τῇ περιφερείᾳ συνισταμέναις.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ α β γ δ ζ, ἔστωσαν γωνίαι ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ α β γ δ, αἱ ὑπὸ α β δ, καὶ α γ δ. Λέγω ταύτας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β δ, α γ δ, τὴν αὐτὴν περιφέρειαν α ζ β, βάσιν ἔχουσι, πάντως γε καὶ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι καὶ τὰ ἑξῆς.

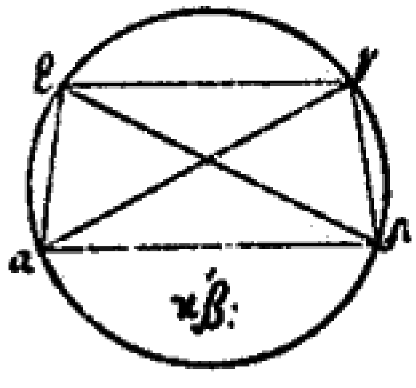
Eucl. Lib.3. Fig.19.

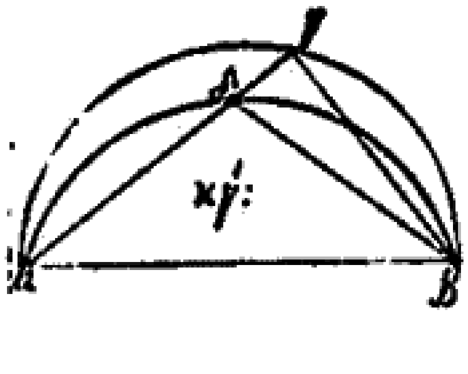


Πρότασις ΚΒ'. Θεώρημα.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ α β γ δ, ἔστω τετράπλευρον τὸ α β γ δ, Λέγω τὰς ἀπεναντίον γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ α γ, β δ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ γ α δ, τῇ ὑπὸ δ β γ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς κ'. τοῦ παρόντος, τὴν αὐτὴν γὰρ γ δ, περιφέρειαν βάσιν ἔχουσιν, ἡ δὲ ὑπὸ α β δ, ἴση ἐστὶ διὰ τὰ αὐτὰ τῇ ὑπὸ δ γ α, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ α β γ, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ δ α γ, δ γ α, κοινῆς δὲ προσκειμένης τῇ τε ὑπὸ α β γ, καὶ ταῖς ὑπὸ δ α γ, δ γ α, τῆς ὑπὸ α δ γ, ἔσονται πάντως αἱ ὑπὸ α β γ, α δ γ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ δ α γ, α γ δ, γ δ α, τρισὶ τοῦ α γ δ, τριγώνου γωνίαις. ἀλλ' αἱ τρεῖς τοῦ α γ δ, τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν λβ'. τοῦ α. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ α β γ, α δ γ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὁμοίως δὲ δείξομεν καὶ τὰς ὑπὸ β α δ, δ γ β, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις ἄρα τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον καὶ τ' ἑξ.





Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς α β, εὐθείας συνεστάθωσαν τὰ α γ β, α δ β, ὅμοια καὶ ἄνισα τμήματα κύκλων. καὶ τῆς α δ γ, ἠγμένης, ἐπιζεύχθωσαν αἱ δ β, γ β.

καὶ

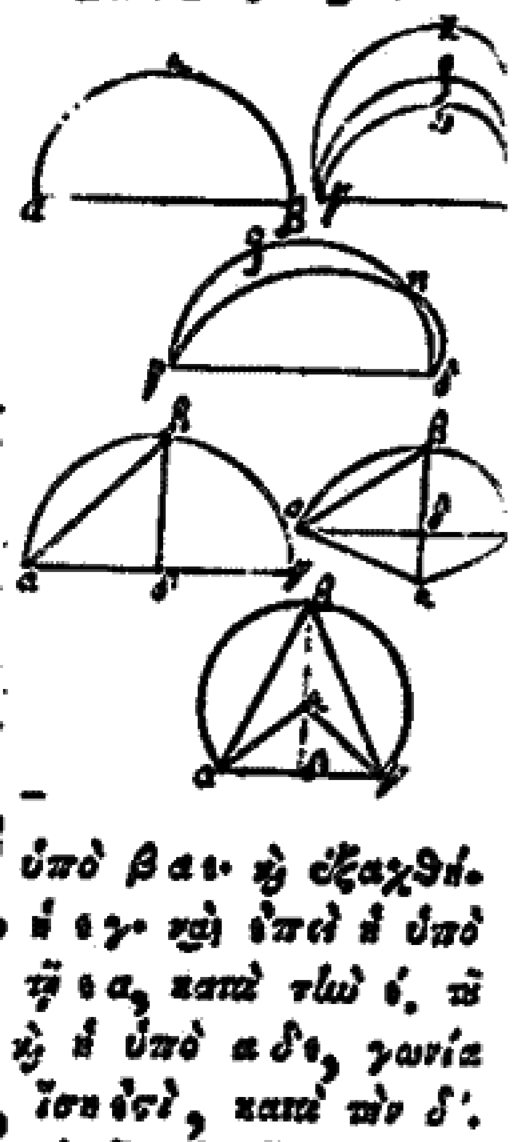
καὶ ἐπεὶ τὰ α δ β, α γ β, τμήματα, ὅμοιά εἰσι, πάντως γε ἴσας γωνίας δέχονται, κατὰ τὸν ι. ὅρον τοῦ παρόντος. ἄρα ἡ ὑπὸ α δ β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α γ β, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὴν λβ΄. τοῦ α. οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλου ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσονται.

Πρότασις ΚΔ΄. Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἐπὶ ἴσων ἤδη εὐθειῶν τῶν α β, γ δ, συνεστάθησαν ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ α ε β, γ ζ δ. λέγω ταῦτα ἴσα εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, ἐφαρμοζομένης τῆς α β, ἐπὶ τῆς γ δ, ἢ ἐκτὸς τοῦ γ ζ δ, πεσεῖται τὸ α ε β, τμῆμα, ὡς τὸ γ κ δ, ἢ ἐντὸς τούτου, ὡς τὸ γ θ δ· καὶ ἔσται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα ὅμοια καὶ ἄνισα, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἢ γοῦν μέρος μὲν τούτου ἐντὸς, μέρος δὲ ἐκτὸς πεσεῖται, ὡς τὸ γ κ δ, καὶ κύκλος κύκλον τεμεῖ κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὴν ι. τοῦ παρόντος. Τὰ ἐπὶ ἴσων ἄρα εὐθειῶν ὅμοια τμήματα καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib.3. Fig.21.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλου ἀφαιροῦσιν, ὁπωσδηποτοῦν ἐφαρμοζόμεναι.

Πρότασις ΚΕ΄. Θεώρημα.

Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

Ἔστω δὴ κύκλον προσαναγράψαι, δοθέντος τοῦ α β γ, τμήματος. Ἐπεζεύχθω ἡ α γ, καὶ τμηθείσης δίχα τῆς αὐτῆς α γ, κατὰ τὸ δ, ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἐπ' αὐτῆς ἡ δ β, κατὰ τὴν ια. τοῦ α. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α β. ἡ οὖν ὑπὸ δ β α, γωνία ἢ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ β α δ, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων. Ἔστω δὲ α. μείζων, καὶ γενέσθω ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ β α ε. καὶ ἐξεχθήτω ἡ β δ, συμπίπτουσα τῇ α ε, κατὰ τὸ ε. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε γ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ α β ε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β α ε, ἴση πάντως ἐστὶ καὶ ἡ β ε, τῇ ε α, κατὰ τὴν ϛ. τοῦ α. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ α δ, ἴση ἐστὶ τῇ δ γ, κοινὴ δὲ ἡ δ ε, καὶ ἡ ὑπὸ α δ ε, γωνία τῇ ὑπὸ γ δ ε, ἴση, καὶ βάσις ἄρα ἡ α ε, βάσει τῇ ε γ, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὴν δ΄. τοῦ α. ἴση δὲ τῇ α ε, ἐστὶ καὶ ἡ ε β, ἄρα ἡ ε γ, ἴση ἐστὶ καὶ τῇ ε β. ὥστε αἱ τρεῖς ε α, ε β, ε γ, ἴσαι εἰσί. κέντρῳ ἄρα τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ α, κύκλος γραφόμενος ἐλεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν β, καὶ γ, σημείων. καὶ δῆλον, ὅτι τὸ α β γ, ἔλαττον τμῆμά ἐστι κύκλου, διὰ τὸ ἐκτὸς εἶναι τὸ κέντρον.

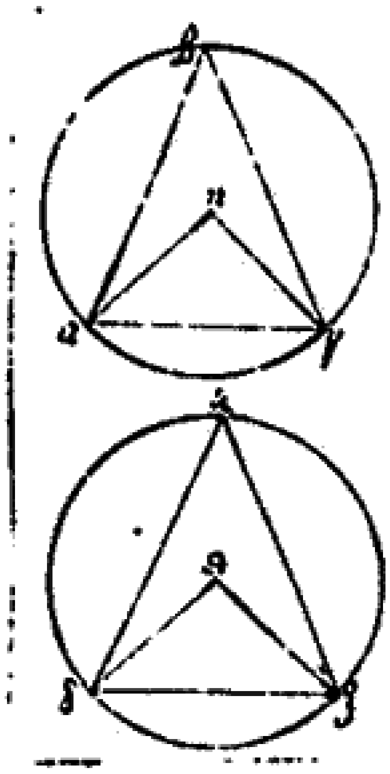
Ἔστω δὲ ἡ ὑπὸ δ β α, ἴση τῇ ὑπὸ β α δ, ἄρα καὶ ἡ α δ, ἴση ἐστὶ τῇ δ β, ἔστι δὲ

καὶ ἡ

καὶ ἡ δγ, ἴση τῇ αδ. αἱ τρεῖς ἄρα αδ, δβ, δγ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ α, προσαναγραφήσεται ὁ κύκλος. καὶ δῆλον, ὅτι τὸ αβγ, ἡμικύκλιόν ἐστιν, ὅτι ἐπὶ τῆς αγ, ἐστὶ τὸ κέντρον.

Ἔστω ἔτι ἡ ὑπὸ δβα, ἐλάττων τῆς ὑπὸ βαδ. γενέσθω ἡ ὑπὸ βαε, ἴση τῇ ὑπὸ εβα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ. αἱ τοίνυν αε, εβ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, διὰ τὸ ἴσας γωνίας ὑποτείνειν. ἔστι δὲ καὶ ἡ αε, τῇ εγ, ἴση κατὰ τὴν δ΄. τοῦ α. αἱ τρεῖς ἄρα αε, εβ, εγ, ἴσαι εἰσί. καὶ κέντρῳ τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εα, προσαναγράφεται ὁ κύκλος, καὶ τὸ αβγ, μεῖζον τμῆμα κύκλου ἐστὶ, διὰ τὸ ἐντὸς ἔχειν τὸ κέντρον. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Eucl. Lib. 3. Fig. 22.*

Πρότασις Κϛ΄. Θεώρημα.



Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν ἴσοις κύκλοις ἤδη τοῖς αβγ, δεζ, ἴσαι γωνίαι συνεστάθωσαν πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ αηγ, δθζ, πρὸς τῇ περιφερείᾳ δὲ αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ. Λέγω, ὅτι αἱ αγ, δζ, περιφέρειαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ οἱ αβγ, δεζ, κύκλοι ἴσοι εἰσὶν, ἴσαι πάντως γέ εἰσι καὶ αἱ αη, ηγ, ταῖς δθ, θζ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αηγ, δθζ, γωνίαι, ἴσαι. καὶ βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν αἱ πρὸς τῷ β, καὶ ε, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, πάντως γε τὰ αβγ, δεζ, τμήματα ὅμοιά ἐστι, κατὰ τὸν ι. ὅρον τοῦ παρόντος, εἰσὶ δὲ καὶ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν αγ, δζ, ἄρα καὶ ἴσα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς κδ΄. τοῦ αὐτοῦ. ἀλλὰ καὶ οἱ αβγ, δεζ, κύκλοι ἴσοι εἰσι, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἀφῄρηται τὰ αβγ, δεζ, τμήματα ἴσα, ἄρα καὶ τὰ αγ, δζ, τμήματα, ἴσα ἐστι, κατὰ τὸ γ. ἀξίωμα. δῆλον ἄρα, ὅτι ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε καὶ τὰ ἑξῆς.

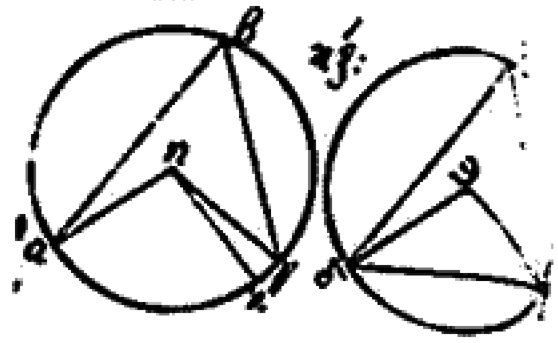
Πρότασις ΚΖ΄. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν ἴσοις ἤδη κύκλοις τοῖς αβγ, δεζ, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν αγ, δζ, βεβηκέτωσαν γωνίαι, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις, αἱ ὑπὸ αηγ, δθζ. πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ. Λέγω τὴν ὑπὸ αηγ, ἴσην εἶναι τῇ ὑπὸ δθζ.

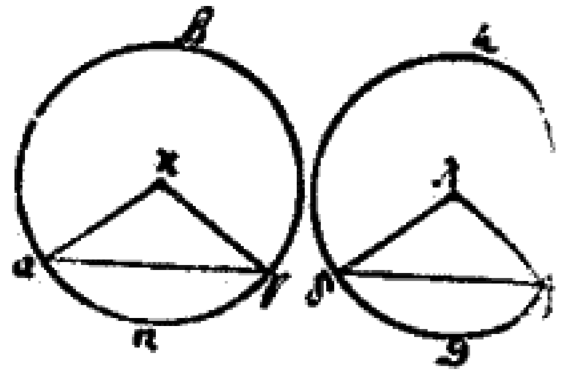
δθζ, καὶ τὴν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ. εἰ γὰρ μὴ, ἔσω ἡ ὑπὸ αηγ, μείζων, καὶ γενέσθω ἴση τῇ ὑπὸ δθζ, ἡ ὑπὸ αηκ. ἡ ακ, ἄρα περιφέρεια, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἴση ἐςὶ τῇ δζ, περιφερείᾳ. ἔςι δὲ τῇ δζ, ἴση καὶ ἡ αγ, ἄρα ἡ ακ, περιφέρεια, ἴση ἐςὶ τῇ αγ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐςὶν ἡ ὑπὸ αηγ, τῆς ὑπὸ δθζ, ἀλλ᾽ ἴση. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ αηγ, ἡμίσειά ἐςιν ἡ ὑπὸ αβγ, τῆς δὲ ὑπὸ δθζ, ἡ ὑπὸ δεζ. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib.3. Fig.23.



Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσιν.



Ἔςωσαν ἤδη κύκλοι ἴσοι οἱ αβγ, δεζ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ αγ, δζ, αἳ ἴσαι τεμνέτωσαν μείζους μὲν περιφερείας τὰς αβγ, δεζ, ἐλάττους δὲ τὰς αηγ, δθζ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν αβγ, ἴση ἐςὶ τῇ δεζ, ἡ δὲ αηγ, τῇ δθζ. εἰλήφθωσαν γὰρ ἀμφοτέρων τὰ κέντρα, διὰ τῆς α. τοῦ παρόντος, καὶ ἔςωσαν ταῦτα τὰ κ, λ. εἶτα ἐπεζεύχθωσαν αἱ κα, κγ, λδ, λζ. καὶ ἐπεὶ αἱ ακ, κγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δλ, λζ, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ἡ αγ, ὁμοίως ἴση τῇ δζ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ακγ, ἴση ἐςὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δλζ, κατὰ τὴν η. τοῦ α. εἰσὶ δὲ καὶ πρὸς τὰ κέντρα ἀμφότεραι, ἄρα κατὰ τὴν κϛ'. τοῦ παρόντος, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἴσαι ἄρα αἱ αηγ, δθζ, περιφέρειαι. ἀλλὰ καὶ οἱ κύκλοι εἰσὶν ἴσοι, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ αβγ, δεζ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὸ γ. ἀξίωμα. Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἐν ἴσοις ἤδη τοῖς αὐτοῖς κύκλοις ἔςωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ αηγ, δθζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, λέγω ταύτας ἴσας εἶναι. τῆς αὐτῆς γὰρ γενομένης κατασκευῆς, ἐπεὶ αἱ ακ, κγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δλ, λζ, ἔςι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ακγ, γωνία τῇ ὑπὸ δλζ, ἴση, κατὰ τὴν κϛ'. τοῦ παρόντος, πρὸς τοῖς κέντροις γὰρ ἀμφότεραι, καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν. ἄρα καὶ βάσις ἡ αγ, ἴση ἐςὶ τῇ δζ, κατὰ τὴν δ'. τοῦ α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

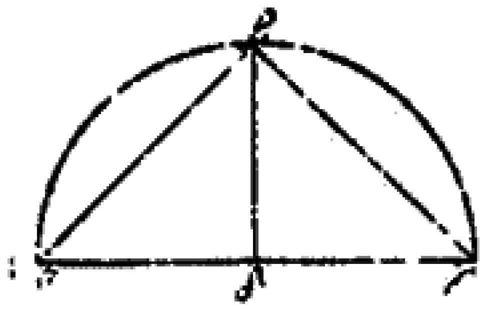
Πρό-

Πρότασις Λ΄. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Τὴν δοθεῖσαν ἤδη αβγ, περιφέρειαν δέον τεμεῖν δίχα. ἐπιζεύχθω γοῦν ἡ αγ, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ δ, διὰ τῆς ι. τοῦ α. καὶ ἐπ' αὐτῆς ἀνεστάθω κάθετος ἡ δβ, κατὰ τὴν ια. τοῦ αὐτοῦ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ. καὶ ἐπεὶ αἱ αδ, δγ, ἴσαι εἰσί, κοινῆς λαμβανομένης τῆς δβ, πάντως γε αἱ αδ, δβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς γδ, δβ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αδβ, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ γδβ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ βάσις ἡ αβ, βάσει τῇ βγ, ἴση ἐστί, κατὰ τὴν δ΄. τοῦ α. ἄρα κατὰ τὴν κη. τοῦ παρόντος ἡ αβ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ βγ, περιφερείᾳ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 3. Fig. 24.

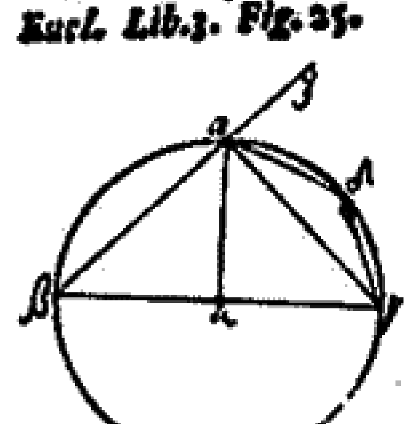


Πρότασις ΛΑ΄. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγ, ἔστω ἡμικύκλιον μὲν τὸ βαγ, μεῖζον δὲ τμῆμα, τὸ αβγ, καὶ ἔλαττον, τὸ αδγ. Ἔστω δὲ ἐν μὲν τῷ βαγ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, ἐν δὲ τῷ μείζονι τμήματι, ἡ ὑπὸ αβγ, καὶ ἐν τῷ ἐλάττονι, ἡ ὑπὸ αδγ, καὶ ἔτι τοῦ μὲν αβγ, μείζονος τμήματος γωνία ἔστω ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς αβγ, περιφερείας καὶ αγ, εὐθείας, τοῦ δὲ αδγ, ἐλάττονος ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς αδγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας. Λέγω δή, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ βαγ, ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, ἐλάττων ὀρθῆς, καὶ ἡ ὑπὸ αδγ, μείζων ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν ὑπὸ τῆς αβγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας περιεχομένη, μείζων ὀρθῆς, ἡ δὲ ὑπὸ τῆς αδγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας ἐλάττων ὀρθῆς. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ αε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ βα, ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ αἱ βε, εα, ἴσαι εἰσίν, ἴση πάντως ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ βαε, κατὰ τὴν ε. τοῦ α. διὰ τὰ αὐτὰ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αγε, τῇ ὑπὸ γαε, ὥστε ὅλη ἡ ὑπὸ βαγ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, αγβ, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζαγ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, αγβ, κατὰ τὴν λβ΄. τοῦ α. ἄρα αἱ ὑπὸ βαγ, ζαγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα, κατὰ τὸν ι. ὅρον τοῦ α. ἡ ὑπὸ βαγ, ἄρα ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὅπερ ἦν τὸ α. Ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, ἐλάττων οὖσα τῆς ὑπὸ βαγ, ἐλάττων πάντως γε ἐστὶν ὀρθῆς, ὅπερ ἦν τὸ β΄. Ἐπεὶ δὲ τοῦ αβγδ, ἐν

Eucl. Lib. 3. Fig. 25.



ἐν κύκλῳ τετραπλεύρου αἱ ὑπὸ α β γ, α δ γ, ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσι, κατὰ τὴν κβ΄. τοῦ παρόντος, ἡ δὲ ὑπὸ α β γ, ἐλάττων ὀρθῆς δέδεικται, πάντως γε ἡ ὑπὸ α δ γ, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ὅπερ ἐστὶ τὸ γ΄. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν β α, α γ, περιεχομένη γωνία δέδεικται ὀρθὴ· δῆλον, ὅτι ἡ ὑπό τε τῆς α β γ, περιφερείας καὶ α γ, εὐθείας περιεχομένη, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὅπερ ἐστὶ τὸ δ΄. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ὑπὸ ζ α γ, ὀρθή ἐστιν, πάντως γε ἡ ὑπό τε τῆς α δ γ, περιφερείας, καὶ α γ, εὐθείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ὅπερ ἦν τὸ ε΄.

Δυνατὸν δὲ καὶ ἄλλως δεῖξαι τὴν ὑπὸ β α γ, ὀρθήν. Ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὴν λβ΄. τοῦ α΄. ἡ μὲν ὑπὸ α ε β, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ γ α ε, ἡ δὲ ὑπὸ α ε γ, τῆς ὑπὸ β α ε· δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ α ε β, α ε γ, διπλάσιαί εἰσι τῆς ὅλης ὑπὸ β α γ· ἀλλ' αἱ ὑπὸ α ε β, α ε γ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσι, κατὰ τὴν ιγ΄. τοῦ α΄. ἡ ὑπὸ β α γ, ἄρα ὀρθή ἐστιν. Ἐν κύκλῳ ἄρα, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία, καὶ τὰ ἑξῆς.

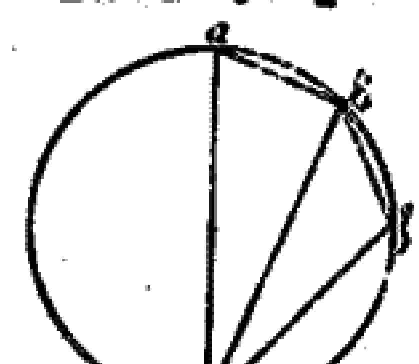
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία τῶν γωνιῶν ταῖς λοιπαῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν. ὅτι καὶ ἡ ἐφ' ἑξῆς ἐκείνης ταῖς δυσὶν ἴση ἐστί.

Πρότασις ΛΒ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ α β γ, ἁπτέσθω ἡ δ ε, εὐθεῖα, κατὰ τὸ γ· ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἐπὶ τὸν κύκλον ἀχθήτω εὐθεῖα ἡ γ β, ποιοῦσα γωνίας μετὰ τῆς δ ε, τὰς ὑπὸ β γ ε, β γ δ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ β γ ε, ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ β α γ, τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ β γ δ, τῇ ἐν τῷ β ζ γ, ὁμοίως ἐναλλὰξ τμήματι. Συνεστάθω γὰρ ἐπὶ τῆς δ ε, κατὰ τὸ γ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γ α, κατὰ τὴν ια΄. τοῦ α΄. καὶ ληφθέντος ὡς ἔτυχε τοῦ ζ, σημείου, ἐπεζεύχθωσαν αἱ α β, β ζ, ζ γ. καὶ ἐπεὶ ἡ δ ε, ἅπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς κάθετος συνίσταται ἐπ' αὐτῆς ἡ α γ, πάντως γε κατὰ τὴν ιθ΄. τοῦ παρόντος ἐπὶ τῆς α γ, ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ



Eucl. Lib. 3. Fig. 26.

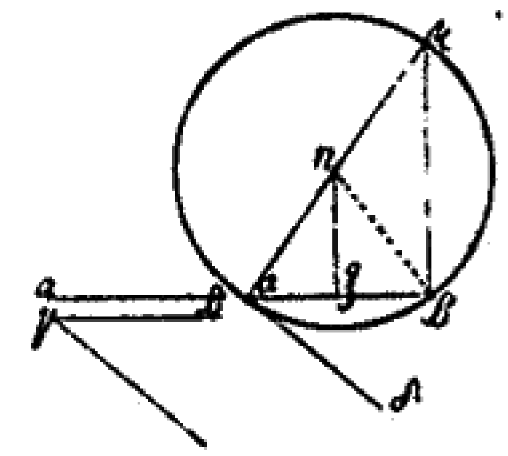
α β ζ γ, ἄρα ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ α β γ, γωνία ὀρθή, κατὰ τὴν πρότερον. ὥστε καὶ αἱ λοιπαὶ δύο τοῦ α β γ, τριγώνου γωνίαι, αἱ ὑπὸ β α γ, β γ α, μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσι, κατὰ τὴν λβ΄. τοῦ α΄. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ α γ ε, ὀρθή ἐστιν, αἱ ἄρα ὑπὸ β α γ, β γ α, ἴσαι εἰσι τῇ ὑπὸ α γ ε, κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ β γ α, ἐγκαταλείπεται πάντως ἡ ὑπὸ β γ ε, ἴση τῇ ὑπὸ β α γ· ὅπερ ἦν τὸ α΄. Αὖθις ἐπεὶ τοῦ α β ζ γ, τετραπλεύρου αἱ ὑπὸ β α γ, β ζ γ, ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσι, κατὰ τὴν κβ΄. τοῦ παρόντος, πς, εἰσὶ δὲ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ αἱ ὑπὸ βγε, βγδ, κατὰ τὴν ιγ'. τοῦ α'. πάντως γε αἱ ὑπὸ βαγ, βζγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ βγε, βγδ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγε, ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ βαγ, ἐγκαταλείπεται ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση τῇ ὑπὸ βζγ. ὅπερ ἔδει τὸ β'. Ἐὰν κύκλου ἄρα ἅπτηταί τις εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἐπὶ τῆς αβ, ἤδη δοθείσης εὐθείας ἔστω γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ. Ἀλλ' ἐπεὶ τὰ εἴδη τῶν γωνιῶν τρία, ἡ γὰρ ὀξεῖά ἐστιν, ἢ ὀρθὴ, ἢ ἀμβλεῖα. Ἔστω α. ἡ δοθεῖσα ὀξεῖα, καὶ ταύτῃ γενέσθω ἴση ἡ ὑπὸ βαδ, κατὰ τὴν κγ'. τοῦ α. καὶ ἐπὶ τῆς αδ, ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἡ αε, διὰ τῆς ια. τοῦ αὐτοῦ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ αβ, κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἤχθω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ ζη. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ηβ. Ἐπεὶ οὖν ἡ αζ. ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, κοινὴ δὲ ἡ ζη, καὶ ἡ ὑπὸ αζη, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ βζη, πάντως γε, κατὰ τὴν δ'. τοῦ α. καὶ ἡ αη, ἴση ἐστὶ τῇ ηβ. ὥστε κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηα, κύκλος γραφόμενος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β. ἔστω δὴ οὗτος ὁ αβε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εβ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ αε, διαμέτρῳ πρὸς τῷ α, αὐτῆς ἄκρῳ, δῆλον, ὅτι ἐφάπτεται τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ις'. ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς α, διήχθη ἡ αβ, εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ γωνίαν ποιοῦσα μετὰ τῆς αδ, τὴν ὑπὸ βαδ. ἄρα ἡ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αεβ, ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, δοθεῖσα, ἄρα ἡ ὑπὸ αεβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ, δοθείσῃ. Ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα γέγραπται τὸ αεβ, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ.

Eucl. Lib.3. Fig.37.

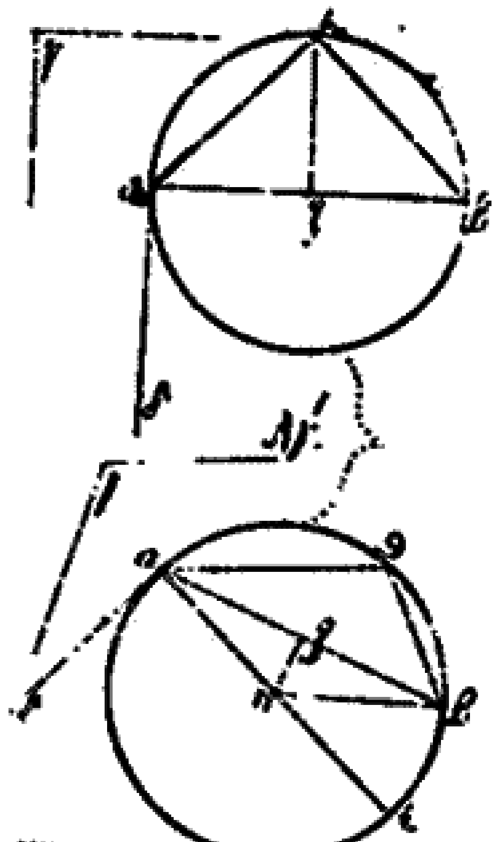


Ἔστω δὲ ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία ὀρθή. καὶ γενέσθω ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ δαβ, κατὰ τὴν κγ'. τοῦ α. καὶ τῆς αβ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ ζ. κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, γραφήτω κύκλος ὁ αβε. τῆς δὲ ζε, καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τῆς αβ, ἐπιζεύχθωσαν αἱ αε, εβ. καὶ ἐπεὶ ἡ δα, κάθετός ἐστι ἐπὶ τῆς αβ, ἅπτεται πάντως τοῦ κύκλου, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ις'. τοῦ παρόντος. ὥστε ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αεβ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἢ κατὰ τὴν λα'. τοῦ παρόντος. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δαβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αεβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. δῆλον ἄρα, ὅτι ἐπὶ τῆς αβ, γέγραπται τὸ αεβ, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ'.

Ἔστω

Ἔστω πλάτιον ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία ἀμβλεῖα, καὶ γενέσθω ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ δ α β, ὡς προειρημένον. τῆς δὲ κατασκευῆς γενομένης, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς α. καταγραφῆς, ἐπεὶ ἡ α β, δίχα τέτμηται, πάντως γε αἱ α ζ, ζ η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς β ζ, ζ η, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α ζ η, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ β ζ η, ἄρα καὶ βάσις ἡ α η, βάσει τῇ β η, ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ η α, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β, ὡς ὁ α β ε. Εἰλήφθω δὲ τυχὸν σημεῖον τὸ θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α θ, θ β. καὶ ἐπεὶ ἡ δ α, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς α ε, ἅπτεται πάντως τοῦ κύκλου, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ις΄. τοῦ παρόντος. καὶ δὲ τῇ λοιπῇ, ἡ ὑπὸ δ α β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ α θ β. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ δ α β, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῷ γ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α θ β, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. ἐπὶ τῆς α β, ἄρα γέγραπται τὸ α θ β, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

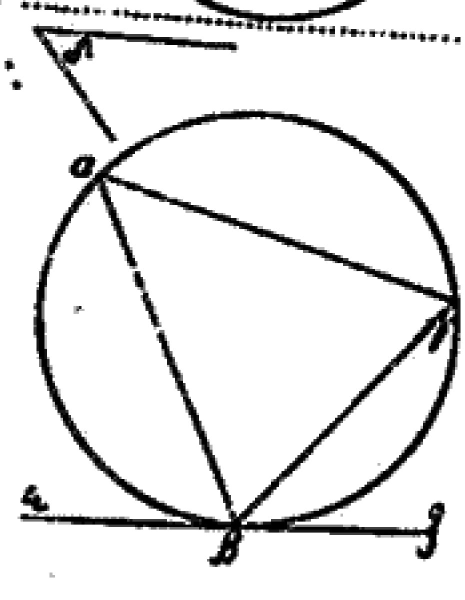
Eucl. Lib. 3. Fig. 28.



Πρότασις ΛΔ΄. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω δὲ ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ α β γ, κύκλου τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ δ, δοθείσῃ. Ἀπὸ τοῦ ζ, τινὸς τυχόντος σημείου ἤχθω ἁπτομένη τοῦ α β γ, κύκλου κατὰ τὸ β, ἡ ζ ε, διὰ τῆς ιζ΄. τοῦ παρόντος, καὶ κατὰ τὸ β, σημεῖον πρὸς τῇ ε ζ, εὐθείᾳ γενέσθω ἴση τῇ πρὸς τῷ δ, γωνίᾳ ἡ ὑπὸ ζ β γ, διὰ τῆς κγ΄. τοῦ α. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ β α, α γ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ε ζ, ἅπτεται τοῦ κύκλου, πάντως γε ἡ ὑπὸ ζ β γ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β α γ, ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ζ β γ, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῷ δ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ β α γ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ. τέτμηται ἄρα τὸ β α γ, τμῆμα, ὡς ἐζητεῖτο, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρότασις ΛΕ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ α β γ δ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ α γ, β δ, κατὰ τὸ ε. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β ε, ε δ, ὀρθογωνίῳ.

εἰ μὲν