ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ
ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Α'. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν.

Εἴρηται ἐν τοῖς ἔμπροσθεν, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα εἰς δύο διαιρεῖται εἴδη τὰ καθολικώτερα, εἰς ὀρθογώνια καὶ μὴ ὀρθογώνια. καὶ τούτων αὖθις ἑκάτερον ὑποδιαιρεῖται εἰς ἰσόπλευρα καὶ ἀνισόπλευρα. καὶ τῶν μὲν ὀρθογωνίων, ὅσα εἰσὶν ἰσόπλευρα, καλεῖται τετράγωνα, ὅσα δὲ ἀνισόπλευρα, λέγονται ἰδίως παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια, καὶ ἔχουσι τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας, ὡς δέδεικται, προτάσει λδ', τοῦ α'. τῶν δὲ μὴ ὀρθογωνίων, ὅσα εἰσὶν ἰσόπλευρα, καλοῦνται ῥόμβοι, ὅσα δὲ ἀνισόπλευρα ῥομβοειδῆ. Ἐνταῦθα ἤδη ὁ λόγος περὶ τῶν ὀρθογωνίων, ἰσοπλεύρων τε καὶ ἀνισοπλεύρων, τετραγώνων φημὶ καὶ ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων. ἐπεὶ δὲ τῇ μὲν τοῦ τετραγώνου προσηγορίᾳ, οὐ περικλείεται καὶ τὰ παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια, τῇ δὲ τῶν παραλληλογράμμων ὀρθογωνίων συμπεριλαμβάνεται καὶ τὰ τετράγωνα. τούτου χάριν περὶ μόνων τῶν παραλληλογράμμων ὀρθογωνίων εἰπών, καὶ περὶ τῶν τετραγώνων ἡρμήνευσε. Τὸ μὲν παραλληλόγραμμον γενικῆς χώραν ἐπέχει, τὸ δὲ ὀρθογώνιον καὶ τὰ λοιπὰ διαφορῶν. ἔφη δὲ, ὅτι ἐκ δύο πλευρῶν λέγεται περιέχεσθαι, ἐπεὶ πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν, τῶν μίαν τῶν αὐτοῦ περιεχουσῶν γωνιῶν, συμπληροῦται. μᾶλλον δὲ, ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὡς προείρηται. ὅθεν ἐπεὶ τοῦ τετραγώνου πᾶσαι αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν λ'. ὅρον, οὐκ ἄλογον, ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς περιέχεσθαι λέγεσθαι. τῶν γὰρ δύο αὐτοῦ πλευρῶν πρὸς ἀλλήλας πολλαπλασιαζομένων, τὸ αὐτὸ γεννήσεται, ὅπερ καὶ τῆς μιᾶς πρὸς ἑαυτὴν πολλαπλασιαζομένης γίνεται. διὸ δὴ τοῖς μὲν παραλληλογράμμοις ἡ, ὑπὸ, προστίθεται πρόθεσις ὥστε, τὸ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιέχεται. τοῖς δὲ τετραγώνοις ἡ, ἀπὸ, οἷον τὸ τετράγωνον ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς περιέχεται.

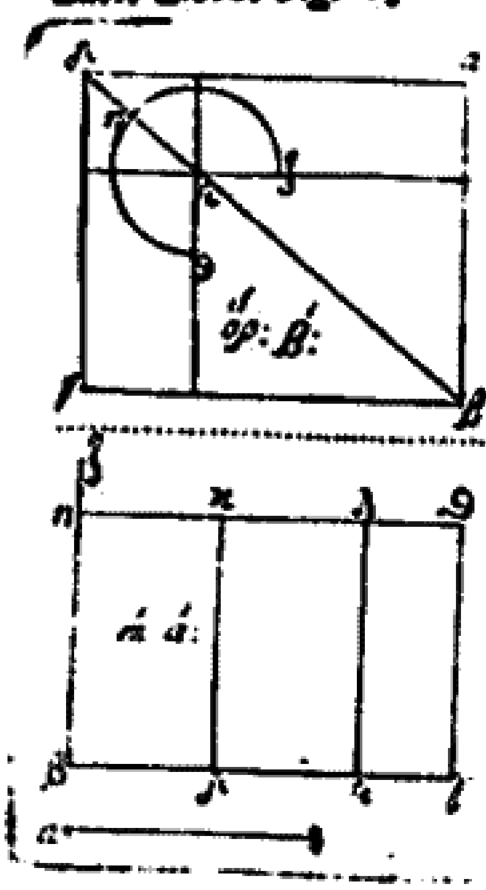
Β'. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἓν παραλληλόγραμμον ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμων καλείσθω.

Τίνα μὲν τῶν τετραπλεύρων σχημάτων παραλληλόγραμμα ἤκουσεν, εἴρηται ἀνωτέρω, κἀν τοῖς ἔμπροσθεν ἔτι τοῦτο σεσημείωται. Διάμετρος δὲ παραλληλογράμμου

λέγε-

λέγεται εὐθεῖά τις, ἡ τὰς δύο ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίας τέμνουσα, ἥτις καὶ διάμετρος διαγώνιος προσαγορεύεται, καὶ δίχα τὸ παραλληλόγραμμον τέμνει, καὶ τὴν λδ΄, τοῦ ά. Ὅταν οὖν ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ὑφ᾽ ὧν περιέχεται τὸ παραλληλόγραμμον δύο ἐντὸς εὐθεῖαι παράλληλοι ἀχθῶσιν, ἔχουσαι κοινὴν τομὴν μετὰ τῆς διαμέτρου, τῶν τεττάρων γενομένων παραλληλογράμμων τὰ μὲν δύο, τὰ ὑπὸ τῆς διαμέτρου τεμνόμενα, παραλληλόγραμμα περὶ τὴν διάμετρον ὀνομάζεται. τὰ δὲ λοιπὰ παραπληρώματα. Ληφθέντος τοίνυν ἑνὸς τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων, καὶ τῶν δύο παραπληρωμάτων ἐπὶ παντὸς παραλληλογράμμου, τὰ τρία ὁμοῦ Γνώμων καλεῖται. φέρει γάρ σοι τὸ σχῆμα, ὅπερ, καὶ τὸ παρὰ τοῖς μαθηματικοῖς ὄργανον, τὸ καλούμενον γνώμων, ὡς ἐπὶ τοῦ δε τοῦ σχήματος καθορᾶται. ἐν ᾧ διάμετρος μὲν ἐστὶν ἡ βδ, εὐθεῖα, παραλληλόγραμμα δὲ περὶ τὴν διάμετρον τὰ βε, εδ, καὶ παραπληρώματα τὰ αε, εγ. τὸ δὲ ζηθ, ὅλον σχῆμα, Γνώμων καλεῖται.

Eucl. Lib. 2. Fig. 1.



Πρότασις Α΄. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου, καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ α, βγ, καὶ τμηθείτω ἡ βγ, κατὰ τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα· Λέγω δή, τὸ ὑπὸ τῶν α, βγ, εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τοῖς ὑπό τε τῆς α, ἀτμήτου εὐθείας, καὶ τῶν βδ, δε, εγ, τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. Ἀνεστάθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, σημείου πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βγ, ἡ βζ. διὰ τῆς ιά, τοῦ ά. ἀπὸ δὲ τῆς βζ, ἀφῃρήσθω ἡ βη, ἴση τῇ α, διὰ τῆς γ΄. τοῦ αὐτοῦ. καὶ τῇ μὲν βγ, ἤχθω παράλληλος ἡ ηθ, τῇ δὲ βη, αἱ δκ, ελ, γθ, διὰ τῆς λά, τοῦ αὐτοῦ. καὶ ἐπεὶ τὸ ηγ, σύγκειται ἐκ μερῶν τῶν βκ, δλ, εθ, ὀρθογωνίων. πάντως γε κατὰ τὸ ιδ΄. ἀξίωμα, ἰσόν ἐστι τοῖς βκ, δλ, εθ, ὀρθογωνίοις. ἀλλὰ τὸ μὲν ηγ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν α, καὶ βγ, εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται γὰρ ὑπό τε τῆς βγ, καὶ βη, ἴσης τῇ α, καὶ πρὸς ὀρθὴν συσταθείσης γωνίαν. τὰ δὲ βκ, δλ, εθ, εἰσὶ τὰ ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, τὸ μὲν γὰρ βκ, περιέχεται ὑπὸ τῆς βη, τῆς ἴσης τῇ α, ἀτμήτῳ, καὶ τοῦ βδ, τμήματος, τὸ δὲ δλ, ὑπό τε τῆς δκ, ἴσης καὶ αὐτῆς οὔσης τῇ α, καὶ τοῦ δε, τμήματος, καὶ τὸ εθ, ὑπό τε τῆς ελ, ταὐτὸν δ᾽ ἐστὶν εἰπεῖν τῆς α, καὶ τοῦ εγ, τμήματος. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α, καὶ βγ, εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἰσόν ἐστι τοῖς ὑπό τε τῆς α, ἀτα, ἀτμήτε εὐθείας, καὶ τῶν βδ, δε, εγ, τμημάτων, ὅπερ ἦν τὸ ὑποκείμενον.

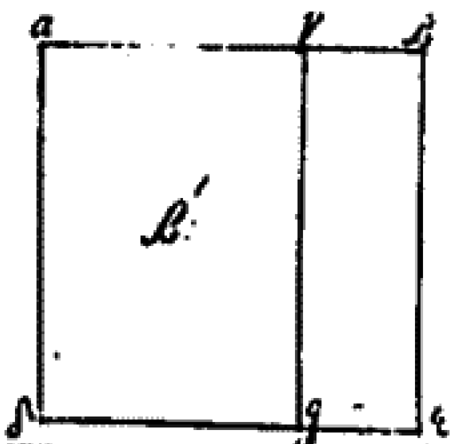
Ὅτι δὲ ἑκατέρα τῶν δκ, ελ, ἴση ἐστὶ τῇ α, δῆλον. τὰ γὰρ βκ, δλ, εθ, παραλληλόγραμμά εἰσι, τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν λδ', τῦ α. ὥστε ἑκατέρα τῶν δκ, ελ, ἴση ἐστὶ τῇ βη, ἤτοι τῇ α, ἴση γὰρ εἴληπται ἡ βη, τῇ α.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

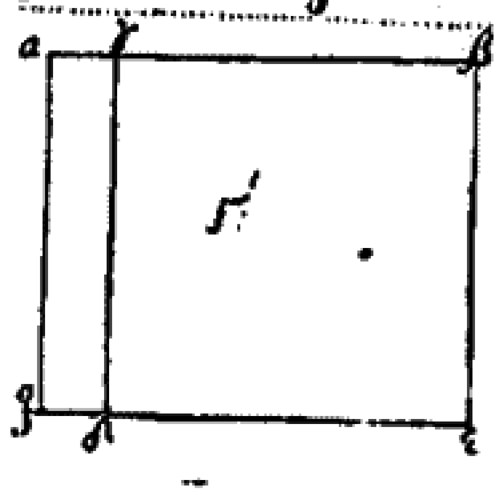
Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ. λέγω, ὅτι τὰ ὑπὸ τε τῆς αβ, καὶ τῶν αγ, γβ, μερῶν αὐτῆς περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, τετραγώνῳ. Γραφήτω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αε, διὰ τὴν μϛ', τῦ α. καὶ ἀπὸ τῦ γ, σημείυ ἤχθω παράλληλος τῇ αδ, ἢ βε, ἡ γζ, κατὰ τὴν λα, τῦ αὐτῦ. καὶ ἐπεὶ τὰ αζ, γε, ἴσα ἐστὶ τῷ αε, κατὰ τὸ ιδ'. ἀξίωμα, τὰ δὲ αζ, γε, ἐστὶ τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων αγ, γβ, περιεχόμενα ὀρθογώνια. τὸ μὲν γὰρ αζ, περιέχεται ὑπὸ τῆς αδ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ αβ, κατὰ τὸν λ'. ὅρον, καὶ τῦ εἰδὸς τμήματος αγ. τὸ δὲ γε, περιέχεται ὑπὸ τῆς γζ ἴσης καὶ αὐτῆς ὄσης τῇ αδ, κατὰ τὴν λδ'. τῦ αὐτῦ, καὶ ἑπομένως τῇ αβ, κατὰ τὸ α'. ἀξίωμα, καὶ τῦ ἑτέρυ τμήματος γβ. καὶ τὸ αε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης αβ, τετράγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 2. Fig. 2.



Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, ὡς ἔτυχε, τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.



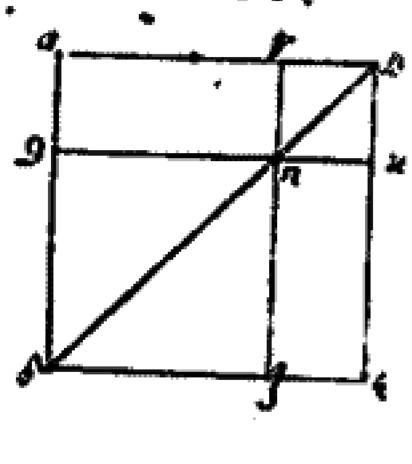
Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ, καὶ συμπεπληρώσθω ὀρθογώνιον τὸ αε, ἔχον τὴν βε, ἴσην τῷ γβ, τμήματι. Λέγω τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ τῦ γβ, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ αγ, γβ, καὶ τῷ ἀπὸ τῦ γβ, τμήματος τετραγώνῳ. Ἀχθείσης γὰρ τῆς γδ, παραλλήλως τῇ αζ, ἢ βε, τὸ αε, πάντως ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς αδ, γε, ὀρθογωνίοις κατὰ τὸ ιδ'. ἀξίωμα, ὡς εἰς αὐτὰ διαιρούμενον, καὶ ἐξ αὐτῶν συγκείμενον. ἀλλὰ τὸ μὲν αδ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται γὰρ ὑπό τε τοῦ α γ, ἑνὸς τμήματος, καὶ τῆς γ δ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῷ ἑτέρῳ γ β, τμήματι. τὸ δὲ γ ε, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ γ β, τμήματος τετράγωνον, ἴση γὰρ ἡ γ β, τῇ β ε. ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης α β, καὶ τοῦ γ β, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων α γ, γ β, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γ β, τμήματος τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποκειθέν.

Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἔσται τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Τμηθήτω ἤδη ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ. Λέγω τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον ἴσον εἶναι τοῖς τε ἀπὸ τῶν α γ, γ β, τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν α γ, γ β, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀναγραφήτω ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον τὸ α ε, κατὰ τὴν μϛ', τοῦ α'. καὶ ἤχθω ἡ β δ, διάμετρος. ἀπὸ δὲ τοῦ γ, παράλληλος τῇ α δ, ἢ β ε, ἤχθω ἡ γ ζ, κατὰ τὴν λα'. τοῦ αὐτοῦ, τέμνουσα τὴν β δ, διάμετρον κατὰ τὸ η. καὶ διὰ τοῦ η, ἤχθω παράλληλος τῇ α β, ἢ δ ε, ἡ θ κ. τὸ τοίνυν α ε, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ζ θ, γ κ, καὶ τοῖς α η, η ε, παραλληλογράμμοις κατὰ τὸ ιδ', ἀξίωμα. ἀλλὰ τὸ μὲν α ε, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, δοθείσης τετράγωνον, τὰ δὲ θ ζ, γ κ, τὰ ἀπὸ τῶν α γ, γ β, τμημάτων τετράγωνα, καὶ τὰ α η, η ε, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ὡς δειχθήσεται. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν α γ, γ β, τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν α γ, γ β, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποκειθέν. Λείπεται δὲ δεῖξαι τὰ ἤδη ὁμολογηθέντα. ὅτι μὲν οὖν τὸ α ε, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον. ὅτι δὲ τὰ μὲν θ ζ, γ κ, ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α γ, γ β, τετράγωνα, τὰ δὲ α η, η ε, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν α γ, γ β, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, δείκνυται κατὰ τὸν Εὐκλείδην οὕτως.

Eucl. Lib. 2. Fig. 3.



Ἐπεὶ τοῦ δ α β, τριγώνου αἱ δ α, α β, πλευραὶ, εἰσὶν ἴσαι, πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ α δ β, α β δ, γωνίαι τοῦ αὐτοῦ ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ε', τοῦ α'. ἐπεὶ δὲ καὶ εἰς παραλλήλους τὰς α δ, γ ζ, πέπτωκεν ἡ β δ. δῆλον, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ β η γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α δ β, ἐντὸς κατὰ τὴν κθ', τοῦ αὐτοῦ. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ α δ β, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ α β δ, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ ὑπὸ β η γ, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὸ α'. ἀξίωμα, τῇ ὑπὸ γ β η, καὶ κατὰ τὴν ε', τοῦ α'. αἱ γ β, γ η, ἴσαι εἰσί. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων, ἐπεὶ αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν λδ'. τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε τὸ γ κ, ἰσόπλευρόν ἐστιν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ γ ζ, β ε, παράλληλοί εἰσι, δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ γ β κ, β γ η, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κθ', τοῦ αὐτοῦ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γ β κ, ὀρθή ἐστιν, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ὑπὸ β γ η, καὶ ἑπομέ-

τως

νας καὶ τὴν λ δ', τῇ αὐτῇ. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ γ κ, παραλληλογράμμου ὀρθαί εἰσιν. ὥστε τὸ γ κ, ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, τετράγωνον ἄρα. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ θ ζ, τετράγωνον εἶναι. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ α θ, ἴση ἐστὶ τῇ γ η, ἡ δὲ γ η, τῷ γ β, τμήματι κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λ δ'. τὸ α η, δήπουθεν περιέχεται ὑπὸ τῶν α γ, γ β, τμημάτων. ὡσαύτως ἐπεὶ αἱ β α, β ε, ἴσαι εἰσί, καὶ ἀφῃρέθησαν ἀπ' αὐτῶν ἴσαι αἱ γ β, β κ, ἡ κ ε, πάντως ἴση ἐστὶ τῷ α γ, τμήματι. ἔστι δὲ καὶ ἡ η κ, ἴση τῷ ἑτέρῳ γ β, τμήματι. ἄρα καὶ τὸ η ε, περιέχεται ὑπὸ τῶν α γ, γ β, τμημάτων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐν παντὶ τετραγώνῳ τὰ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστι.

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Τμηθήτω δὴ ἡ α β, εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ γ, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ δ. Λέγω τὸ ὑπὸ τῶν α δ, δ β, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γ δ, τετραγώνου ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς γ β, τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ τὸ γ ζ, τετράγωνον ἀπὸ τῆς γ β. τῆς δὲ β ε, ἐπιζευχθείσης, ἤχθήτω ἡ δ η, παράλληλος τῇ γ ε, ἡ β ζ, τέμνουσα τὴν β ε, κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ, παράλληλος τῇ α β, ἤχθω ἡ κ ο. ἀπὸ δὲ τοῦ α, παράλληλος τῇ γ ε, ἡ α κ. καὶ ἐπεὶ τὸ γ θ, ἴσον ἐστὶ τῷ θ ζ, κατὰ τὴν μγ', τοῦ α'. κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ δ ο, πάντως γε κατὰ τὸ β'. ἀξίωμα τὰ γ ο, δ ζ, ἴσα ἐστὶν, ἀλλὰ τῷ γ ο, ἴσον ἐστὶ τὸ κ γ. κατὰ τὸ α', ἄρα ἀξίωμα τὸ κ γ, ἴσον ἐστὶ καὶ τῷ δ ζ. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ γ θ, τὸ α θ, πάντως ἴσον ἐστὶ τῷ μ ν ξ, γνώμονι. ἐὰν δὲ καὶ τὸ λ η, κοινὸν ληφθῇ, τὸ α θ, ἄρα μετὰ τοῦ λ η, ἴσον ἐστὶ τῷ μ ν ξ, γνώμονι καὶ λ η. ἀλλ' ὁ μ ν ξ, γνώμων μετὰ τοῦ λ η, ἴσος ἐστὶ τῷ γ ζ. τὸ α θ, ἄρα μετὰ τοῦ λ η, ἴσον ἐστὶ τῷ γ ζ. ἔστι δὲ τὸ μὲν α θ, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων α δ, δ β, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. (περιέχεται γὰρ ὑπὸ τοῦ α δ, ἑνὸς τμήματος, καὶ τῆς δ θ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῷ δ β, ἑτέρῳ τμήματι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω,) τὸ δὲ λ η, τὸ ἀπὸ τῆς γ δ, τετράγωνον, γέγονε γὰρ ἀπὸ τῆς λ θ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ γ δ. καὶ τὸ γ ζ, τὸ ἀπὸ τῆς γ β, ἡμισείας τετράγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

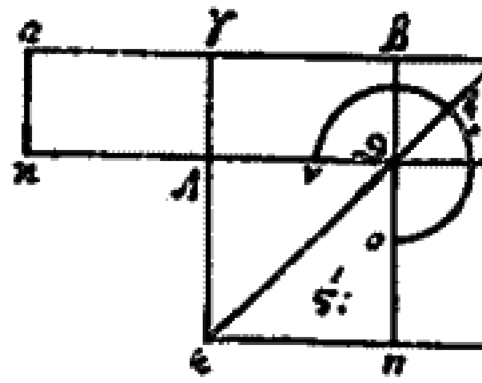
Eucl. Lib. 2. Fig. 4.

Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Ε'ὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προςεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

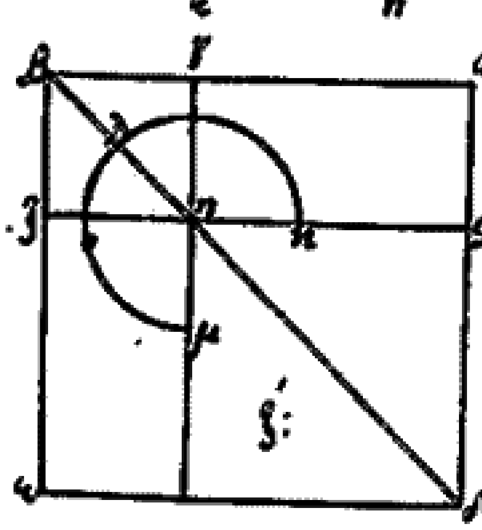
Τμηθήτω δὴ ἡ α β, γραμμὴ δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ προστιθήτω ἡ β δ. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν α δ, δ β, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γ β, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γ δ, τετραγώνῳ. τῆς γὰρ αὐτῆς κατασκευῆς τῇ τοῦ προτέρου γεγονυίας. ἐπεὶ τὸ θ ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ γ θ, κατὰ τὴν λ δ', τοῦ α. τὸ δὲ γ θ, ἴσον ἐστὶ τὸ α λ, κατὰ τὴν λ ς'. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα κατὰ τὸ α. ἀξίωμα τὸ θ ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ α λ. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ γ μ, ὅλον τὸ α μ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ν ξ ο, γνώμονι. κοινοῦ δ' αὖθις προσκειμένου τοῦ λ η, πάντως γε τὸ α μ, μετὰ τοῦ λ η, ἴσον ἐστὶ τῷ ν ξ ο, γνώμονι, καὶ λ η, παραλληλογράμμῳ. ἀλλ' ὁ ν ξ ο, γνώμων μετὰ τοῦ λ η, ἴσος ἐστὶ τῷ γ ζ, τετραγώνῳ κατὰ τὸ ι δ'. ἀξίωμα, ἄρα τὸ α μ, μετὰ τοῦ λ η, ἴσον ἐστὶ τῷ γ ζ, τετραγώνῳ. τὸ δὲ α μ, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α δ, καὶ δ β, ἡ γὰρ δ μ, ἴση ἐστὶ τῇ δ β, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ'. καὶ τὸ λ η, τὸ ἀπὸ τῆς γ β, τετράγωνον, ἡ γὰρ λ θ, αὐτοῦ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ γ β, κατὰ τὴν λ δ'. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α δ, δ β, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γ β, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γ δ, τετραγώνῳ. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 2. Fig. 5.



Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ε'ὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



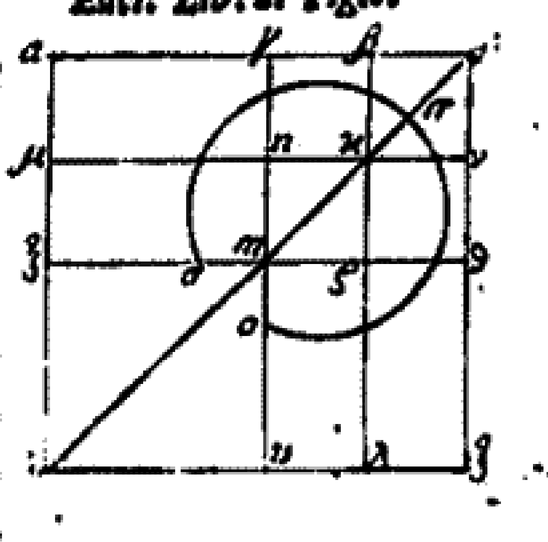
Τμηθήτω δὴ ἡ α β, εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ. Λέγω τὰ ἀπὸ τῶν α β, β γ, τετράγωνα ἴσα εἶναι τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν α β, β γ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος α γ, τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς α β, τὸ α ε, τετράγωνον διὰ τῆς μ ς', τοῦ α. καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ σχῆμα κατὰ τὰ προειρημένα, καὶ ἔσται πάντως τὰ β η, η δ, παραλληλόγραμμα, τετράγωνα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ'. τοῦ παρόντος. Ἐπεὶ δὲ ἡ η θ, ἴση ἐστὶ τῇ γ α, δῆλον, ὅτι τὸ μὲν β η, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ γ β, τμήματος τετράγω-

τετράγωνον, τὸ δὲ η δ, τὸ ἀπὸ τοῦ α γ. Αὖθις ἐπεὶ τὰ α η, η ε, ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν μγ΄. τοῦ α΄. κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ β η, πάντως γε τὰ α ζ, γ ε, ἴσα ἐστίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ α β, β ε, καὶ γ β, β ζ, ἴσαι κατὰ τὸν λ΄. ὅρον τοῦ α΄. τὰ α ζ, ἄρα γ ε, ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν α β, β γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. ἀλλὰ τὰ α ζ, γ ε, ὁ κ λ μ, ἐστὶ γνώμων μετὰ τοῦ β η, τετραγώνου, ἄρα ὁ κ λ μ, γνώμων μετὰ τοῦ β η, ἰσός ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν α β, β γ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ η δ, πάντως γε ὁ κ λ μ, γνώμων μετὰ τῶν β η, η δ, τετραγώνων ἰσός ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν α β, β γ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος α γ, τετραγώνῳ, τῷ η δ. ἀλλ' ὁ κ λ μ, γνώμων, καὶ τὰ β η, η δ, τετράγωνα, ἐστὶ τὸ ὅλον α ε, τετράγωνον καὶ β η. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον δηλ. τὸ α ε, μετὰ τοῦ β η, τοῦ ἀπὸ τοῦ β γ, τμήματος τετραγώνου, ἰσόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης α β, καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος β γ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ η δ, τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ δηλ. τμήματος α γ. ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν.

Πρότασις Η΄. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Eucl. Lib. 2. Fig. 6.



Εὐθεῖα ἤδη ἡ α β, τμηθήτω, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ, καὶ προστεθήτω αὐτῇ ἡ β δ, ἴση τῇ β γ. Λέγω τὸ ἀπὸ τῆς α β, ὅλης καὶ τοῦ γ β, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον τετράκις, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ α γ, τμήματος τετραγώνου ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς α δ, τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω τοίνυν ἀπὸ τῆς α δ, τετράγωνον τὸ α ζ. καὶ κατασκευασθήτω τὸ σχῆμα διπλοῦν. καὶ ἐπεὶ τὸ α ζ, τετράγωνόν ἐστι, πάντως γε καὶ τὰ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλόγραμμα τὰ β ν, η ρ, ξ υ, τετράγωνά εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ΄. τοῦ παρόντος. αὖθις ἐπεὶ ἡ β δ, ἴση γέγονε τῇ γ β, δῆλον, ὅτι τὰ γ κ, β ν, ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν λϛ΄, τοῦ α΄. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ η κ, κ ν, ταῖς γ β, β δ, ἴσαι κατὰ τὴν λδ΄, τοῦ α΄. καὶ ἑπομένως ἀλλήλαις, ἄρα καὶ τὰ η ρ, κ θ, ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ καὶ τὰ η ρ, β ν, ἴσα ἐστίν, ἡ γὰρ η κ, ἴση ἐστὶ τῇ γ β, ἤτοι τῇ β δ. Τὰ τέσσαρα ἄρα παραλληλόγραμμα γ κ, β ν, η ρ, κ θ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Πάλιν ἐπεὶ τὰ γ κ, η ρ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἄρα καὶ αἱ τούτων βάσεις γ υ, η π, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν λϛ΄. τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν αὐτὴν ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ καὶ τὰ α η, μ π. τοῖς δὲ α η, μ π, ἴσα ἐστὶ τὰ π λ, ρ ζ, κατὰ τὴν μγ΄. τοῦ α΄. ἄρα τὰ τέσσαρα παραλληλόγραμμα α η, μ π, π λ, ρ ζ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. προστεθέντος δὲ τῷ μὲν α η, τοῦ γ κ, τῷ δὲ μ π, τοῦ η ρ, τῷ δὲ π λ, τοῦ β ν,

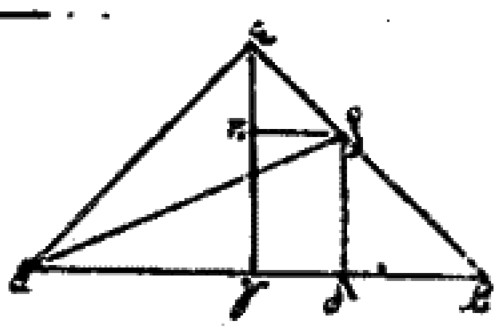
καὶ τῷ

καὶ τῷ ρ ζ, τῦ κ θ. πάντως γε κατὰ τὸ β'. ἀξίωμα τὰ α κ, μ ρ, κ ζ, καὶ π λ, μετὰ τῦ β ι, ἴσα ἀλλήλοις ἐςίν. ἀλλὰ τὸ α κ, ἐςὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν α β, β γ, ἴση γὰρ ἡ β κ, τῇ γ β, ἄρα τὰ τέσσαρα παραλληλόγραμμα α κ, μ ρ, κ ζ, καὶ π λ, μετὰ τῦ β ι, ἐςὶ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν α β, β γ, περιεχόμενον. ἔςι δὲ καὶ τὸ ξ υ, τὸ ἀπὸ τῦ λοιπῦ τμήματος ἀναγραφόμενον τετράγωνον, ἴση γὰρ ἡ ξ π, τῇ α γ, καὶ τὰ τέσσαρα παραλληλόγραμμα, α κ, μ ρ, κ ζ, π λ, μετὰ τῦ β ι, σὺν τῷ ξ υ, ὅλον ἐςὶ τὸ α ζ, τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τῆς α δ, ἀναγραφόμενον. ἄρα τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς α β, ὅλης καὶ τῦ γ β, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῦ ἀπὸ τῦ α γ, τμήματος τετραγώνυ, ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς α δ, τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐςι τῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Eucl. Lib. 2. Fig. 7.



Εὐθείας ἤδη τῆς α β, εἰς ἴσα μὲν τμηθείσης κατὰ τὸ γ, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ δ, λέγω τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων αὐτῆς τμημάτων α δ, δ β, τετράγωνα, διπλάσια εἶναι τῶν ἀπό τε τῆς ἡμισείας α γ, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν γ δ, τετραγώνων. Ἀνεςάθω γὰρ ἐπὶ τῆς α β, κάθετος ἡ ε γ', ἴση τῇ α γ, καὶ τῶν α ε, ε β, ἐπιζευγνυμένων, ἤχθω παράλληλος τῇ γ ε, ἡ δ ζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ α ζ. ἀπὸ δὲ τῦ ζ, παράλληλος τῇ α β, ἤχθω ἡ ζ η. καὶ ἐπεὶ αἱ α γ, γ ε, ἴσαι εἰσι. πάντως γε αἱ ὑπὸ γ α ε, γ ε α, γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ἀλλ' ἡ ὑπὸ α γ ε, ὀρθή ἐςιν, ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γ α ε, γ ε α, ἡμίσειά ἐςιν ὀρθῆς. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γ β ε, γ ε β, ἡμίσειά ἐςιν ὀρθῆς. ὥςε ἐπεὶ δέδεικται ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γ ε α, γ ε β, ἡμίσεια ὀρθῆς, ὅλη πάντως γε ἡ ὑπὸ α ε β, ὀρθή ἐςιν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν, αἱ η ζ, α β, παράλληλοί εἰσι, καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκε ἡ ε γ. δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ ε η ζ, ε γ β, γωνίαι ἴσαι εἰσι κατὰ τὴν κθ', τῦ α'. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ε γ β, ὀρθή ἐςιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ε η ζ, ὁμοίως ὀρθή ἐςι. δέδεικται δὲ ἡ ὑπὸ η ε ζ, ἡμίσεια ὀρθῆς, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ η ζ ε, ἡμίσειά ἐςιν ὀρθῆς. ὥςε αἱ η ε, η ζ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ς', τῦ αὐτῦ. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ δ β, δ ζ, ἴσαι εἰσιν. Ἐπεὶ οὖν τὸ α γ ε, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐςι κατὰ τὸ γ, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς α ε, τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α γ, γ ε, τετραγώνοις κατὰ τὴν μζ', τῦ α'. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν α γ, γ ε, τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς α γ, γ ε. τῦ ἑνὸς ἄρα, δηλ. τῦ ἀπὸ τῆς α γ, διπλάσιόν ἐςι τὸ ἀπὸ τῆς α ε. ὡσαύτως δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε ζ, διπλάσιον τῦ ἀπὸ τῆς η ζ, ἤτοι τῦ ἀπὸ τῆς γ δ, ἴσαι γὰρ αἱ η ζ, γ δ, κατὰ τὴν λδ', τῦ α'. ὥςε τὰ ἀπὸ τῶν α ε, ε ζ, τετρά-

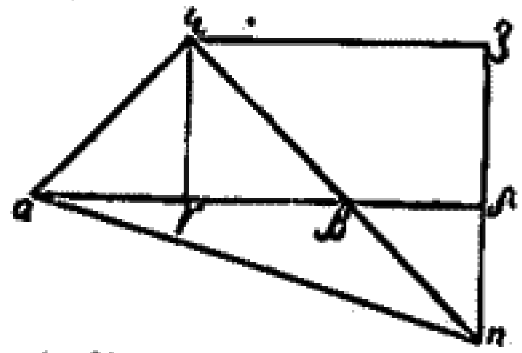
γωνα

γωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ, συναμφότερα συναμφοτέρων· ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν αε, εζ, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αζ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μζ΄. ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αζ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν αγ, γδ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αζ, τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δζ, κατὰ τὴν αὐτὴν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δζ, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ. ἀλλ᾽ ἡ δζ, ἴση δέδεικται τῇ δβ. ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δβ, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποκειθέν.

Πρότασις Ι΄. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Τῆς αβ, ἤδη εὐθείας δίχα κατὰ τὸ γ, τμηθείσης, καὶ τῆς βδ, ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ προσκειμένης, λέγω, ὅτι τό, τε ἀπὸ τῆς ὅλης αδ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης βδ, τὰ συναμφότερα ταῦτα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς αγ, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνου. Ἀπὸ γὰρ τοῦ γ, κάθετος ἀνεστάθω κατὰ τὴν ια΄, τοῦ α΄. ἡ γε, ἴση τῇ αγ, καὶ τῶν αε, εβ, ἐπιζευγνυμένων, ἤχθω ἀπὸ τοῦ δ, σημείου παράλληλος τῇ γε, καὶ ἴση ἡ δζ. ἐξαγομένη δὲ ἡ εβ, ἀπὸ τοῦ β, σημείου συμπιπτέτω τῇ δζ, καὶ αὐτῇ ἐξαγομένῃ κατὰ τὸ η. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ αη. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸ δ΄. πόρισμα τῆς λβ΄, τοῦ α΄. ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αεγ, βεγ, ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστι, πάντως γε ὅλη ἡ ὑπὸ αεβ, ὀρθή ἐστι. καὶ διὰ τὴν λδ΄. τοῦ αὐτοῦ ὀρθή ἐστιν ἔτι καὶ ἡ ὑπὸ εζη, ὅτι τὸ γζ, παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἐκ τῆς κατασκευῆς. αὖθις ἐπεὶ ἡ εζ, παράλληλός ἐστι τῇ γδ, κατὰ τὴν λγ΄, τοῦ α΄. δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ ηδβ, ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν κθ΄, τοῦ αὐτοῦ. ὥστε ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δβη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γβε, κατὰ τὴν ιε΄, τοῦ α΄. ἡ δὲ ὑπὸ γβε, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς κατὰ τὸ δ΄. πόρισμα τῆς λβ΄. τοῦ αὐτοῦ. πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ δβη, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ δηβ, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὥστε ἡ δβ, ἴση ἐστὶ τῇ δη, κατὰ τὴν ϛ΄, τοῦ



Eucl. Lib. 2. Fig. 8.

α΄. δέδεικται δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ, ὀρθή. ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ζεη, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὥστε καὶ ἡ εζ, ἴση ἐστὶ τῇ ζη, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ϛ΄. τούτων δ᾽ οὕτω προαποδεδειγμένων, ἤδη συνακτέον. Ἐπεὶ τὸ αγε, ὀρθογώνιόν ἐστι, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς αε, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αγ, γε, τετραγώνοις. ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ γε, τοῦ ἑνὸς ἄρα, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, διπλάσιόν

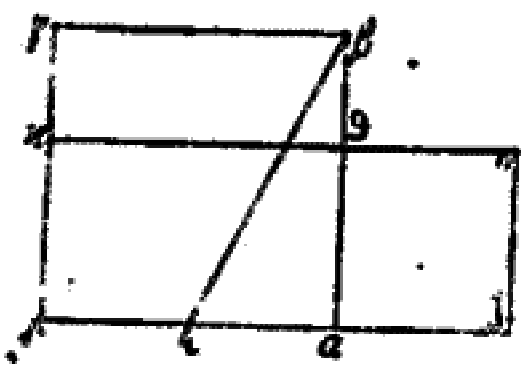
σιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αε. Διὰ τὰ αὐτὰ δείκνυται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εη, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς γδ, ἴσαι γὰρ αἱ εζ, γδ, ὡς δέδεικται. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῆς αε, εη, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αη, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αη, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δη, τετράγωνα, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δη, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ, τετραγώνων, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δη, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δβ, διπλάσιά ἐστι τῶν αὐτῶν. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑʹ. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἔστω δὴ τεμεῖν τὴν αβ, δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς δύο μέρη, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ ἑνὸς τῶν αὐτῆς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αβγδ, τῆς δὲ αδ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ ε, ἐπεζεύχθω ἡ εβ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ εα, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ ζ, ὥστε τὴν εζ, ἴσην εἶναι τῇ βε. ἀπὸ δὲ τῆς αζ, ἀναγραφομένου τοῦ αη, τετραγώνου, παρεκβεβλήσθω ἡ ηθ, ἐπὶ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, τέτμηται δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ προσκεῖται αὐτῇ ἡ αζ, πάντως γε κατὰ τὴν ςʹ. τοῦ παρόντος, τὸ ὑπὸ τῆς δζ, καὶ ζα, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἤτοι τὸ ζκ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγώνῳ, ἢ τῷ ἀπὸ τῆς εβ, ἴσης ταύτῃ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς εβ, τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αε, κατὰ τὴν μζʹ, τοῦ αʹ. ἄρα τὸ ζκ, ὀρθογ. μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αε, τετραγώνοις. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ἐγκαταλείπεται τὸ ζκ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αβ, τετραγώνῳ, ἤτοι τῷ αγ. ἀφαιρουμένου δ' ἔτι κοινοῦ τοῦ ακ, ἐγκαταλείπεται ἴσον τὸ ζθ, τῷ θγ. ἀλλὰ τὸ μὲν θγ, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ὅλης αβ, ἴση γὰρ ἡ αβ, τῇ βγ, καὶ τοῦ ἑτέρου θβ, τμήματος. τὸ δὲ ζθ, τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ αθ, τμήματος τετράγωνον. ἡ δοθεῖσα ἄρα εὐθεῖα τέτμηται κατὰ τὸ προσταχθέν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 2. Fig. 9.

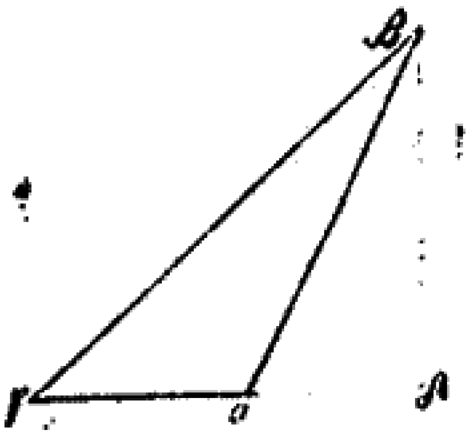


Πρό-

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

Eucl. Lib. 2. Fig. 10.



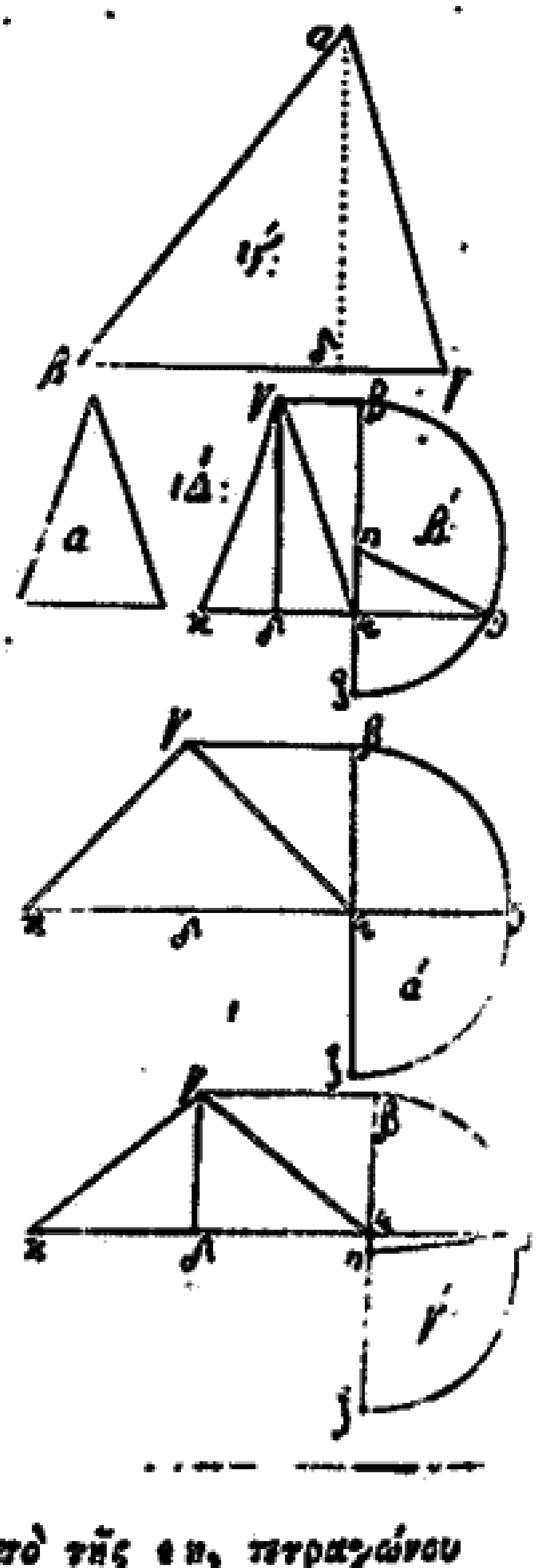
Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ α β γ, ἀμβλυγώνιον κατὰ τὸ α. καὶ τῆς γ α, ἐκβληθείσης κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ α, πιπτέτω κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ β, ἡ β δ. Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς β γ, τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γ α, α β, τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γ α, α δ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. καὶ γὰρ τὴν δ'. τοῦ παρόντος, ἐπεὶ ἡ γ δ, τέτμηται, ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ α, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς γ δ, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν γ α, α δ, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γ α, α δ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῆς δ β, λαμβανόμενα ἔσονται τὰ ἀπὸ τῶν γ δ, δ β, τετράγωνα, ἴσα τοῖς τε ἀπὸ τῶν γ α, α δ, δ β, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γ α, α δ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν γ δ, δ β, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γ β, κατὰ τὴν μζ, τοῦ παρόντος, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν α δ, δ β, ἴσον ἐστὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τὸ ἀπὸ τῆς ·β, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς γ β, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν γ α, α β, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γ α, α δ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς γ β, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γ α, α β, τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γ α, α δ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις ἄρα τριγώνοις καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω δὴ τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ α β γ. καὶ πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς β γ, αὐτοῦ πλευρᾶς ἡ α δ. Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς α γ, τετράγωνον, ὑποτεινούσης τὴν πρὸς τῷ β, ὀξεῖαν γωνίαν, ἔλαττον εἶναι τῶν ἀπὸ τῶν α β, β γ, περιεχουσῶν τὴν αὐτὴν γωνίαν τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπό τε τῆς β γ, καὶ β δ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. τῆς γὰρ β γ, κατὰ τὸ δ, ὡς ἔτυχε, τμηθείσης, ἔσται τὰ ἀπὸ τῶν γ β, βδ, τετράγωνα ἴσα, τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δγ, τετραγώνῳ κατὰ τὴν ζ′. τοῦ παρόντος. κοινοῦ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, τετραγώνου εἰλημμένου, ἔσται τὰ ἀπὸ τῶν γβ, βδ, δα, τετράγωνα ἴσα τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αδ, δγ, τετραγώνοις, κατὰ τὸ β′. ἀξίωμα. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αδ, δβ, ἰσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αδ, δγ, τετραγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς αγ, κατὰ τὴν μζ′. τοῦ α. ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν γβ, βα, ἴσα ἐστι τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνῳ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γβ, βα, τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὡσαύτως δὲ δείξομεν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἔλαττον εἶναι τῶν ἀπὸ τῶν βγ, γα, τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, γδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις ἄρα τριγώνοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 2. Fig. 11.



Πρότασις ΙΔ′. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔστω δὴ συστήσασθαι τετράγωνον ἴσον τῷ α, δοθέντι εὐθυγράμμῳ. Συνεστάθω διὰ τῆς μέ′. τοῦ α′. τῷ α, εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ βδ. εἰ οὖν ἡ βε, ἴση ἐστὶ τῇ εδ, γέγονε τὸ ἐπιταχθέν, τετράγωνον γάρ ἐστι τὸ βδ, ὅπερ ἴσον γέγονε τῷ α. εἰ δὲ μή, ἔστω ἡ βε, τῆς εδ, μείζων. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. ὥστε τὴν εζ, ἴσην εἶναι τῇ εδ. τῆς δ′ ὅλης βζ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ η, κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηβ, ἢ ηζ, γραφέτω ἡμικύκλιον τὸ βθζ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ δε, κατὰ τὸ συνεχές. εἶτα ἐπεζεύχθω ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἡ βζ, τέτμηται εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ η, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ ε, ἔσται κατὰ τὴν ε′. τοῦ παρόντος, τὸ ὑπὸ τῶν βε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εη, τετραγώνου ἴσον, τῷ ἀπὸ τῆς ηζ, τετραγώνῳ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς ηθ. ἴσαι γὰρ αἱ ηζ, ηθ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ηθ, τετράγωνον ἰσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν θε, εη, τετραγώνοις κατὰ τὴν μζ′. τοῦ α. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βε, εζ, ὀρθογώνιον δηλ. τὸ βδ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εη, τετραγώνου ἰσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν θε, εη, τετραγώνοις. τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς εη, τετραγώνου κοινοῦ ἀφαιρεθέντος, ἐγκαταλειφθήσεται τὸ βδ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς

εθ,

εθ, τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ βδ, παραλ. ἴσον γέγονε τῷ α, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εθ, τετράγ. ἴσον ἐστὶ τῷ α. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεσθαι τὸ προσαχθὲν, κἂν ἡ δε, μείζων εἴη τῆς εβ, καὶ ἡ βζ, τμηθῇ δίχα ἐκτὸς τοῦ ε, ὡς ἐπὶ τοῦ γ', καθορᾶται σχήματος. τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνέστη.

Τέλος τοῦ Δευτέρου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Προοιμιακὴ περίληψις τοῦ Τρίτου Εὐκλειδείου Στοιχείου.

Ἐπὶ τοῦ παρόντος Τρίτου Βιβλίου ὁ Στοιχειωτὴς τὰ πλεῖστα περὶ κύκλου πραγματεύεται, τὰς ἀρκτικὰς αὐτοῦ ἀποδεικνὺς ἰδιότητας, αὐτῷ τούτῳ συνεχείας, οἷον ἐντελεστάτῳ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις σχήματι. συμβάλλει ἀλλήλαις τὰς γραμμὰς ἤτοι ἐντὸς τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἢ ἐκτὸς ἀγομένας. τὰ πάθη τούτων, καὶ τῶν κύκλων ἁπτομένων ἢ τεμνομένων ἀλλήλοις ἐκτίθησιν. καὶ ἐπὶ τούτοις τὰς γωνίας ἤτοι πρὸς τῷ κέντρῳ, ἢ πρὸς τῇ περιφερείᾳ κειμένας πρὸς ἀλλήλας παραβάλλει. καὶ τέλος τὰ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας Στοιχεῖα, ὅσα τῇ δυνάμει μάλιστα τοῦ κύκλου ἐπερείδονται, διὰ βραχέων παραδίδωσιν. Ὅσης τοίνυν λυσιτελείας περιεκτικόν ἐστι τὸ Βιβλίον, τοῦτο μόνον ἀρκεῖ πρὸς ἔνδειξιν, ὅτι περὶ κύκλου, πηγῆς ὄντως θαυμασίων πραγμάτων ἐφ' ὅλην τὴν μάθησιν, καὶ τῶν ῥηθέντων πραγματεύεται.

Τὰ χρησιμώτερα δὴ ταῖς ἐπιστήμαις θεωρήματα καθέστηκε ταῦτα. τὸ ιϛ'. ἀμέλει, τὸ κ'. κα'. κβ'. λα'. λβ'. λε'. καὶ λϛ'.