ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΡΜΗΝΕΙΑΝ ΜΟΥΣΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΤΙΜΑΙΟΣ

Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ περιοδικοῦ «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΗ' (1966), τεύχη 35/36

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΦΥΛΗΣ 32—ΑΘΗΝΑΙ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΡΜΗΝΕΙΑΝ ΜΟΥΣΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΤΙΜΑΙΟΣ

Α' ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Εἰς τὰ σχόλια τῶν Ἁρμονικῶν τοῦ Πτολεμαίου ὁ Πορφύριος σημειώνει τὰ ἑξῆς:

Ὁ Ἀρχύτας δὲ λέγων περὶ τῶν μεσοτήτων (ἀναλογιῶν) γράφει ταῦτα· «Μέσαι δὲ ὑπάρχουν εἰς τὴν μουσικὴν τρεῖς, μία μὲν ἡ ἀριθμητική, δευτέρα δὲ ἡ γεωμετρική, τρίτη δὲ ἡ ὑπεναντία, τὴν ὁποίαν καλοῦν ἁρμονικήν. Ἀριθμητικὴ μὲν εἶναι ὅταν ὑπάρχουν ἐν συνεχείᾳ τρεῖς ὅροι παρουσιάζοντες τὴν αὐτὴν ὑπεροχήν· δηλαδὴ ὅσον ὁ πρῶτος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου, τόσον ὁ δεύτερος ὑπερέχει τοῦ τρίτου. Καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν συμβαίνει, ὥστε ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων ὅρων νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγον τῶν μικροτέρων ὅρων. Ἡ γεωμετρικὴ δὲ εἶναι, ὅταν (ὑπαρχόντων ἐν συνεχείᾳ τριῶν ὅρων) ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, οἷον ἔχει ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τρίτον. Τούτων δὲ ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν μικροτέρων. Ἡ δὲ ὑπεναντία, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ἁρμονικήν, εἶναι ὅταν οἱ ὅροι ἔχουν ὡς ἑξῆς· ὅσον μέρος τοῦ πρώτου ὑπερέχει ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου, τόσον μέρος τοῦ τρίτου ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου. Εἰς τὴν ἀναλογίαν δὲ αὐτὴν ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων ὅρων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῶν μικροτέρων ὅρων».

(Ἀρχύτας δὲ περὶ τῶν μεσοτήτων λέγων γράφει ταῦτα·

μέσαι δέ ἐντι τρῖς τᾷ μουσικᾷ, μία μὲν ἀριθμητικά, δευτέρα δὲ ἁ γεωμετρικά, τρίτα δ' ὑπεναντία, ἃν καλέοντι ἁρμονικάν. ἀριθμητικὰ μέν, ὅκκα ἔωντι τρεῖς ὅροι κατὰ τὰν τοίαν ὑπεροχὰν ἀνὰ λόγον· ᾧ πρᾶτος δευτέρου ὑπερέχει, τούτῳ δεύτερος τρίτου ὑπερέχει. καὶ ἐν ταύτᾳ ⟨τᾷ⟩ ἀναλογίᾳ συμπίπτει ἦμεν τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖζον. ἁ γεωμετρικὰ δέ, ὅκκα ἔωντι οἷος ὁ πρᾶτος ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτί τὸν τρίτον. τούτων δ' οἱ μείζονες ἴσον ποιοῦνται τὸ διάστημα καὶ οἱ μείους. ἁ δ' ὑπεναντία, ἃν καλοῦμεν ἁρμονικάν, ὅκκα ἔωντι ⟨τοῖοι· ᾧ⟩ ὁ πρᾶτος ὅρος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου αὐταύτου μέρει, τούτῳ ὁ μέσος τοῦ τρίτου ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρει. γίνεται δ' ἐν ταύτᾳ τᾷ ἀναλογίᾳ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖζον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖον). (Porph. in Ptol. harm. p. 42. Diels Fragm. d. Vors. I, B. Fr. 2 p. 435, 1951).

'Εὰν ὑπάρχουν τρεῖς ἀριθμοὶ α,β,γ $(\alpha>\beta>\gamma>0)$, θὰ εἶναι, κατὰ τὸν 'Αρχύταν :

'Αριθμητικὴ ἀναλογία, ὅταν $\alpha-\beta=\beta-\gamma$ (1)

Θὰ εἶναι δὲ $\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{\beta}{\gamma}$ (2)

Γεωμετρικὴ ἀναλογία, ὅταν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ (3)

'Αρμονικὴ ἀναλογία, ὅταν $\alpha=\beta+\dfrac{\alpha}{n}$ $(n\neq 1>0)$

$$\beta=\gamma+\frac{\gamma}{n}\cdot$$

Θὰ εἶναι δὲ $\dfrac{\alpha}{\beta}>\dfrac{\beta}{\gamma}\cdot$ (4)

Κατὰ τὸν Νικόμαχον τὸ ἁρμονικὸν μέσον $\beta=\dfrac{2.\alpha.\gamma}{\alpha+\gamma}$, (5) (Introd. Arith. Hoche II 26 p. 135, 10).

'Η ἀπόδειξις τῶν προηγουμένων σχέσεων (2) καὶ (4) δὲν ἔχει σωθῆ, ἔχει ὅμως ὡς ἑξῆς :

Εἰς τὴν σχέσιν (1), ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος διὰ β καὶ τὸ δεύτερον διὰ γ, ἐπειδὴ $\beta>\gamma$, θὰ λάβωμεν

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta}<\frac{\beta-\gamma}{\gamma}$$

ἢ $\dfrac{\alpha}{\beta}-1<\dfrac{\beta}{\gamma}-1$, ἐξ ἧς ἕπεται

ἡ ἀλήθεια τῆς (2) $\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{\beta}{\gamma}\cdot$

'Η σχέσις (5) γράφεται $\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}\cdot$ (6)

'Εὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος (6) ἐπὶ β καὶ τὸ δεύτερον ἐπὶ α, ἐπειδὴ $\beta<\alpha$, θὰ λάβωμεν

$$\beta\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)<\alpha\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)$$

ἢ $\dfrac{\beta}{\gamma}-1<\dfrac{\alpha}{\beta}-1$, ἐξ ἧς ἕπεται

ἡ ἀλήθεια τῆς (4) $\dfrac{\alpha}{\beta}>\dfrac{\beta}{\gamma}\cdot$

2. Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον, εἰς τὴν τετρακτὺν τῶν Πυθαγορείων 1, 2, 3, 4 ἀπαντῶσιν αἱ θεμελιώδεις συμφωνίαι τῆς μουσικῆς, ἤτοι: ἡ διὰ τεσσάρων συμφωνία ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ (ὁ τέταρτος φθόγγος τῆς μουσικῆς κλίμακος συχνότητος $\frac{4}{3}$ ὅταν ὁ πρῶτος φθόγγος ἔχει συχνότητα 1 καὶ ὁ ὄγδοος 2). Ἡ διὰ πέντε συμφωνία ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ $\left(\text{δηλ.}\ 1\ \frac{1}{2}\right)$, (ὁ πέμπτος φθόγγος τῆς αὐτῆς κλίμακος συχνότητος $\frac{3}{2}$). Ἡ διὰ πασῶν συμφωνία ἐν διπλασίῳ λόγῳ (2 : 1) (ὁ ὄγδοος φθόγγος τῆς αὐτῆς κλίμακος συχνότητος 2). Ἡ δὶς διὰ πασῶν συμφωνία ἐν τετραπλασίῳ λόγῳ (4 : 1) (ἡ διπλῆ ὀκτάβα). (Theon Smyrnaeus, Sectio canonis, E. Hiller p. 93, 17, B. G. Teubner, Leipzig 1878).

3. Ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν του σημειώνει ὅτι ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογία ἔχει λάβει τὸ ὄνομα ἁρμονική, διότι παρέπεται πάσης γεωμετρικῆς ἁρμονίας. Ὀνομάζουν δέ, προσθέτει, γεωμετρικὴν ἁρμονίαν τὸν κύβον, ἐπειδὴ εἰς πάντα κύβον ἐνοπτρίζεται ἡ μεσότης αὕτη. Διότι ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας, 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμὰς καὶ οἱ ἀριθμοὶ 6, 8, 12 ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν καὶ ὁ μέσος αὐτῶν ὁ 8, δηλ., τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων 6 καὶ 12, ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων ὅρων $\left(\text{ἤτοι}\quad 8 = \frac{2 \,.\, 6 \,.\, 12}{6+12}\right)$. (Nicomachi Introd. Arithm. R. Hoche, II 26 p. 135, 10, B. G. Teubner, Leipzig 1866).

Εἰς τὴν αὐτὴν πραγματείαν ὁ Νικόμαχος ἀναπτύσσει τὰ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6 : 8 = 9 : 12$ ἀποκαλῶν αὐτὴν τελειοτάτην καὶ χρήσιμον εἰς πᾶσαν προκοπὴν εἰς τὴν μουσικὴν καὶ τὴν φυσιολογίαν. Εἰς αὐτήν, τονίζει, ἀπαντᾷ ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία $12 - 9 = 9 - 6$, ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία $12 : 8 = 9 : 6$ καὶ ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογία τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 12, ὅπου ὁ μεγαλύτερος ὅρος $12 = 8 + \frac{12}{3}$ καὶ ὁ μέσος ὅρος $8 = 6 + \frac{6}{3}$ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας (R. Hoche II 29 p. 144, 20).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ: Ὁ Ἰάμβλιχος, ὅστις ἀντλεῖ κατὰ τὸ πλεῖστον ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς τοῦ Νικομάχου, σχολιάζων αὐτὴν προσθέτει, παραδόξως, ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἔφερε τὴν μουσικὴν ἀναλογίαν εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐκ τῆς Βαβυλῶνος, ἀποκαλῶν αὐτὴν καὶ αὐτός, ὡς ὁ Νικόμαχος, τελειοτάτην. Ἡ πληροφορία τοῦ Ἰαμβλίχου θεωρεῖται ἀνακριβὴς καὶ ὑποτίθεται ὅτι πρόκειται μᾶλλον περὶ μεταγενεστέρας προσθήκης) (Iamblichus in Nicom Arithm. Introd. p. 118, H. Pistelli, B. G. Teubner, Leipzig 1894).

4. Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη ὁ Ἐμπεδοκλῆς πρῶτος διετύπωσε τὴν θεωρίαν ὅτι ὁ κόσμος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τεσσάρων στοιχείων, πυρὸς — ἀέρος — ὕδατος — γῆς (Aristoteles M. Phys. 985 a 21).

Ὁ Πλάτων ἔχει δεχθῆ τὴν θεωρίαν τοῦ Ἐμπεδοκλέους (Τίμαιος 32b — c) καὶ συμβολίζει τὴν γῆν διὰ τοῦ κύβου (γῇ μὲν τὸ κυβικὸν εἶδος δῶμεν. Τίμαιος 55 d — e), τὸ πῦρ διὰ τῆς πυραμίδος (τετραέδρου), τὸν ἀέρα διὰ τοῦ ὀκταέδρου καὶ τὸ ὕδωρ διὰ τοῦ εἰκοσαέδρου.

(ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Οἱ συμβολισμοὶ αὐτοὶ ἀποδίδονται καὶ εἰς τοὺς Πυθαγορείους.* Diels, Doxog. 334, Frag. d. Vors. I p. 403, 1951, Ἰαμβλίχου Θεολογούμενα τῆς Ἀριθμητικῆς, de Falco p. 87).

5. Ἡ ἁρμονία μὲ τὴν ὁποίαν ὁ Δημιουργὸς ἔχει κατασκευάσει τὸν κόσμον, κατὰ τὸν Πλάτωνα, σχετίζεται μὲ τὸν συμβολισμὸν τῆς γῆς διὰ τοῦ κύβου καὶ τὴν ἁρμονίαν, ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς τὸν κύβον.

Διότι εἰς τὸν κύβον παρατηροῦνται καὶ οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς μουσικῆς ἀναλογίας οἱ 6 — 8 — 9 — 12, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ θεμελιώδεις φθόγγοι τῆς μουσικῆς κλίμακος, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου 6, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν 12, ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν 8, ὅστις εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν 6 καὶ 12, καὶ ὁ ἀριθμὸς 9, ὅστις εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 6 καὶ 12.

Ἡ ὀνομασία τῶν 4 ὅρων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας ἔχει ὡς ἑξῆς :

Κατὰ τὸν Φιλόλαον :	ὑπάτη	μέση	τρίτη	νήτη	(Diels. Fr. I [B 62]
Μεταγενεστέρως :	ὑπάτη	μέση	παραμέση	νήτη	
Σύγχρονος ἰταλική :	do	fa	sol	do	
Συχνότης φθόγγων :	6	8	9	12	

6. Διὰ τὸ μέγεθος τῆς ἁρμονίας δηλ. τῆς μουσικῆς κλίμακος, ὁ Φιλόλαος γράφει τὰ ἑξῆς :

ἁρμονίας δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν· τὸ δι' ὀξειᾶν μεῖζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόῳ. ἔστι γὰρ ἀπὸ ὑπάτας, ἐπὶ μέσσαν συλλαβά, ἀπὸ δὲ μέσσας ἐπὶ νεάταν δι' ὀξειᾶν, ἀπὸ δὲ νεάτας ἐς τρίταν συλλαβά, ἀπὸ δὲ τρίτας ἐς ὑπάταν δι' ὀξειᾶν· τὸ δ' ἐν μέσσῳ μέσσας καὶ τρίτας ἐπόγδοον· ἁ δὲ συλλαβὰ ἐπίτριτον, τὸ δὲ δι' ὀξειᾶν ἡμιόλιον, τὸ διὰ πασᾶν δὲ διπλόον· οὕτως ἁρμονία πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσεις, δι' ὀξειᾶν δὲ τρία ἐπόγδοα καὶ δίεσις, συλλαβὰ δέ, δύ' ἐπόγδοα καὶ δίεσις. Stob. Eclogae p. 188, Diels Fr. I [62]).

(Δηλαδή : Τῆς μουσικῆς κλίμακος τὸ μέγεθος εἶναι διάστημα μιᾶς συλλαβῆς καὶ διάστημα δι' ὀξειῶν· τὸ δὲ διάστημα δι' ὀξειῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαστήματος τῆς συλλαβῆς κατὰ ἓν ἐπόγδοον (κατὰ ἕνα φθόγγον). Διότι ἀπὸ τῆς ὑπάτης μέχρι τῆς μέσης εἶναι διάστημα μιᾶς συλλαβῆς, ἀπὸ δὲ τῆς μέσης μέχρι τῆς νήτης εἶναι διάστημα δι' ὀξειῶν, ἀπὸ δὲ τῆς νήτης μέχρι τῆς τρίτης εἶναι διάστημα μιᾶς συλλαβῆς, ἀπὸ δὲ τῆς τρίτης μέχρι τῆς ὑπάτης εἶναι διάστημα δι' ὀξειῶν· τὸ διάστημα δὲ μεταξὺ μέσης καὶ τρίτης ἐπόγδοον (δηλ. ἡ συχνότης τῆς τρίτης = sol, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς συχνότητος τῆς μέσης = fa κατὰ $\frac{9}{8}$)· ἡ δὲ συχνότης τῆς συλλαβῆς εἶναι ἐπίτριτος $\left(= \frac{4}{3}\right)$, ἡ δὲ συχνότης τῆς δι᾽ ὀξειῶν εἶναι ἡμιόλιος $\left(= \frac{3}{2}\right)$, ἡ συχνότης δὲ τοῦ ὀγδόου φθόγγου (διαπασῶν) εἶναι διπλασία τῆς τοῦ πρώτου φθόγγου. Κατὰ ταῦτα, ἡ μουσικὴ κλῖμαξ (ἡ ὀκτάβα) ἔχει πέντε φθόγγους συχνότητος $\frac{9}{8}$ ἕκαστον (ἐν σχέσει πρὸς τὸν πρῶτον φθόγγον τῆς ὀκτάβας) καὶ δύο διέσεις (δύο ἡμιτόνια), τὸ διάστημα δὲ δι᾽ ὀξειῶν ἔχει τρεῖς φθόγγους συχνότητος $\frac{9}{8}$ ἕκαστον καὶ μίαν δίεσιν (ἓν ἡμιτόνιον), τὸ διάστημα δὲ μιᾶς συλλαβῆς ἔχει δύο φθόγγους συχνότητος $\frac{9}{8}$ ἕκαστον καὶ μίαν δίεσιν (ἓν ἡμιτόνιον).

7. Ἐκ τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων φαίνεται σαφῶς ὅτι ὁ Φιλόλαος διὰ τῆς λέξεως «συλλαβὴ» ἐννοεῖ τέσσαρας φθόγγους τῆς μουσικῆς κλίμακος καὶ τὸν τέταρτον φθόγγον αὐτῆς (τὴν τετάρτην), διὰ τῆς φράσεως δὲ «δι᾽ ὀξειῶν» ἐννοεῖ πέντε φθόγγους τῆς μουσικῆς κλίμακος καὶ τὸν πέμπτον φθόγγον αὐτῆς (τὴν πέμπτην). Ἐκ τοῦ καθορισμοῦ τῶν πλήρων φθόγγων καὶ τῶν διέσεων (ἐνταῦθα ἡμιτονίων) ὑποδεικνύεται ὁ τρόπος κατασκευῆς τῆς μουσικῆς κλίμακος (τῆς ὀκτάβας).

Ἀναχωρεῖ ὁ Φιλόλαος ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας

$6 : 8 = 9 : 12$, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν πρὸς εὐκολίαν,

$1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2$ (διὰ διαιρέσεως τῶν ὅρων αὐτῆς διὰ 6) . . . . (μ)

8. Ὁ τρόπος κατασκευῆς τῆς μουσικῆς κλίμακος ἔχει κατὰ τὰ προηγούμενα ὡς ἑξῆς (οἱ ἀριθμοὶ ἐκφράζουν συχνότητας):

Πρῶτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας (μ) ὁ 1 = ὑπάτη = κάτω do.

Ὁ δεύτερος φθόγγος λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προηγουμένου φθόγγου, τοῦ 1, ἐπὶ $\frac{9}{8}$, ὁπότε εἶναι $1 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{8}$ = παρυπάτη = re.

Ὁ τρίτος φθόγγος λαμβάνεται ἐπίσης διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προηγουμένου φθόγγου, τοῦ $\frac{9}{8}$ ἐπὶ $\frac{9}{8}$, ὁπότε εἶναι $\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64}$ = λιχανὸς = mi.

Ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς μουσικῆς ἀναλογίας (μ), ὁ $\frac{4}{3}$, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀκραίων ὅρων τῆς μουσικῆς κλίμακος (τῆς ὀκτάβας) τῶν 1 καὶ 2, ὁπότε εἶναι :

$$\text{ἁρμονικὸν μέσον} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{4}{3} = \text{μέση} = \text{fa}.$$

Ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι ὁ τρίτος ὅρος τῆς μουσικῆς ἀναλογίας (μ), ὁ $\frac{3}{2}$, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων τῆς μουσικῆς κλίμα-μακος (τῆς ὀκτάβας), τῶν 1 καὶ 2, ὁπότε εἶναι :

$$\text{ἀριθμητικὸν μέσον} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = \text{παραμέση} = \text{sol}.$$

Ὁ ἕκτος φθόγγος λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προηγουμένου φθόγγου, τοῦ $\frac{3}{2}$, ἐπὶ $\frac{9}{8}$, ὁπότε εἶναι $\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{16}$ = τρίτη = la.

Ὁ ἕβδομος φθόγγος λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προηγουμένου φθόγγου, τοῦ $\frac{27}{16}$, ἐπὶ $\frac{9}{8}$, ὁπότε εἶναι $\frac{27}{16} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{128}$ = παρανήτη = si.

Ὁ ὄγδοος φθόγγος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν ἀκραίων ὅρων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας (μ), ὁ 2 = νήτη, ἄνω do ἔχων διπλασίαν συχνότητα τοῦ πρώτου φθόγγου.

Ἔχει λοιπὸν κατὰ τὸν Φιλόλαον ἡ Πυθαγόρειος μουσικὴ κλῖμαξ ὡς ἑξῆς :

	Ὑπάτη	παρυπάτη	λιχανὸς	μέση	παραμέση	τρίτη	παρανήτη	νήτη
	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
(Μ)	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2.

Κατὰ τὸν Φιλόλαον πάλιν : Ἀρχίζοντες τὴν ἀρίθμησιν ἐκ τοῦ πρώτου φθόγγου πρὸς τὸν ὄγδοον ἔχομεν

do ⟶ fa

Διάστημα συλλαβῆς=4 ἀνιόντες φθόγγοι, οἱ do, re, mi, fa

fa ⟶ ἄνω do

Διάστημα δι' ὀξειῶν=5 ἀνιόντες φθόγγοι, οἱ fa, sol, la, si, do

Ἀρχίζοντες τὴν ἀρίθμησιν ἐκ τοῦ ὀγδόου φθόγγου πρὸς τὸν πρῶτον ἔχομεν

sol ⟵ do

Διάστημα συλλαβῆς=4 κατιόντες φθόγγοι, οἱ do, si, la, sol

do ⟵ sol

Διάστημα δι' ὀξειῶν=5 κατιόντες φθόγγοι, οἱ sol, fa, mi, re, do

Οἱ πλήρεις φθόγγοι (συχνότητος $\frac{9}{8}$ ἕκαστος) εἶναι οἱ ἑξῆς πέντε:

$$\frac{9}{8}, \quad \frac{81}{64}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{27}{16}, \quad \frac{243}{128}.$$

Ἕκαστος φθόγγος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου του κατὰ $\frac{9}{8}$. Ὁ $\frac{3}{2}$ ἔχει προηγούμενον τὸν $\frac{4}{3}$. Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς κλίμακος δὲν λογίζεται.

Τὸ διάστημα (δηλαδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως) μεταξὺ $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{81}{64}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{9}{8}$ καὶ ὁ Φιλόλαος τὸ ὀνομάζει δίεσιν (σήμερον καλεῖται ἡμιτόνιον). Τὸ διάστημα μεταξὺ 2 καὶ $\frac{243}{128}$ εἶναι ἐπίσης μικρότερον τοῦ $\frac{9}{8}$ καὶ ἴσον μὲ τὸ προηγούμενον, διότι εἶναι

$$\frac{4}{3} : \frac{81}{64} = 2 : \frac{243}{128} = \frac{256}{243}$$

καὶ ἑπομένως καὶ αὐτὸ εἶναι μία δίεσις (ἓν ἡμιτόνιον). Ὑπάρχουν λοιπὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω μουσικὴν κλίμακα πέντε φθόγγοι πλήρεις καὶ δύο ἡμιτόνια.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι φανερὰ ἡ κατασκευὴ τῆς μουσικῆς κλίμακος ὑπὸ τοῦ Φιλολάου, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὁ Πλάτων εἰς τὸν Τίμαιον.

9. Καὶ γενικῶς. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ γ, δ ($\gamma < \delta$), οἵτινες ἐκφράζουν συχνότητας καὶ ζητεῖται ἡ κατασκευὴ τῆς μουσικῆς κλίμακος. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Εὑρίσκομεν τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν γ, δ, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{2 \cdot \gamma \cdot \delta}{\gamma + \delta}$. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν γ, δ, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{\gamma+\delta}{2}$.

Κατόπιν σχηματίζομεν τὴν μουσικὴν ἀναλογίαν μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς γ, δ, ὁπότε εἶναι

$$\gamma \quad : \quad \frac{2 \cdot \gamma \cdot \delta}{\gamma+\delta} = \frac{\gamma+\delta}{2} \quad : \quad \delta$$

ὑπάτη		μέση	παραμέση	νήτη
κάτω	do	fa	sol	ἄνω do

Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι ὁ γ — ὑπάτη do

(ὁ γ εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ δεύτερος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\gamma \cdot \frac{9}{8}$ — παρυπάτη re

Ὁ τρίτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\gamma \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8}$ — λιχανὸς mi

Ὁ τέταρτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\frac{2 \cdot \gamma \cdot \delta}{\gamma+\delta}$ — μέση fa

(ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ πέμπτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\frac{\gamma+\delta}{2}$ — παραμέση sol

(ὁ τρίτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ ἕκτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\frac{\gamma+\delta}{2} \cdot \frac{9}{8}$ — τρίτη la

Ὁ ἕβδομος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\frac{\gamma+\delta}{2} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8}$ — παρανήτη si

Ὁ ὄγδοος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι ὁ δ — νήτη do

(ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Β΄

10. Τὸ πρὸς ἑρμηνείαν μουσικὸν χωρίον τοῦ Τιμαίου (35b—36c) ἔχει ὡς ἑξῆς :

Μίαν ἀφεῖλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς μοῖραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφῄρει διπλασίαν ταύτης, τὴν δ' αὖ τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας, τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης, τετάρτην δὲ τῆς δευτέρας διπλῆν, πέμπτην δὲ τριπλῆν τῆς τρίτης, τὴν δ' ἕκτην τῆς πρώτης ὀκταπλασίαν, ἑβδόμην δ' ἑπτακαιεικοσαπλασίαν τῆς πρώτης· μετὰ δὲ ταῦτα συνεπληροῦτο τά τε διπλάσια καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε ἐν ἑκάστῳ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας, τὴν μὲν ταὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην, τὴν δὲ ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην. Ἡμιολίων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπιτρίτων καὶ ἐπογδόων γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν, τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι τὰ ἐπί-

τριτα πάντα συνεπληροῦντο, λείπων αὐτῶν ἑκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὅρους ἓξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια.

(Κατὰ πρῶτον ἀφήρεσεν ἀπὸ τὸ μεῖγμα ἓν μέρος, κατόπιν δὲ ἀφήρεσε διπλάσιον τούτου, κατὰ τὴν τρίτην δὲ φορὰν ἀφήρεσε μέρος ἴσον πρὸς 3/2 τοῦ δευτέρου, τριπλάσιον δὲ τοῦ πρώτου, κατὰ τὴν τετάρτην δὲ ἀφήρεσε μέρος ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου, κατὰ τὴν πέμπτην δὲ μέρος ἴσον πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ τρίτου, κατὰ τὴν ἕκτην δὲ μέρος ὀκταπλάσιον τοῦ πρώτου, κατὰ τὴν ἑβδόμην δὲ εἰκοσιεπταπλάσιον τοῦ πρώτου· μετὰ δὲ ταῦτα συνεπληροῦντο καὶ τὰ διπλάσια καὶ τὰ τριπλάσια διαστήματα, ἐν ᾧ ἐλάμβανε ἀπὸ τοῦ ἀρχικοῦ μείγματος μέρη καὶ τὰ ἔθετε εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε εἰς ἕκαστον διάστημα νὰ εἶναι δύο μεσότητες, ἡ μὲν μία νὰ ὑπερέχῃ καὶ νὰ ὑπερέχεται κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος τῶν ἄκρων, ἡ δὲ νὰ ὑπερέχῃ τόσον ἀριθμόν, ὅσον νὰ ὑπερέχεται. Ἀφοῦ δὲ ἐκ τῶν δεσμῶν αὐτῶν ἔγιναν διαστάσεις ἡμιόλιοι (3 : 2), ἐπίτριτοι (4 : 3) καὶ ἐπόγδοοι (9 : 8) εἰς τὰς πρώτας διαστάσεις, ὅλα τὰ ἐπίτριτα διαστήματα συνεπληροῦντο διὰ τοῦ ἐπογδόου διαστήματος, ἐν ᾧ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν (τῶν δύο) ἔλειπε μόριον ὥστε νὰ ὑπάρχῃ σχέσις ἴση πρὸς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀριθμὸν 256, παρονομαστὴν δὲ τὸν 243).

11. Τὸ νόημα τοῦ ἀνωτέρω χωρίου τοῦ Τιμαίου : Τὰ ἀφαιρεθέντα μέρη ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ μείγματος σχηματίζουν δύο γεωμετρικὰς προόδους :

(α)	**1**	**2**	**4**	**8**
(β)	**1**	**3**	**9**	**27**

Τὰ διπλάσια διαστήματα εἶναι τρία : 1—2, 2—4, 4— 8.
Τὰ τριπλάσια διαστήματα εἶναι ἐπίσης τρία : 1—3, 3—9, 9—27.

Τὰ διαστήματα αὐτὰ τὰ ὀνομάζει εἰς τὸ χωρίον (36α) καὶ διαστάσεις, ἐν ᾧ εἰς τὸ χωρίον (43d) τὰ ὀνομάζει ἀποστάσεις, λέγων εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο «ὥστε τὰς τοῦ διπλασίου καὶ τριπλασίου ***τρεῖς ἑκατέρας*** ἀποστάσεις . . . », ἐννοῶν τὰς ἀνωτέρω ἓξ διαστάσεις ἢ διαστήματα.

Τὰ ἀνωτέρω 6 διαστήματα συνεπληροῦντο διὰ μεσοτήτων, ὥστε εἰς ἕκαστον διάστημα νὰ εἶναι δύο μεσότητες, μία ἁρμονικὴ καὶ μία ἀριθμητική.

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρόκειται περὶ κατασκευῆς ἓξ (6) μουσικῶν κλιμάκων (6 ὀκτάβαι), ἀφοῦ προηγουμένως κατασκευάζονται αἱ ἀντίστοιχοι ἓξ μουσικαὶ ἀναλογίαι.

Εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον (α) κατασκευάζει τρεῖς μουσικὰς κλίμακας (τρεῖς ὀκτάβας) : Ἡ πρώτη κλῖμαξ ἔχει ἄκρους ὅρους 1 καὶ 2 (1 κάτω do καὶ 2 ἄνω do). Ἡ δευτέρα ἔχει ἄκρους ὅρους 2 καὶ 4 (2 κάτω do καὶ 4 ἄνω do). Ἡ τρίτη ἔχει ἄκρους ὅρους 4 καὶ 8 (4 κάτω do καὶ 8 ἄνω do).

Εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον (β) κατασκευάζει ἐπίσης τρεῖς μουσικὰς κλίμακας (3 ὀκτάβας). Ἡ πρώτη κλῖμαξ ἔχει ἄκρους ὅρους 1 καὶ 3 (1 κάτω do, 3 ἄνω do). Ἡ δευτέρα ἔχει ἄκρους ὅρους 3 καὶ 9 (3 κάτω do, 9 ἄνω do). Ἡ τρίτη ἔχει ἄκρους ὅρους 9 καὶ 27 (9 κάτω do, 27 ἄνω do).

Ἡ κατασκευὴ καὶ τῶν 6 κλιμάκων γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἡ διαφορά, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν κλιμάκων ἐκ τῶν δύο γεωμετρικῶν προόδων (α) καὶ (β), εἶναι ἡ ἑξῆς:

Αἱ τρεῖς πρῶται μουσικαὶ κλίμακες ἔχουν τὸ ἄνω do μὲ διπλασίαν συχνότητα τοῦ κάτω do, ὅπως εἰς τὴν Πυθαγόρειον μουσικὴν κλίμακα.

Αἱ ἄλλαι τρεῖς μουσικαὶ κλίμακες ἔχουν τὸ ἄνω do μὲ τριπλασίαν συχνότητα τοῦ κάτω do.

Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑκάστης μουσικῆς κλίμακος νοεῖ πρῶτον τὴν κατασκευὴν ἑκάστης μουσικῆς ἀναλογίας, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν δύο μεσότητες: μία ἁρμονικὴ καὶ μία ἀριθμητική.

12. Ἡ κατασκευὴ τῶν τριῶν πρώτων μουσικῶν κλιμάκων.

Πρῶτον διάστημα. 1 — 2 (ἡ πρώτη διάστασις ἢ πρώτη ἀπόστασις).

Εὑρίσκεται τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2, τὸ ὁποῖον εἶναι:

$$\frac{2\,.\,1\,.\,2}{1+2}=\frac{4}{3}.$$

Ἀκολούθως εὑρίσκεται τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 1 καὶ 2, τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}.$$

Ὥστε εἰς τὸ διάστημα 1 — 2 ὑπάρχουν δύο μεσότητες,

ἡ ἁρμονικὴ $\frac{4}{3}$ καὶ ἡ ἀριθμητικὴ $\frac{3}{2}$,

ἤτοι σχηματίζεται ἡ μουσικὴ ἀναλογία

$$1 \;:\; \frac{4}{3}=\frac{3}{2} \;:\; 2.$$

Ἐκ ταύτης τῆς ἀναλογίας νοεῖ τὴν κατασκευὴν τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος, ὡς αὕτη ἐκτίθεται εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν (§ 8 Μ).

Ἡ πρώτη μουσικὴ κλῖμαξ ἔχει κατὰ ταῦτα ὡς ἑξῆς:

ὑπάτη	παρυπάτη	λιχανὸς	μέση	παραμέση	τρίτη	παρανήτη	νήτη
do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Δεύτερον διάστημα 2 — 4 (ἢ δευτέρα διάστασις ἢ δευτέρα ἀπόστασις).

Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 4 εἶναι :

$$\frac{2 \,.\, 2 \,.\, 4}{2+4} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3},$$

ἐν ᾧ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον εἶναι $\frac{2+4}{2} = 3$.

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι :

$$2 : \frac{8}{3} = 3 : 4.$$

Ἡ ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης μουσικὴ κλῖμαξ εὑρίσκεται, ὡς ἐν τῇ Εἰσαγωγῇ ἐκτίθεται (§ 9). Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι :

Πρῶτος φθόγγος	$2 =$ κάτω do	(ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)
Δεύτερος φθόγγος	$2 \,.\, \frac{9}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} =$ re	
Τρίτος φθόγγος	$\frac{9}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{32} =$ mi	
Τέταρτος φθόγγος	$\frac{8}{3} =$ fa	(ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)
Πέμπτος φθόγγος	$3 =$ sol	(ὁ τρίτος » » » » »)
Ἕκτος φθόγγος	$3 \,.\, \frac{9}{8} = \frac{27}{8} =$ la	
Ἕβδομος φθόγγος	$\frac{27}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{64} =$ si	
Ὄγδοος φθόγγος	$4 =$ ἄνω do	(ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Τρίτον διάστημα 4 — 8 (ἢ τρίτη διάστασις ἢ τρίτη ἀπόστασις).

Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 8 εἶναι :

$$\frac{2 \,.\, 4 \,.\, 8}{4+8} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3},$$

ἐν ᾧ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον εἶναι $\frac{4+8}{2} = 6$.

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι

$$4 : \frac{16}{3} = 6 : 8.$$

Ἡ ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης μουσικὴ κλῖμαξ εὑρίσκεται, ὡς ἐκτίθεται ἐν τῇ Εἰσαγωγῇ (§ 9). Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι :

Πρῶτος φθόγγος $4 =$ κάτω do (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Δεύτερος φθόγγος $4 \cdot \frac{9}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} =$ re

Τρίτος φθόγγος $\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{16} =$ mi

Τέταρτος φθόγγος $\frac{16}{3} =$ fa (ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Πέμπτος φθόγγος $6 =$ sol (ὁ τρίτος » » » » »)

Ἕκτος φθόγγος $6 \cdot \frac{9}{8} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4} =$ la

Ἕβδομος φθόγγος $\frac{27}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{32} =$ si

Ὄγδοος φθόγγος $8 =$ ἄνω do (ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς πρώτας μουσικὰς κλίμακας, ἑκάστης κλίμακος ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι ἐπίτριτος $\left(1 \frac{1}{3}\right)$ τοῦ πρώτου, ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι ἡμιόλιος $\left(1 \frac{1}{2}\right)$ τοῦ πρώτου, ὁ λόγος μεταξὺ τετάρτου καὶ τρίτου φθόγγου εἶναι $\frac{256}{243}$ καὶ ὁ λόγος μεταξὺ ὀγδόου καὶ ἑβδόμου φθόγγου εἶναι ἐπίσης $\frac{256}{243}$. Ὁ πλήρης δὲ φθόγγος εἶναι ἐπόγδοος $\left(\frac{9}{8}\right)$. Ἤτοι εἶναι: [α) = πρώτη κλῖμαξ, β) = δευτέρα κλῖμαξ, γ) = τρίτη κλῖμαξ].

	Πρῶτος φθόγγος	Τέταρτος φθόγγος	Πέμπτος φθόγγος	Λόγος 4ου : 3ου	Λόγος 8ου : 7ου
α)	1	$\frac{4}{3}$ ($\frac{4}{3}$ τοῦ πρώτου ἢ ἐπίτριτον)	$\frac{3}{2}$ ($\frac{3}{2}$ τοῦ πρώτου ἢ ἡμιόλιον)	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$
β)	2	$\frac{8}{3}$ ($\frac{4}{3}$ τοῦ πρώτου ἢ ἐπίτριτον)	3 ($\frac{3}{2}$ τοῦ πρώτου ἢ ἡμιόλιον)	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$
γ)	4	$\frac{16}{3}$ ($\frac{4}{3}$ τοῦ πρώτου ἢ ἐπίτριτον)	6 ($\frac{3}{2}$ τοῦ πρώτου ἢ ἡμιόλιον)	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$

Τὰς τρεῖς αὐτὰς πρώτας κλίμακας ὑπονοεῖ λέγων «Ἡμιολίων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπογδόων γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν, τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι τὰ ἐπίτριτα πάντα συνεπληροῦτο, λείπων αὐτῶν ἑκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὅρους ἓξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια».

13. Ἡ κατασκευὴ τῶν τριῶν δευτέρων μουσικῶν κλιμάκων

Ἡ κατασκευὴ τῶν τριῶν δευτέρων μουσικῶν κλιμάκων γίνεται ὅπως καὶ τῶν τριῶν πρώτων. Εἰς αὐτὰς ὅμως δὲν ὑπάρχουν ἐπίτριτα διαστήματα, οὔτε ἡμιόλια,/οὔτε οἱ λόγοι 256 : 243, ἅτινα ὑπάρχουν εἰς τὰς τρεῖς πρώτας μουσικὰς κλίμακας, τὰς ὁποίας διαχωρίζει διὰ τῆς φράσεως «ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν». Πρόσθεν διαστάσεις εἶναι αἱ τρεῖς πρῶται, ἤτοι :

$$1-2, \quad 2-4, \quad 4-8.$$

Πρῶτον διάστημα 1—3 (ἡ πρώτη διάστασις ἢ πρώτη ἀπόστασις).
Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 3 εἶναι

$$\frac{2\,.\,1\,.\,3}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 1 καὶ 3 εἶναι

$$\frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι

$$1 \;:\; \frac{3}{2} = 2 \;:\; 3.$$

Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς μουσικῆς κλίμακος εἶναι 1=κάτω do (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ δεύτερος φθόγγος εἶναι $1\,.\,\frac{9}{8} = \frac{9}{8} = \mathrm{re}$

Ὁ τρίτος φθόγγος εἶναι $1\,.\,\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8} = \frac{81}{64} = \mathrm{mi}$

Ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι $\frac{3}{2} = \mathrm{fa}$ (ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι $2 = \mathrm{sol}$ (ὁ τρίτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ ἕκτος φθόγγος εἶναι $2\,.\,\frac{9}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = \mathrm{la}$

Ὁ ἕβδομος φθόγγος εἶναι $\frac{9}{4}\,.\,\frac{9}{8} = \frac{81}{32} = \mathrm{si}$

Ὁ ὄγδοος φθόγγος εἶναι 3 = ἄνω do (ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Δεύτερον διάστημα 3—9 (ἢ δευτέρα διάστασις ἢ δευτέρα ἀπόστασις).

Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 9 εἶναι

$$\frac{2 \,.\, 3 \,.\, 9}{3+9} = \frac{54}{12} = \frac{9}{2}\,.$$

Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 3 καὶ 9 εἶναι $\frac{3+9}{2} = 6.$

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι

$$3 \;:\; \frac{9}{2} = 6 \;:\; 9$$

Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς μουσικῆς κλίμακος εἶναι 3=κάτω do (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ δεύτερος φθόγγος εἶναι $3 \,.\, \frac{9}{8} = \frac{27}{8} =$ re

Ὁ τρίτος φθόγγος εἶναι $\frac{27}{8} \,.\, \frac{9}{8} = \frac{243}{64} =$ mi

Ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι $\frac{9}{2} =$ fa (ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι $6 =$ sol (ὁ τρίτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ ἕκτος φθόγγος εἶναι $6 \,.\, \frac{9}{8} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4} =$ la

Ὁ ἕβδομος φθόγγος εἶναι $\frac{27}{4} \,.\, \frac{9}{8} = \frac{243}{32} =$ si

Ὁ ὄγδοος φθόγγος εἶναι $9 =$ ἄνω do (ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Τρίτον διάστημα 9—27 (ἢ τρίτη διάστασις ἢ τρίτη ἀπόστασις).

Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 27 εἶναι

$$\frac{2\,.\,9\,.\,27}{9+27} = \frac{486}{36} = \frac{27}{2}\,.$$

Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 9 καὶ 27 εἶναι

$$\frac{9+27}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι

$$9 \;:\; \frac{27}{2} = 18 \;:\; 27.$$

Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς μουσικῆς κλίμακος εἶναι $9 =$ κάτω do (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ δεύτερος φθόγγος εἶναι $9\,.\,\frac{9}{8} = \frac{81}{8} =$ re

Ὁ τρίτος φθόγγος εἶναι $\frac{81}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{729}{64} =$ mi

Ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι $\frac{27}{2} =$ fa (ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι $18 =$ sol (ὁ τρίτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ ἕκτος φθόγγος εἶναι $18\,.\,\frac{9}{8} = \frac{162}{8} = \frac{81}{4} =$ la

Ὁ ἕβδομος φθόγγος εἶναι $\frac{162}{8}\,.\,\frac{9}{8} = \frac{1458}{64} = \frac{729}{32} =$ si

Ὁ ὄγδοος φθόγγος εἶναι $27 =$ ἄνω do (ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

14. Ἀναγράφομεν κατωτέρω ἐν ἀνακεφαλαιώσει τὰς ἕξ μουσικὰς κλίμακας, τὰς ὁποίας νοεῖ, κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν, τὸ χωρίον τοῦ Τιμαίου (35b—36c).

Πρώτη κλῖμαξ

ὑπάτη	παρυπάτη	λιχανὸς	μέση	παραμέση	τρίτη	παρανήτη	νήτη
do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Δευτέρα κλῖμαξ

2	$\frac{9}{4}$	$\frac{81}{32}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{27}{8}$	$\frac{243}{64}$	4

Τρίτη κλῖμαξ

4	$\frac{9}{2}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{16}{3}$	6	$\frac{27}{4}$	$\frac{243}{32}$	8

*

Τετάρτη κλῖμαξ

1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{81}{32}$	3

Πέμπτη κλῖμαξ

3	$\frac{27}{8}$	$\frac{243}{64}$	$\frac{9}{2}$	6	$\frac{27}{4}$	$\frac{243}{32}$	9

Ἕκτη κλῖμαξ

9	$\frac{81}{8}$	$\frac{729}{64}$	$\frac{27}{2}$	18	$\frac{81}{4}$	$\frac{729}{32}$	27

*

15. Ἐὰν θέλωμεν νὰ μετατρέψωμεν τὰς συχνότητας τῶν φθόγγων εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς, εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῆς πρώτης κλίμακος (384) καὶ μετατρέπομεν ὅλους τοὺς φθόγγους αὐτῆς εἰς ὁμώνυμα κλάσματα. Ἀκολούθως μετατρέπομεν τοὺς φθόγγους τῶν λοιπῶν πέντε κλιμάκων εἰς ὁμώνυμα κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὸν 384. Παραλείποντες τοὺς παρονομαστὰς καὶ τῶν ἓξ κλιμάκων, λαμβάνομεν τὰς κάτωθι ἓξ ὀκτάβας, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες τῶν φθόγγων εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Κατὰ ταῦτα εἶναι :

Πρώτη Κλῖμαξ

ὑπάτη	παρυπάτη	λιχανὸς	μέση	παραμέση	τρίτη	παρανήτη	νήτη
do	re	mi	fa	sol	la	si	do
384	432	486	512	576	648	729	768

Λευτέρα κλῖμαξ

768	864	972	1024	1152	1296	1458	1536

Τρίτη κλῖμαξ

1536	1728	1944	2048	2304	2592	2916	3072

*

Τετάρτη κλῖμαξ

384	432	486	576	768	864	972	1152

Πέμπτη κλῖμαξ

1152	1296	1458	1728	2304	2592	2916	3456

Ἕκτη κλῖμαξ

3456	3888	4374	5184	6912	7776	8748	10368

Θεωροῦμεν πιθανὸν ὅτι ὁ Πλάτων λαμβάνει ἓξ μουσικὰς κλίμακας, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 6 εἶναι ὁ πρῶτος τέλειος ἀριθμός, ἤτοι εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἰσοῦται πρὸς τὰ μέρη του ($1 + 2 + 3 = 6$).

APERÇU

Contribution à l'interprétation d'un passage du dialogue Timée de Platon, se rapportant à la musique (35b - 36c).

Par. EVANGELOS S. STAMATIS

A'

A titre d'introduction est donné un extrait d'Archytas de son traité «**sur la musique**», que nous trouvons dans les commentaires de Porphyre sur les **harmoniques** de Ptolémée et sont démontrées les inégalités des rapports formés avec les termes des médiétés arithmétique et harmonique, dont les preuves ont été perdues (§ 1).

Ensuite sont rapportées les indications données par Nicomaque, Théon de Smyrne et Jamblique au sujet des médiétés arithmétique, géométrique, harmonique et de la proportion musicale (§ 2, 3).

Aussi est donnée la construction de la gamme musicale Pythagoricienne par Philolaos (§ 6, 7, 8, 9).

B'

Dans les deux progressions géométriques que forme Platon, il est clair qu'il existe en tout six intervalles musicaux, à savoir : trois dans chaque progression géométrique, soit :

1—2, 2—4, 4—8 (trois intervalles doubles)
1—3, 3—9, 9—27 (trois intervalles triples)

Dans chacun de ces six intervalles il forme la proportion musicale, dont le deuxième terme est la moyenne harmonique des termes extrêmes de la proportion et le troisième terme est la moyenne arithmétique de ces mêmes termes extrêmes. De sorte que les six proportions musicales seraient :

a) $1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2$, b) $2 : \frac{8}{3} = 3 : 4$, c) $4 : \frac{16}{3} = 6 : 8$

d) $1 : \frac{3}{2} = 2 : 3$, e) $3 : \frac{9}{2} = 6 : 9$, f) $9 : \frac{27}{2} = 18 : 27$ (§ 10,11)

Ensuite, il forme en partant des trois premières proportions musicales, trois gammes musicales pythagoriciennes (§ 12), dans lequelles on trouve les intervalles un plus un demi, un plus un tiers et un plus un huitième. Ce n'est que dans ces trois gammes que

$$\text{a)} \qquad \frac{4}{3} : \frac{51}{64} = 2 : \frac{243}{128} = \frac{256}{243},$$

$$\text{b)} \qquad \frac{8}{3} : \frac{81}{32} = 4 : \frac{243}{64} = \frac{256}{243},$$

$$\text{c)} \qquad \frac{16}{3} : \frac{81}{16} = 8 : \frac{243}{32} = \frac{256}{243}.$$

Est aussi concevable la formation de trois autres gammes musicales (§ 13) en partant des proportions musicales d, e, f, dans lesquelles toutefois ne se trouvent pas les intervalles un plus un demi,/et un plus un tiers, pas plus que le rappor $\frac{256}{243}$, mais seulement les intervalles un plus un huitième et

$$\text{a)} \qquad \frac{3}{2} : \frac{81}{64} = 3 : \frac{81}{32} = \frac{32}{27},$$

$$\text{b)} \qquad \frac{9}{2} : \frac{243}{64} = 9 : \frac{243}{32} = \frac{32}{27},$$

$$\text{c)} \qquad \frac{27}{2} : \frac{729}{64} = 27 : \frac{729}{32} = \frac{32}{27}.$$

En prenant comme unité le chiffre 384, soit le plus petit commun multiple des dénominateurs des notes de la première gamme musicale, nous convertissons les notes des six gammes musicales en nombres entiers exprimant des fréquences de cordes vibrantes, bien entendu de longueurs différentes (§ 14, 15).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ἀριστείδου Κοϊντιλιανοῦ, Περὶ μουσικῆς, I § 8 p. 15, ἔκδ. R. P. Winnington - Ingram, B. G. Teubner, Λειψία 1963 (Aristides Quintilianus, de musica I 8).

Πλουτάρχου Ἠθικὰ VI. 1. Περὶ τῆς ἐν Τιμαίῳ ψυχογονίας, ἔκδ. C. Hubert, B. G. Teubner, Λειψία 1954 (Plutarchi Moralia Vol. VI. 1. 1012).

Πλουτάρχου Ἠθικὰ VI. 3. Περὶ μουσικῆς, ἔκδ. K. Ziegler - M. Pohlenz, B. G. Teubner, Λειψία 1953 (Plutarchi Moralia VI. 3, 1131).

Πρόκλου Εἰς τὸν Τίμαιον Πλάτωνος, τόμ. II σ. 211—231, ἔκδ. E. Diehl, B. G. Teubner, Λειψία 1904. (Proclus Diadochus in Platonis Timaeus commentaria).

Ψελλὸς Μιχαήλ. Εἰς ψυχογονίαν Πλάτωνος, Πατρολογία Migne τόμ. 122, στήλη 1078. (Psellos, Michael, Patrologia graeca tom. 122 col. 1078).

Diels Hermann. Fragmente der Vorsokratiker I (Archytas, Philolaos).

Moutsopoulos, Evanghélos. La musique dans l'oeuvres de Platon, Presses Universitaires de France, Paris 1959.

Pauly - Wissowa R. E. Musik.

Rivaud, Albert. Platon oeuvres complètes, tome X, Timée - Critias, p. 42—52, Les Belles Lettres (C. Budé, Paris 1949).

Taylor, A. E. A commentary of Plato's Timaeus, Oxford 1928.