

στοτε διὰ τῆς κατατίξεως εἰς τι σύντηρο ἀριθμὸν ή ἀκατου-  
μένη ποιοτικὴ συμπλήρωσις.

Ἐν τῇ περιστάσει, διὰ ἐκαστος ἀριθμὸς διάφορος τῆς μονί-  
δος παριστᾶ σχέσιν τινὰ ἐνδεῖ λόγος, ὅστις ἔγει ἡμᾶς ὑπὲρ τὰ ὅρια τῆς ἐννοίας τοῦ  
**μεμονωμένου ἀριθμοῦ.** Ἀφοῦ ίδιαιτέρως ἐν τῷ πλεομετικῷ  
ἀριθμῷ η σχέσις ἐκείνη δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τίνος ἐνφρά-  
σεως, ήτις συγκαταται ἐκ δύο διαφόρων ἀριθμῶν, ή μετάβασις  
εἰς μίαν ἐπέκτασιν τῆς οὕτω προκατατησθεῖσας ἐννοίας τῆς σχέσεως  
δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ εὐκόλως. Η ἐπέκτασις δημοσιεύεται αὐτῇ οὐγί-  
σταται ἐν τούτῳ, διὰ τοὺς ὅρους τῆς σχέσεως δὲν θεωροῦμεν  
πλέον διαστατικὰ μέρη, ἀνήκοντα εἰς μίαν μερογομένην ἐννοίαν  
**ἀριθμοῦ**, ἀλλ' ὡς ἀριθμὸν αὐθιναίστον, οἵτινες ἔννοεν τῆς πρὸς  
ἄλληλους σχέσεως νοοῦνται ὡς ἐξαρτώμενοι ἀπ' ἄλλοις ἔργο-  
βιστοῖς. Η οὕτω προκατατησθεῖσα ἐννοία εἶναι η τῆς συναρτήσεως.

### 2. Συνάρτησις.

Η πρώτη ἀριθμοῖ, οὐατες νοῦμεν δύο ἀριθμοὺς ἐν ὀμοιοτάτῳ  
ἐξαρτήσει, δίδεται οὖτε ὁ εἰς παραγέται ἐκ τοῦ ἐτέρου. Η λο-  
γικὴ πρᾶξις τῆς γενέσεως τούτης εἶναι η **ἀριθμητικὴ πρᾶξις**, η  
δὲ μεταξὺ τῶν ἀρχαριῶν καὶ τῶν ἐξ αὐτῶν παραγορέντων ἀριθ-  
μὸν ἀμοιβαίνει σχέσις ἀποτελεῖ τὴν διὰ τῆς σφράγεως σύνδεσιν.  
Πάσσαι αἱ ἀριθμητικὲς πρᾶξεις συμβίζονται ἐκαὶ τῶν δύο ἀρχαριῶν  
ἐνεργειῶν τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τῆς ἀντιστροφῆς αὐτῆς, ἐκαὶ τῆς  
προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως μονάδων. Καὶ αἱ σύνθετοι πρᾶ-  
ξεις, οἵτινες προκατατοῦσιν ἐκ τῆς ἀρχαρικῆς προσθέσεως μονάδων,  
δύνανται μεταύτως καὶ ἀντιστρέψονται, οὕτως ἀποτελεῖται ἀριθμός,  
ὅστις διὰ μιᾶς τῶν τεσσάρων θεμελιωδῶν πρᾶξεων, τῆς προσθέ-  
σεως, τῆς ἀφαιρέσεως, τῶν πολλαπλασιασμῶν καὶ τῆς διαιρέσεως,  
καθὼς καὶ διὰ τῆς ἐπαναλαίψεως τῶν δύο τελευταίων πρᾶξεων,  
τῆς εἰς δύναμιν ἀντιτίθεσις καὶ τῆς ἐξαγωγῆς ἥπτης, προέρχονται  
ἐξ ἄλλου τινός, δύναται νὰ διανείγεται διὰ τῆς ἐνυπερέης αἱ πρά-  
ξεις εἰς τοῦτον. Οὕτω πᾶσαι πραξεολογικὴ σύνδεσις περιλαμβά-  
νει **ἀμοιβαίαν** τινὰ ἐξάρτημαν δύο ἀριθμῶν, ὁ γεφεύτηρ ἢ οὗτος  
τοῦ ἀμοιβαίου λογικοῦ παθορισμοῦ ἀποτιμένει εἰς τάσσεις τῶν ἀριθ-  
μογάς, εἰς ἃς ὑποβιάλλεται η ἐννοία τῆς λογικῆς ἐξαγωγῆς οὐκί-  
μαθηματικῶν πεδίων. Επειδὴ δὲ ἐνυπερέη πᾶσαι ἐξάρτημαται πρά-  
ξεσται ἐπὶ πραξεολογικῆς συνδέσεως καὶ ἐπειδὴ οὐδερίοι πρᾶξεις  
ὑπάρχει, ήτις νὰ νοῆται ὡς μὴ δυναμένη ν' ἀντιστρέψεται, εἴναι

κατὰ γενικῶν πανόντα δυνατὸν νὰ νοῶμεν τὴν αἰτίαν καὶ τὴν ἀκολουθίαν ὡς ἐναλλασπομένας πρὸς ἄλληλας, δύσον καὶ μὲν οὐδεδομένη ἀλληλουχία τῶν ἐννοιῶν δίδῃ τὴν προτέρην εἰς τὸν ἔνα ἐκ τῶν δύο τούτων τρόπων τῶν ἀπόψεων.

Ἐκ τῆς πραξεολογικῆς συνδέσεως προκύπτει οὐ ἐννοιά τῆς **συναρτήσεως**, ἀλλα ὡς οἱ δύο ἀριθμοί, οἵτινες διά τινος πράξεως σχετίζονται ἀμοιβαίως πρὸς ἄλληλους, νοηθῶσιν οὐχὶ πλέον ὃς συνεχῶς δεδομένα, ἀλλ' ὡς **μεταβλητὰ ποσά**. “Ο ἀριθμός, ὅστις διὰ τῆς μεταβλητῆς αὐτοῦ ἐκτελουμένης πρᾶξεως παράγει τὸν ἔτερον, καλεῖται τότε **ἀνεξαρτήτως μεταβλητός**, οὐ δὲ διὰ τῆς πράξεως ταύτης παραγόμενος κατ' **ἔξαρτησιν μεταβλητός ἀριθμός**. “**Άλλως** συνέπεται ἐκ τῆς ἀρχῆς ταύτης, — δύσον καὶ μὲν τοῦτο εἶναι ἀσκοπὸν καὶ δὴ ἀπίστευτον ἐν μονομερεῖ περιεπέσει, — ὅτι **ὁ ἔξηρτημένος** δύναται νὰ νοῆται πάντοτε ὡς **κατ' καὶ ἀντιστρόφως, ὅτι **ὁ δεύτερος** δύναται νὰ νοῆται ἀντὶ τοῦ πρώτου. Ἐπειδὴ δύτις ἥδη αἱ ἀπλαῖ ἀριθμητικὲς ἀριθμοὶς ἀποτελοῦσι λίμαν κλίματα, ἐν τῷ οὐ οὐραναλήψεως προκύπτει πάντοτε ἐκ τῆς προηγουμένης διὰ τῆς ἐπιεναλήψεως δύτις πρᾶξεως, οὐ σύνδεσις κατὰ τὴν ἀμοιβαίων **ἔξαρτησιν** δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἀπ' ἄλληλων δὲν διφεύλει νὰ ἐπιτυχάνεται ἀναγκαίως ἐκ μιᾶς καὶ μόνης πρᾶξεως, ἀλλὰ πιθανὸν νὰ παραστῇ οὐ μάγνη οἰασδήποτε ἐπιεναλήψεως οὐ καὶ ἀκολουθίας διαφόρον πρᾶξεων, δύτις προτιμήῃ οὐ **ἀνεξαρτήτως μεταβλητός** ἀριθμὸς ἐκ τοῦ κατ' **έξαρτησιν μεταβλητοῦ**. “Οθεν ὁ μόνος γενικὸς ὅρος ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐννοίας τῆς συναρτήσεως εἶναι, ὅτι δίδονται δύο σειραὶ ἀριθμῶν, εἴς ὃν οὐ μία διάτινος ὠρισμένης πρᾶξεως οὐ διὰ σειρᾶς ἀλλεπαλλήλων πρᾶξεων δύναται νὰ σταχάγεται κατὰ τοιοῦτον τρόπον ἐκ τῆς ἑτέρας, ὅπερ εἰς ἐκαστον ἀριθμὸν τῆς μιᾶς σειρᾶς ν' ἀντιστοιχῇ εἰς ἀριθμὸς τῆς ἄλλης. Κατὰ ταῦτα οὐ συνάρτησις προκύπτει ἐκ τῆς πραξεολογικῆς συνδέσεως τῇ προσθήκῃ τῆς ἐννοίας τῆς μεταβολῆς τῶν συνδεομένων πυσῶν. “Αλλα ὡς οἱ διὰ τοιαύτης συνδέσεως συνδεόμενοι ἀριθμοὶ θεωρηθῶσιν ὡς μεταβλητοί, ἀναφραίνεται ἐπίσης οὐ ἀμοιβαία αὐτῶν **έξαρτησις** ὡς **έξαρτησις μεταξὺ δύο μεταβολῶν**. “Ο εἰς ἀριθμὸς εἶνε οὐ συνάρτησις τοῦ ἑτέρου, διότι συνεπείᾳ τῶν μεταβολῶν τούτων μεταβάλλεται ἐπίσης καθ' ὠρισμένον δι' ἐκάστην συνάρτησιν ἀμετάβλητον νόμον. ‘**Άλλ'** οὐ νόμος οὗτος εἶναι πάλιν δεδομένος ἐν τῇ πραξεολογικῇ συνδέσει, δι' οὐ εἰς ἐκάστην ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ ἀνεξαρτήτως μεταβαλλομένου ἀριθμοῦ ἀντιστοιχεῖ ἀριθμητική τις τιμὴ τοῦ **έξηρτημένως μετα-****

βαλλομένου. Ἐν τούτῳ εὑρίσκεται ἀποχρῶσις τις αὐτία, δι' οὗ κατὰ τὸν καθορισμὸν τῆς ἐννοίας τῆς συναρτήσεως ή ἐννοιαὶ τοῦ ἀριθμοῦ λαμβάνει τὴν γενικιτάτην σημασίαν τις. Ἰναὶ η ἐννοία τῆς μεταβολῆς νοῆται ἐν τῇ πλήρει αὐτῆς γενικότητι, η μεταβολὴ δέοντα οὐδὲ φερόμενη οὐδὲ δέχεται μεταξὺ τῶν δρίων, ἐντὸς τῶν δποίων τελεῖται, πᾶσαν οἰανδίποτε τιμήν. Ἡ συνεχὴς δημιουργίας μεταβολὴ εἶναι η γενικιτάτη, διότι αἱ ἐν αὐτῇ ὑπαντθεῖσαι τιμαὶ ἐκπεριέχουσιν ἐπίστις πάντα τὰ διὰ συνεχοῦς η ἀλιματικῆς μεταβολῆς προκύπτοντα ποσά. Κατὰ τὸν τρόπον τούτον οὐ μόνον αἱ εἰδικαὶ συνθῆκαι, αἱ παρομαρτοῦσαι εἰς τὴν ἐφαρμογὴν ἐπὶ ψυχικούντων γεωμετρικῶν καὶ μηχανικῶν προβλημάτων, ἐπιτρέπονταιν ἐκ τῶν προτέρων τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐννοίας τῆς συναρτήσεως ἐπὶ συνεχῶν ποσῶν, ἀλλὰ καὶ η πρὸς τοῦτο γενικὴ συνθήκη ἔγκειται εἰς τὸν πρὸς τὴν ἐννοιαν τῆς συναρτήσεως συνδεδεμένον χαρικτῆρα τῆς ἀμοιβαίας συμμεταβολῆς. Ἐκ τῆς ἐννοίας τῆς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως, ἐν οἷς η ἀμοιβαία συμμεταβολὴ ἔχει τὴν ὑηθεῖσαν γενικιτάτην μορφήν, προέκυψε διὰ τίνος αὐθαιρέτως εἰσαχθέντος περιορισμοῦ η ἀριθμητικοθεωρητικὴ ἐννοία τῆς συναρτήσεως, ἐν οἷς τὰ ἐν σχέσει συναρτήσεως εὑρισκόμενα ποσὰ ἔχουσιν ἀποκλειστικῆς σημασίαν ἀκεραιῶν ἀριθμῶν. Οὕτω διὰ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἐννοίας τῆς συναρτήσεως τερματίζεται η γενίκευσις ἐκείνη τῆς ἐννοιας τοῦ ἀριθμοῦ, οἵτις ἥρξατο μετὰ τῆς γενέσεως τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, ἐπειδὴ η ἔρευνα τῶν διὰ τῆς πραξιολογικῆς συνδέσεως συνδεδεμένων ἀριθμῶν, ὅποια τὴν ἐποφίν τῆς συναρτήσεως, ἄγει ημᾶς ἀναγνώσεις, ἀντιληφθεῖν τίνα τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, καθ' οὓς η ἀριθμὸς βραδύτερα ἀναγνωριζεῖσαι συνεχῆς μορφὴ τῆς πασότητος δέοντα εἰς τὸ ἕξῆς οὐδὲ ἐμφανίζεται. ὡς γενικιτάτη μορφὴ ἀριθμοῦ. Πράγματι, οἵσιν δύσπιλον εἶναι οὐδὲ παραγάγομεν συνεχῆ πολλότητα ἐκ κεχωρισμένων αὐτὸν ἀλλήλων στοιχείων, τοσοῦτον εἴνιοιν εἶναι νοῦς ἀποσπάσθωμεν ἐν τῆς πολλότητος ταύτης διακεχριμένη μέρη, ὅστε ἀνεξαρτήτως τῆς εἰς οὓς ἀνήκουσι συνεχεῖας οὐδὲ φερόμενον αὐτὰ οὐδὲ ἀποτελοῦνται ὅλον τι.

Ἡ μορφὴ συναρτήσεως τίνος καθορίζεται, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν ἀντοτέρω μνημονευθέντων ὅψων τῆς γενέσεως αὐτῆς, ἀμέσως ὅποι τοῦ νόμου, οἵσις συνδέει τὰ ἐξηρτιμένα πρὸς τὰ ἀνεξαρτήτως μεταβαλλόμενα ποσά. Ἄλλ' οὐδιος οὕτως ἀπορρέει πάλιν ἐκ τῆς μεταξὺ τῶν πόσων ἐκείνων ἐνυπαρχούσις πραξιολογικῆς συνδέσεως. Οὕτως εἶναι ἀναγκαῖα τῶν ὅρων τούτων ἀκολουθία τὸ οὗτι αἱ θεμελιώδεις μορφαὶ τῆς συναρτήσεως ἀνά-

γονται εἰς τὰς θεμελιώδεις ἀριθμητικὰς πράξεις. "Οταν αἱ πράξεις αὖται συνίστανται ἐξ μπλῶν ἢ ἐπαναλαμβανομένων προσθέσεων, ἀφαιρέσεων, καὶ πολλαπλασιασμῶν, τουτέστιν ἐκ πράξεων, δν ἡ ἔκτελεσις ἐκ δεδομένων ἀκεραίων ἀριθμῶν παρέχει πάντοτε ἀριθμοὺς ἀκεραίους, μιρροῦται ἡ μιρροφή τῆς **ἀκεραίας συναρτήσεως**. "Οταν τούναντίον καὶ διαιρέσεις, κατὰ τὴν ἔκτελεσιν τῶν διποίων προκύπτουσιν ὡς ἔξαγόμενα **κλασματικοὶ ἀριθμοὶ**, εἰσέρχονται εἰς τὸν νόμον τοῦ παθορισμοῦ τῶν ἔξαρτήσεων, προκύπτει ἡ μιρροφή τῆς **κλασματικῆς συναρτήσεως**. "Οταν δὲ ἐν τέλει ἡ σύνδεσις εἴνε τοιαύτῃ, ὥστε νὰ δύναται νὰ συγκροτήται μόνον **διπλεῖς** ἀριθμοὶ πράξεων, μιρροῦται ἡ **ἕπερβατὴ συνάρτησις**. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τὰ τρία ταῦτα εἴδη συναρτήσεων ἀντιποιοῦνται τελείως πρᾶξ τὰ τρία εἴδη τῶν ἀριθμῶν, ἵπται πρὸς τοὺς **ἀκεραίους**, τοὺς **κλασματικοὺς** καὶ τοὺς **δυναμέτρους**. Οὗτος ἐπαναλαμβάνεται εἰς ταῦτα τὰ εἴδη τῆς συναρτήσεως ἐπὶ ἀνωτέρας βαθμίδος, τουτέστιν ἐν τῇ συνδέσει ἀριθμῶν, νοούμενων ὡς μεταβλητῶν, ἡ αὐτὴ οχέσις, ἥτις εὑρίσκεται εἰς τὰς πατηγορίας τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν μονάδων αὐτῶν. "Οταν ἐν τέλει ἡ συναρτησιακὴ σχέσις εἴνε σύνθετος, οὗτος ὥστε τὸ ἔξηρτημένον ποσὸν παθορίζεται συγχρόνως ὑπὸ πλειόνων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, δν αἱ παθορίζεται τιμαὶ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς συστατικὰ μέρη μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ, μιρροῦται μία συνάρτησις **μιγαδικῶν μεταβλητῶν**. Κατὰ ταῦτα ἡ διαφορὰ τῆς τοιαύτης μιρροφῆς τῆς συναρτήσεως ἀντιποιούνεται πρὸς τὴν κατὰ ποιὸν χαρακτηριστικὴν ἴδιότητα τοῦ **μιγαδικοῦ συστήματος** τῶν **ἀριθμῶν** ἔναντι τῶν συστημάτων τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνιτικῶν ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ προκειμένου περὶ μιγαδικῆς συναρτήσεως εἰς ὠρισμένην τινὰ τιμὴν τῶν ἔξηρτημένων μεταβλητῶν δύνανται ν<sup>ο</sup> ἀντιστοιχῆσι διάφοροι, καὶ δὴ ἀπειράριθμοι, συνδυασμοὶ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, τῶν διαμορφούντων μιγαδικόν τινα ἀριθμόν, συντελεῖται ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ τῆς συναρτήσεως σημαντικὴ τις ἐπέκτασις τῆς γενικῆς ἔννοίας τῆς συναρτήσεως ἐφ' ὅσον ἔνταῦθα ἡ ἀμοιβαία ἔξαρτησις τῶν μεταβλητῶν παθίσταται ἐν ταῦτῷ πλειονότιμος<sup>1</sup>. Τὸ ἔξαγόμενον τοῦτο ἔχει ἐπίσης ἀπὸ λογικῆς ἀπόψεως μεγίστην σπουδαιότητα. Τοῦτο δὲ παρέχει ὑμετον ἀπόδειξιν, ὅτι ἡ μονάδιμος<sup>2</sup> σύνδεσις αὐτίμιας καὶ ἀποτελέσματος, καίτοι εἴνε ἐν ταῖς

1. Δηλαδὴ οὐχὶ ἔνιαία.
2. Τουτέστιν ἔνιαία.

ἀπλαῖς συναρτήσεσιν ἢ συνήθιης καὶ δύναται διὰ τῆς εἰσαγωγῆς περιοριστικῶν τινῶν ὅρων συχνάσ τροπαιμένου καὶ περὶ μηδικῶν συναρτήσεων νὰ ἐπιτευχθῇ, παρουσιάζει ὅμως, οὐκταξιμένη καθ' ἑαυτήν, εἰδικὴν περίπτωσιν, ἐμφανιζόμενην δισκίας αἱ ὁρίζουσαι τὴν ἔξαρτησιν μαθηματικὴ πράξεις εἶναι σχετικῶς ἀπλαῖς. Κυρίως δὲ περιορισμὸς οὗτος δὲν εἶναι ἀναγκαῖος, διότι σύνδεσίς τις, συνφδὰ τῇ αἵτιᾳ καὶ τῷ ἀποτελέσματι, ἀπαιτεῖ μὲν πάντοτε, ἵνα εἰς μίαν ὁρισμένην αἵτιαν ἀντιπορίνεται ἐν μόνον ὁρισμένον ἀποτέλεσμα, τὸ δεδομένον ὅμως ἀποτέλεσμα τοῦτο δύναται νὰ προκύψῃ ἐκ διαφόρων αἵτιων. Κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τῆς λογικῆς γενικῆς ἔξαρτησεως εἰς τὴν μαθηματικὴν συνάρτησιν τότε μόνον περιστηρεῖται κατὰ πανόντι ἡ περίπτωσις τῆς ἀποδόσεως πλειόνων νοητῶν αἵτιων εἰς ἐν καὶ τὸ αὐτὸν ἀποτέλεσμα, ἵνται τὰ ἀνεξαρτήτως μεταβλητὰ στοιχὲ δύνανται εἰδίνειν νὰ μεταβλητούνται ἀνεξαρτήτως ἄλλικον, διότι τότε ἐμάστη τῶν περιστήτων καὶ ἡ τῶν εἰσερχομένων εἰς τὴν μηδικὴν συνάρτησιν ~~σημασία~~ (ω-τ-ιγ) δύναται νὰ λαμβάνῃ διαπροστίτευτος τιμῆς, ἐνῷ ή συνάρτησις καὶ διατηρεῖ πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμήν. Κατὰ τεῦτα χάνει ἐπίσημης διὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην πλειονοτέρων συναρτήσεων ἡ ἄλλως ἔγκυρος ἀρχή, διτι ἐμάστη συνάρτησις εἶναι λογικὸς ἀμοιβαῖος παθορισμός, τὴν ἑαυτῆς λογίαν, μόστις ἡ πλειονότερης συνάρτησις εἶναι μονότιμος λογικὴ ἔξαρτησις, καθ' ἥν τὸ αὐτὸν ἀποτέλεσμα δύναται νὰ προκύψῃ ἐκ διαφόρων αἵτιων. Ἡ μορφὴ τῶν πλειονοτέρων συναρτήσεων ἔγει ἐν τέλει εἰς τινὰ διαιρόφωσιν τῆς ἐννοίας τῆς συναρτήσεως, μαζὶ ἥν ἡ προσπόθεσις τῆς καταγωγῆς ὁρισμένης τινὸς σχέσεως οὐρανὸς ἀριθμῶν ἐκ πραξεολογικῆς συνδέσεως ἐγκαταλείπεται ἐξ διλογίδου, διατηρουμένης μόνον τῆς γενικῆς *εννοίας τῆς ἔξαρτησεως*. "Οταν εἶναι δινάτον, ὅπως δεδομένη τις σειρὰ ἀριθμῶν, οἵτινες θεωροῦνται ὡς ἔξηρτημένα μεταβλητὰ στοιχὲ οἰκαδήποτε μορφῆς συναρτήσεως, προκύπτῃ ἐκ συνθέσεων πράξεων οἰκουδήποτε εἴδους μετ' ἀπειροφύλμων ἀνεξαρτήτως μεταβλητῶν στοιχῶν, δύναται σειρά τις οἰκαδήποτε ἀριθμῶν νὰ θεωρηθῇ πάντοτε ὡς ἀνήκουστη εἰς τὰ δυνατὰ ταῦτα μεταβλητὰ στοιχέα, ἕμιας ὡς εἰς ἐκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἀντιστοιχῇ ὁρισμένος τις ἀριθμὸς τῆς ἐπέρας. Κατὰ τὸν τρόπον τούτον προκύπτει ἡ μορφὴ τῆς αὐθαιρέτου συναρτήσεως. "Οσον ἀφορᾷ εἰς τὸν τρόπον τῆς γενέσεως αὐτῆς, ἡ αὐθαιρέτος αὕτη συνάρτησις προσῆλθεν ἐκ προσποθέσεων ἀρειδομένων ἐπὶ λίαν πολυπλόκου πραξεολογικῆς συνδέσεως. διὰ τοῦτο δὲ ἀριθμῶς εἶναι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτῆς, καὶ ἡ ἀπλῆς γε-

νικωτάτη. Διότι ἐν αὐτῇ οὐδαμῶς λαμβάνεται ὅπ' ὅψιν ἢ προ-  
ϋπόθεσις πραξεολογικῆς τινος συνδέσεως, τοῦτο δὲ συμβαίνει, διὰ  
νὰ τηρηθῇ ἢ ἔννοια τῆς ἔξαρτήσεως σειρᾶς τινος ἀριθμῶν ἀπό  
τινος σειρᾶς ἄλλων ἀριθμῶν. Διὰ τούτου δικιώς δεινεύεται κατα-  
φανέστατα, ὅτι ἢ ἔννοια αὕτη εἶνε τὸ μόνον οὖσιδες χαρακτη-  
ριστικὸν γνώρισμα τῆς συναρτήσεως.

Αἱ αὐθαίρετοι συναρτήσεις δύνανται βεβαίως νὰ ἐρευνῶνται  
ἀριθμέστερον μόνον ἐνεκεν τούτου, ὅτι τὸ ἔξαρτησθὲν ἐκεῖνο  
χαρακτηριστικὸν τῆς πραξεολογικῆς συνδέσεως γνώρισμα προσ-  
λαμβάνεται αὐθις ἐκ τῶν ὑστέρων, ἐπὶ τῷ σκοπῷ, ἵνα τῇ βοη-  
θείᾳ τῆς συνθέσεως συνίθων ὑπερβατῶν συναρτήσεων προκύψῃ  
σύνθετος τις μορφὴ συναρτήσεως, ἵτις πράγματι ἀντιστοιχεῖ πρὸς  
μίαν μονάρτιμον πραξεολογικὴν σύνδεσιν τῶν δύο δεδομένων σει-  
ρῶν ἀριθμῶν. Ἡ δριστικὴ διάκρισις ἀπὸ τῶν λοιπῶν τῆς συναρ-  
τήσεως ἔννοιῶν ἐγκειται ἐποιμένως ἐν τούτῳ, ὅτι, ἐνῷ ἐν ταῦταις  
ἡ σύνδεσις τῶν πρὸς ἄλληλας ἀντιστοίχων σειρῶν τῶν ἀριθμῶν  
προσῆλθεν ἐξ ἀριθμητικῶν πράξεων, εἰς τὰς αὐθαιρέτους συναρ-  
τήσεις δέον νὰ ἐκτελεσθῶσι πράξεις τινές, οπως δεδομέναι σειραὶ  
ἀριθμῶν συνδεθῶσιν ἀριθμητικῶς πρὸς ἄλληλας.

"Ἐνεκεν τούτου αἱ πολυπλοκότεραι ἐκεῖναι κανονικαὶ ἔξαρ-  
τήσεις γεγονότων, ἀπερ δύνανται νὰ καθορίζωνται ἀριθμητικῶς  
ἐν τῇ ἐμπειρίᾳ καὶ ἀτινα δὲν δύνανται νὰ παρασταθῶσι δι᾽ ἀπλῶν  
νόμων, ἀποτελοῦσι τὸ προσφρορώτατον πεδίον τῶν ἐφαρμογῶν  
τῶν αὐθαιρέτων συναρτήσεων.

Πᾶσαι αἱ μορφαὶ τῆς ἔννοιας τῆς συναρτήσεως, περὶ ᾧ ἐγέ-  
νετο λόγος ἐν τοῖς ἀνωτέρω, συνδέονται, — ἔξαιρέσει τῆς ἐξ ἴδιαι-  
τέρως προϋποθέσεως παραχθείσης ἀριθμητικοθεωρητικῆς συναρ-  
τήσεως, — συνεπείᾳ τῆς ἔννοιας τῆς σχετικῆς σταθερᾶς μετα-  
βολῆς, πρὸς τὴν γενικὴν ἐκείνην τοῦ ἀριθμοῦ ἔννοιαν, ἵτις συμ-  
πίπτει πρὸς τὴν τῆς συνεχῶς μεταβλητῆς ποσότητος. Ἐνταῦθα  
εὑρίσκεται ἐν τέλει ἢ ἀρετικίᾳ τῆς ἔξελλεως ἴδιαιτέρως τινὸς  
κατηγορίας παραγώγων ἔννοιῶν συναρτήσεων, ἀτινες δύναν-  
ται ν' ἀναπτύσσονται ἐκ τῶν ἀρχικῶν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς  
ἔννοιας τῆς συνεχοῦς μεταβολῆς. Ἐάν δηλονότι ὠρισμένη τις  
ποσότης, ἐπειδὴ αὕτη συνδέεται διὰ πραξεολογικῆς συνδέσεως  
πρὸς ἄλλην τινά, θεωρῆται ὡς συνάρτησις ταύτης, αἱ μεταβολαὶ  
τῶν μεταβλητῶν δύνανται ἐπίστης, — ἐπειδὴ ἐκάστη συνεχὴς μετα-  
βολὴ ἀνεξαρτήτως μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἐπιφέρει ὀπιώτως συνεχῆ  
μεταβολὴν τῶν ἔξηρτημένως μεταβλητῶν, — νὰ συνδέονται ἐν  
δριτιμένῃ συναρτήσει, τοῦτο δὲ δύναται ἐπίστης νὰ συμβῇ καὶ διά-

τινος πραξεολογικής συνδέσεως. Ήδην δημος κατά γενικῶς ὑπάρχοντα τρόπον συνεχεῖς μεταβολαί δύο ἀπ' ἄλλιλων ἔξιηρτημένων ποσῶν ἐκφράζονται ὑπὸ τύπου συναρτήσεως, δυνατὸν εἶναι νὰ μὴ πρόκειται ἐνταῦθα περὶ τῆς σχέσεως οἰκονδήστοτε πεπερασμένων μεταβολῶν, ἵτις ἐν μιᾷ καὶ τῇ αὐτῇ συναρτήσει Οὐδὲ ηδύνατο νὰ εἴνει διαφοροτάτη, ἀλλ' ὡς βάσις δύναται νὰ τίθεται μόνον ἢ μεταβολὴ ἐκείνη, ἵτις ἀποκτᾶται δι' ἀπείρου κατατημέσεως τῶν ὅντως δεδομένων πεπερασμένων μεταβολῶν. Μόνον εἰς τὴν πιθανότητα τοιεύτης τινὸς ἀπείρου κατατημέσεως καίται τὸ κριτήριον τῆς συνεχείας τῆς σχετικῆς μεταβολῆς τῶν ποσῶν, καὶ δύναται ν' ἀποκτηθῇ ἐκ νέου, δισον ἀφορᾶ εἰς τὴν περίπτωσιν τιεύτην τῆς συνεχοῦς μεταβολῆς ἐν γενικὸν μέτρον τοῦ λόγου τῶν σχετικῶν μεταβολῶν. Λί οὕτω μεταξὺ τῶν μεταβολῶν τῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν μιᾶς συναρτήσεως διαμορφούμενα συναρτήσεις παλαιότεραι διαφορικαὶ συναρτήσεις ἢ, ἐπειδὴ δύνανται νὰ προκύπτουσι γενικῶς ἐκ τῶν ἀρχικῶν συναρτήσεων μεταξὺ μεταβιλλομένων ποσῶν, παράγωγοι συναρτήσεις. Ἐνταῦθα ἢ πραξεολογική σύνδεσις, δι' ἣς συνδέονται οἱ μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ τῶν παραγόντων συναρτήσεων, ἔξιηρτάται ἐκ τῆς ἐν τῇ ἀρχικῇ συναρτήσει ἐπεφρασμένης πραξεολογικῆς συνδέσεως, διαφέρει δημος οὐσιοδοτούσιαύτης, ἔνεκεν τοῦ περιορισμοῦ τῆς θεωρήσεως ἐπὶ δισονδήστοτε πραγματικῶν μικρῶν σχέσεων τῶν ποσῶν. Οὐ δρος οὕτως συνεπάγεται ἐκεῖσης ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀπόλητην τῶν παραγόγων συναρτήσεων ἰδιαιτέρους κινόνιας πρᾶξεων, δι' ἣν διακρίνονται αἱ ἐπὶ συνήθων πεπερασμένων ποσοτήτων ἐφηρμοσμέναι ἀριθμητικαὶ πρᾶξεις. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον αἱ παράγωγοι συναρτήσεις ὑπόκεινται κατὰ διττὴν σχέσιν εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως. Ἀφ' ἐνὸς μὲν εἴνει πάντα αὖται συναρτήσεις μεταβλητῶν ποσῶν, τουτέστι συναρτήσεις τῶν μεταβολῶν τῶν μεταβλητῶν δεύτερον δὲ εἴνει αὗται συναρτήσεις τῶν ἀρχικῶν συναρτήσεων, πρὸς ἣς συνδέει ταῦτα ἰδιαιτέρως τις πραξεολογικὴ σύνδεσις. Συνεπείᾳ τῆς συνδέσεως τιεύτης δύνανται νὰ παρίγνωνται δι' ὀρισμένης τινὸς πρᾶξεως τῆς διαφορήσεως, ἐκ τῶν ἀρχικῶν συναρτήσεων, καὶ διά τινος ἀντιστρόφου πρᾶξεως τῆς δλοκληρώσεως νὰ μεταβιλλωνται ἐκ νέου εἰς ταύτας. Ἐκ τῆς σχέσεως τιεύτης προκύπτει, ὅτι αἱ παραγόγοι συναρτήσεις δύνανται ν' ἀγάγωσιν εἰς παρομοίαν παραγωγὴν νέων συναρτήσεων, διαμορφουμένων οὕτω παραγόγων συναρτήσεων δευτέρως τάξεις κτλ.

Μὲ τὴν ἔξελιξιν τῆς ἔννοιας τῆς συναρτήσεως ἀλλων συναρτήσεων ἔξαντλεῖται τὸ πεδίον τῶν ἐφαρμογῶν, ὥστε δύναται,

ταὶ νὰ παρουσιάζῃ ἢ γενικὴ ἔννοια τῆς λογικῆς ἐξαρτήσεως ἐν τῷ πεδίῳ τῶν καθαρῶν ἔννοιῶν τῆς μορφῆς. Αἱ ἐφαρμογαὶ αὗται ἔχουσι καὶ ἀπὸ λογικῆς ἀπόψεως μεγίστην σπουδαιότητα. Διότι ἀποκαλύπτεται εἰς αὐτὰς πληθύρα ποικίλων διαμορφώσεων, ἃς λαμβάνει ὁ νόμος τοῦ ἀποχρῶντος λόγου ἀναλόγως τῶν ἴδιαιτέρων ὅρων τῆς ἐφαρμογῆς αὐτοῦ. Ἐκ τῆς μπλῆς μονοτίμου ἀντιστοιχίσεως δύο ὅρων μεταβλητῶν νοούμενων ποσοτήτων ἐπιτυγχάνεται ἡ διακριτική τῆς ἔννοιας τῆς συναρτήσεως, ἀφ' ἣνδες μὲν κατὰ τὰς προϋποθέσεις, τὰς ἀφορώσας εἰς τὴν φύσιν τῶν μεταβολῶν τῶν ποσῶν, ἀφ' ἣτέρου δὲ κατὰ τὴν εἰς ὀρισμένας ἀριθμητικὰς πράξεις ἐκδηλουμένην κανονικότητα, ἥτις εὑρίσκεται μεταξὺ ἀντιστοιχῶν ποσοτήτων. Ἀπὸ τῆς μονοτίμου διαχωρίζεται εἴτα ἡ πλειονότιμος συνάρτησις, ἡ δὲ τελευταία αὕτη ἀγει πάλιν εἰς τὴν αὐθαίρετον ἐξάρτησιν, ἐν ᾧ ἡ σύνθεσις τῶν πράξεων τῶν ἐξηγημένων ποσοτήτων δὲν εἶναι ἡ ἀρχικὴ πηγὴ τῆς συναρτήσεως, ἀλλ' ἀντιστροφῶς μετατρέπεται εἰς πρόβλημα προκύπτον ἐκ τῆς ὑπάρχεως τῆς ἀντιστοιχίσεως.

Ἐν τέλει τὸ σπουδαιότατον καὶ γενικώτατον εἶδος τῆς μεταβολῆς τῶν μεταβλητῶν, ἥτοι ἡ συνεχὴς μεταβολή, ἀγει εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως μιᾶς ποσοτικῆς μεταβολῆς, ἡ μορφὴ δὲ αὕτη ἀποκτᾷ συγχρόνως, ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀρχικὴν συνάρτησιν, σημασίαν συναρτήσεως τῆς συναρτήσεως.

Μεταξὺ ὅλων τῶν μορφῶν τούτων τῆς συναρτήσεως ἴδιαιτέρως αἱ τῶν συνεχῶς μεταβαλλομένων ποσῶν καὶ τῶν μεταβολῶν αὐτῶν ἔχουσι μεγάλην σπουδαιότητα, ἀνεξαρτήτως τῆς καθαρᾶς μαθηματικῆς αὐτῶν ἀξίας, διότι δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσι πανταχοῦ ἐν ταῖς φυσικαῖς ἐπιστήμαις πρὸς ἐκφρασιν τῆς αἰτιόδους σχέσεως τῶν φυσικῶν φαινομένων. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον αἱ ἐνταῦθα ἀπαντῶσαι μορφαὶ τῆς λογικῆς ἐξαρτήσεως ἔχουσιν ὑποδειγματικὴν ἀξίαν, ἐν σχέσει πρὸς τὰς ἐφαρμογὰς τοῦ νόμου τοῦ ἀποχρῶντος λόγου ἐπὶ δλοκλήρου τοῦ περιεχομένου τῆς ἡμετέρας ἐμπειρίας. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως εἰς τὰς σημαντικωτάτας αὐτῆς μορφὰς συμβάλλεται περισσότερον πάσης ἀλλιγές ἔννοιας τῆς μορφῆς εἰς τὴν γνῶσιν τῆς πραγματικότητος, ἀποτελεῖ τὴν ἀμεσον πρώτην βαθμίδα ἐν σχέσει πρὸς τὰς καθαρὰς ἔννοιας τῆς πραγματικότητος.

**ΙΙΙ. Εκαθαρωτές έννοιες της πραγματευότητος.**

**1. Οὐσία.**

**α'. Γενικοί ιδιότητες της οὐσίας.**

Ἐν τῷ χαρακτηρισμῷ τῆς οὐσίας, ὡς βάσεως τῶν ἐν τῇ  
**Εμπειρίᾳ δεδομένων φαινομένων**, ἐνυπάρχουσιν, ὡς πρὸς τὰς  
 διαφόρους κατεύθυνσεις, ἐν αἷς διεμορφώθη ἡ ἔννοια τῆς οὐσίας,  
 δύο δριστικὰ γνωρίσματα. Ἐν πρώτοις ἡ οὐσία νοεῖται μὲν ὡς  
 βάσις τῆς ἐμπειρίας, δὲν θεωρεῖται δῆμος ὡς δεδομένη ἀπ' εὐ-  
 θείας εἰς αὐτήν. Δεύτερον ἀντιτίθεται ἡ οὐσία ὡς «**δύντως δν**»  
 πρὸς τὸ «**μὴ δν**», ἵστοι πρὸς τὸν πόσιμον τῶν φαινομένων, συ-  
 δεομένης ἐν τῇ ἀντιθέσει ταύτῃ τῆς ἀντιλήψεως, ἥτις ἡ μὲν  
 οὐσία ὑπάρχει πραγματικῶς, τὸ δὲ φαινόμενον εἶναι προϊὸν τῆς  
 πραγματικῆς οὐσίας ταύτης, μεταβληθὲν συνεπείᾳ οὐσιοδίκτονε  
 μπονιμενικῶν αἰτίων.

Ἐὰν συνφδὰ τῷ πρώτῳ τῶν καθορισμῶν τούτον ἡ οὐσία  
 δὲν εἴναι ἀντικαίμενον τῆς ἐμπειρίας, δέον νὰ εἴναι ὑπερβατική ἡ  
 ἔννοια αὐτῆς ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἡ ἔννοια αὕτη δηρεῖται νὰ προκα-  
 πτῃ ἐκ συμπληρώσεως τίνος τῆς ἐμπειρίας, ἵστις μίσον καὶ ἐν εἴναι  
 ἀπαραίτητος οὐδὲν πάντοτε ὑποθετικὸν χαριστήρα. Ἐὰν τοῦ-  
 ναντίον κατὰ τὸν δεύτερον καθορισμὸν ἡ μὲν οὐσία πρέπει νὰ  
 νοῆται ὡς δύντως δν, πᾶν δὲ τὸ ἐμπειρικῶς δεδομένον νὰ ἐκδιμ-  
 βάνεται ὡς ἀντίον φαινόμενον, ὑπεριφαῖνον τὴν ὑπόστασιν τοῦ  
 δόντος, αὕτη δέον νὰ νοηθῇ ὡς τὸ **Ἀπόδλυτον**, αὕτινος ἡ ἔννοια  
 δὲν πρέπει οὔτε νὰ τίθεται ἐν ἀμφιβόλῳ οὔτε νὰ περιέχῃ ἀβε-  
 βαίστητέ τινα. Οὕτως οἱ δύο μνημονευθέντες δρισμοὶ τῆς οὐσίας  
 διίστανται ἀπ' ἄλλιλων καθ' ὅλην τὴν γραμμήν. Ἐὰν μὲν τῷ  
 πρώτῳ ἡ οὐσία εἴναι πάντοτε ὑποθετική, τοντέστιν ἀμφιβόλος  
 ἔννοια, προστιθεμένη εἰς τὴν ἐμπειρίαν, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ δηλοῦ  
 αὐτὴν ταύτην τὴν πραγματικότητα, μὲν ἡς τὸ πρῶτον νοεῖται ἡ  
 ἐμπειρία, ἵστις εἴναι μίνον φαινομενική ταύτης μορφή. Λί γε  
 τὴν οὐσίαν ἀφορῶσαι μεταφυσικοὶ Θεωροῦσι τὸν ἄρωτι  
 τὴν ἀντίφασιν ταύτην, παραδεχόμενοι ὅτι ἡ οὐσία εἴναι ἀρχή τις,  
 προηγουμένη πάσις ἐμπειρίας, ἵστις (ἀρχή) ἐν σχέσει μὲν πρὸς  
 τὴν ἐμπειρίαν εἴναι ὑπερβατική, ἐν δὲ τῇ γνώσει ἡμῖν ἐνδιαιθετος.  
 Οὕτω θεωροῦσι τὴν οὐσίαν ὡς **ἀπόδλυτον βεβαιότητα**, ὡς **δια-  
 νοητικὴν αναγκαιότητα**. Πλὴν ἡ ὑποθετική φύσις τῆς οὐσίας  
 καταφαίνεται πανταχοῦ. Τοῦτο μαρτυρεῖ ἀριδήλως τὸ γεγονός,

ὅτι τὸ μεταφυσικὰ συστήματα συγκρούονται πρὸς ἄλληλα ἐν τῷ θέματι τούτῳ, τοῦθ' ὅπερ δεικνύει, ὅτι δὲ εἰς τὴν ἀπόλυτον βεβαιότητα τῆς οὐσίας ἀφορῶν ἴσχυροισμὸς δὲν εἶνε βάσιμος. Ἡ ἐμπειρικὴ φιλοσοφία τούναντίον δὲν παραδέχεται τὸν ὑποθετικὸν χαρακτῆρα τῆς οὐσίας, περιορίζουσα τὴν σχετικὴν τῆς οὐσίας ἔννοιαν εἰς τὸ ἐν τῇ ἐμπειρίᾳ δεδομένον. Ἡ ἐμπειρικὴ φιλοσοφία μεταβάλλει οὗτον τὴν οὐσίαν εἰς ἐμπειρικὸν ὅν, ὅπερ στερεῖται πάντων τῶν Θεμελιωδῶν τῆς οὐσίας γνωρισμάτων, οὗτος ἔστε οὐδαμῶς Θὰ ἦδοντο νὰ κληθῇ πλέον οὐσία τὸ ὑπολειπόμενον, ἵστερον οὐδὲν ἄλλο εἶνε τῇ ἄληθείᾳ παρὰ ἐν κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἡττον μεταβλητὸν σύμπλεγμα φαινομένων, ἀπερ δίδονται ἀμέσως ἐν τῇ ἐμπειρίᾳ καὶ συνδέονται ἐν αὐτῇ πρὸς ἄλληλα. Τέλος ὑπερβατικὴ φιλοσοφία ἀκολουθεῖ μέσην τινὰ ὁδὸν μεταξὺ τῶν μεταφυσικῶν τούτων πατευθύνσεον. Αὕτη δηλαδὴ παραδέχεται μὲν λογικήν τινα τῆς ἔννοιας τῆς οὐσίας καταγωγήν, απεριορίζει δῆμος τὴν ἐφαρμογὴν ταύτης εἰς τὰ ἐμπειρικῶς δεδομένα αἰσθήματα. Τοιουτορόπτως ἔξαφανίζονται πάλιν ἐνταῦθαι, μετὰ τοῦ χαρακτηριστικοῦ γνωρίσματος τῆς ὑποθέσεως, πᾶσαι αἱ λοιπαὶ Θεμελιώδεις ἴδιότητες τῆς οὐσίας, ἢ λαμβάνουσαι τούλικιστον μίαν διλογίαν διάφορον οἷμασίον, ἥτις κατὰ μαρτὸν τῆς ἀρχακῆς ἔννοιας τῆς οὐσίας. Η οὐσία θεωρεῖται μὲν πάντοτε ὡς βάσις τῆς ἐμπειρίας, ἀλλ' ἐφ' ὅσον αὕτη ἀποτελεῖ τὴν ὑποκαμψικὴν προϋπόθεσιν πάσης ἴδιαιτέρας ἔννοιας τοῦ ὄντος, οὐχὶ δὲ ἐφ' ὅσον αὕτη νοεῖται ὡς ἀντικειμενικὸν ὅν, ὅπερ θεωρεῖται ὡς βάσις τῶν φαινομένων. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον δὲν δύνανται νὰ γινόσκονται κατὰ τὴν ὑπερβατικὴν φιλοσοφίαν εἴρει μόνον τὰ φαινόμενα. Εἰς τὴν νόησιν ἡδίσθιη ἡ ἱκανότης τοῦ νὰ διευθετῇ τὸ δεδομένον ἐπὶ τῇ βάσει ἔνυπαρχουσῶν ἐν αὐτῇ ἔννοιῶν, ἀλλ' ὅφελει δῆμος ἡ νόησις νὰ ἔχῃ πλήρη συνείδησιν ὅτι δικαὶον τὸν τρόπον τοῦτον διευθετῆσαι κόσμος τῶν φαινομένων οὐδεμίαν ἔχει ἀντικειμενικὴν πραγματικότητα. Τοιουτορόπτως ἀφγρέθη ἀπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς οὐσίας δὲ ὑποθετικὸς αὐτῆς χαρακτῆρος, ἵνα μετενεγκθῇ εἰς τὸ ἐμπειρικὸν περιεχόμενον τῶν ἀντικειμένων τῆς γνώσεως.

Ἡ προϋπόθεσις δῆμος, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὄποιας πᾶσαι αἱ θεωρίαι αὗται ἔητονται νὰ προστούσι τὴν ἐν τῇ ἔννοιᾳ τῆς οὐσίας ἐμπιλογιοῦσαι ἀντίφασιν, ἔξηλέγχθη ἥδη κακὸ τὸν μελέτην τῶν λειτουργιῶν τῆς γνώσεως ὡς τελείως ἀβάντιμος. Ἡ προϋπόθεσις αὕτη συνίσταται εἰς τὴν παραδοχήν, ὅτι ἡ παράστασις καὶ τὸ ἀντικείμενον εἶναι ἀρχακῶς διάφορα. Ἐν τῇ ὁρθολογικῇ μεταφυσικῇ

μορφοῦται ἐντεῦθεν ή ἔννοια, ὅτι ή ίδει τοῦ πραγματικοῦ ἀντικειμένου κεῖται εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς ἐν τῇ ήμετέρᾳ διανοίᾳ καὶ ὅτι ή ίδει αὕτη ἔχει ἀνάγκην λογικῆς ἐξελίξεως, ὅπως προκόψῃ ἐξ αὐτῆς ἄμεσος τις γνῶσις τῆς ὑποστατικῆς πραγματικότητος, εἰς ην ἀποδίδουσιν ἐκ τῶν ὑστέρων τὰς παραστάσεις. Ἡ ἐμπειρικὴ φιλοσοφία δὲν παραδέχεται τὴν ὑπαρξίν τοιούτων ἐν ήμεν ἐκ τῶν προτέρων ἐνυπαρχουσῶν ίδεων. Κατ' αὐτὴν ή ἔννοια τοῦ ἀντικειμένου προκύπτει ἐκ τῆς παραστάσεως, οἵτις γεννᾶται πάλιν διὰ τῆς ἐπιδράσεως τῶν πραγματικῶν ἀντικειμένων ἐπὶ τῶν ήμετέρων αἰσθήσεων. "Οὐεν ή πρὸς τὸ ἀντικείμενον τὰ μάλιστα ἀνταποκρινομένη ἔννοια εἶναι ἐκείνη, ἣν προφορικὴν ἔτι τῇ βάσει τῶν ἐν τῇ ἀμέσῳ αἰσθητικῇ ἀντικλίψει δεδομένων στοιχείων, χωρὶς οὔτε νὰ προσθέτωμεν οὔτε ν' ἀφαιρῶμεν τι ἐξ αὐτῶν. "ΙΣ ὑπερβατικὴ φιλοσοφία δὲν τέλει ἀντικαθιστᾷ τὴν/ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπενέργειαν τοῦ ἀντικειμένου/διαί τινος ἀλληλεπιδράσεως. Αὐτὴν αὖτις ή παράστασις εἶναι διὰ τὴν ἐν λόγῳ ὑπερβατικὴν φιλοσοφίαν προϊόν ἀντικειμενικῆς δεδομένων στοιχείων καὶ ἔννοιῶν ἐνυπαρχουσῶν ἐν ήμεν ἐκ τῶν προτέρων. "Οὐεν ή γνῶσις δὲν σχετίζεται πρὸς ἀντικείμενα, οἵτινα ὑπερχουσιν ἀναξιοτήτως ήμῶν, ἀλλὰ πρὸς τὰς ήμετέρας ὑπὸ ἔννοιας τεταγμένας παραστάσεις. Ή παραδοχὴ ἀρχικῆς τινος διαφορῆς μεταξὺ τῆς παραστάσεως καὶ τοῦ ἀντικειμένου εἶναι τελείως ἐστιρακμένη. Εἴναι τοιαύτη ἐν τῇ προύποθέσει μαῖς ἐν ήμεν ἐκ τῶν προτέρων ἐνυπαρχούσιης ίδεως ὑπερβατικοῦ τινος δινος, διότι πᾶσαι αἱ περὶ ἀντικειμένων ἔννοιαι ήμῶν εἴτε συνδέονται ἀμέσως πρὸς ἐμπειρικῶς δεδομένα ἀντικείμενα, εἴτε προκύπτουσι συνεπείχ λογικῶν ἀξιώσεων, αἵτινες προέρχονται πάλιν ἐκ τῶν ίδιοτήτων τῶν ἐπικειμένων ἀντικειμένων. Ἐπίσης εἶναι ἐστιρακμένη, ἐφ' ὅσον τις παραδέχεται, ὅτι τὸ ἀντικείμενον κεῖται μὲν ἐκτὸς ήμῶν, ἀλλ' ὅτι δύναται νὰ παραγάγῃ ἐν τῇ ήμετέρᾳ ουγειδίᾳτε εἰκόνα δμοῖων πρὸς ξαντὸν ὡς πρὸς πάσις ή τούλιχιστον ὡς πρὸς τὰς θεμελιώδεις αὐτοῦ ίδιοτήτας, διότι δὲ παραλληλισμὸς οὗτος τῆς εἰκόνος καὶ τοῦ ἀντικειμένου εἶναι αὐτὸς καθ' ξαντὸν μόνον συμβολικὴ σύγκρισις, ήτις μόλις ἐπαληθεύεται διὰ τὴν μέσην ἐκείνην βαθμίδα τῆς γνώσεως, ἐν ᾗ ἐγένετο μὲν ίδη ή διάκρισις τῆς παραστάσεως ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου, ἐλλείπει δημοσία πᾶσα βαθύτερα κατανόησις, ἀφορῶσα εἰς τὴν ἀμοιβαίαν ἐπελεγματινὴν ἀμφοτέρων. Ἐν πρώτοις ή σύγκρισις αὕτη εἶναι ἀπαράδεκτος, διότι ἀντικείμενον καὶ παράστασις συνταυτίζονται, ἀπαράδεκτος δ' ἐπίσης εἶναι καὶ διότι ή ἐποπτικὴ διακρίνεται ἀπὸ τῆς ἀφηρημένης γνώ-

σεως, ή δὲ διάκρισις αὕτη καθιστᾶ μόνον ἀκόμη δυνατήν λογικήν τινα μεταξὺ αὐτῶν ἔξαρτησιν. Ἡ δηθεῖσα παραδοχὴ εἶναι ἐν τέλει ἀβάσιμος, ὅταν τὸ δύντως ὃν νοηθῇ ὡς μεταβαλλόμενον εἰς σταθερῶς ὑπερβατικήν, καὶ ἐνεκα τούτου ὃς πρὸς τὴν γνῶσιν ἀνωφελῆ ἴδεαν, ἐπὶ τῷ σκοπῷ ὅπως τὸ ἀντικείμενον τῆς ἐμπειρίας συνταυτισθῇ τούταν τελείως πρὸς τὴν παράστασιν, παραγομένου συγχρόνως τοῦ ἀντικείμενου τούτου τῆς παραστάσεως, τούτεστι τοῦ «φαινομένου», ἐκ τινος συνδέσεως ἐμπειρικῶς δεδομένων τίσθημάτων καὶ ἐκ τινων ἐν τῇ ἥμετέρᾳ συνειδήσει ἐκ τῶν προτέρων ἐνυπαρχουσῶν μορφῶν. Διότι η ἀντίληψις αὕτη τῆς ὑπερβατικῆς φιλοσοφίας ἀντιστρατεύεται τόσον πρὸς τὰς ἀξιώσεις τῆς ἐμπειρικῆς ἐπιστήμης, ὃσον καὶ πρὸς τὰ πορίσματα τῆς Θεωρίας τῆς γνῶσεως. Πρὸς τὴν ἐμπειρικὴν μὲν ἐπιστήμην ἀντιστρατεύεται, διότι οὐδαμῶς λαμβάνει ὅπ' ὅψιν τὴν ἀναπόδραστον ερδοδον, ἢν ποιεῖται πᾶσαι ἐπιστήμῃ ἐν τῇ ἀνεγέρσει ἀφηρημένου τινὸς γνωστικοῦ οἰκοδομήματος· πρὸς τὰ πορίσματα δὲ τῆς Θεωρίας τῆς γνῶσεως, καθόσον αὕτη θεωρεῖ τὴν διάκρισιν μεταξὺ ὕλης καὶ μορφῆς, ἢτις εἶναι ἀναγκαῖον καὶ δι' Ἑκάστην μορφὴν ὅποι ὠρισμένους ὅρους παρομιαστοῦν ἀποτέλεσμα τῆς γνῶσεως, ὃς ἀρχικὸν αὐτῶν χωρισμόν, οὗτως δῆτε τὰ τυπικὰ (εἰδολογικὰ) συστατικὰ στοιχεῖα νὰ θεωρῶνται ὃς ἐκ τῶν προτέρων δεδομένα, ἐνῷ μόνον τάντικειμενικὰ καὶ τὰ λογικὰ αἵτια τοῦ χωρισμοῦ αὐτῶν εἶναι ἀρχικά, οὐχὶ δὲ καὶ αὕτα ταῦτα τὰ τυπικὰ στοιχεῖα.

Σὺν τῇ μεταβολῇ τῆς σημασίας, ἢν ὑφίστανται αἱ ἐπιστημονικαὶ ἐννοιαὶ διὰ τῆς σχέσεως ταύτης, ἐν μέρει μὲν ὃς πρὸς τὸ περιεχόμενον τῆς ἐμπειρίας, ἐν μέρει δὲ ὃς πρὸς τοὺς νόμους τῆς νοήσεως, δίδεται η ἀφετηρία ἐκείνη, ἀφ' ης δρμώμενοι δέονται ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ζήτημα, ὅπερ ἀφορᾷ εἰς τὴν σημασίαν τῆς ἐννοίας τῆς οὐσίας. Ἡ ἐννοια αὕτη δὲν εἶναι ἀρχέτυπος. Ἐν τῇ ἐννοίᾳ τοῦ «δύντος», ἢτις ἐν τῇ κοινῇ ἐμπειρίᾳ λαμβάνει ἥδη σημαντικὴν θέσιν, δὲν ὑπάρχουσιν ἀκόμη αἱ θεμελιωδέσταται αὐτῆς ἴδιότητες, διότι τὸ δὲν δὲν εἶναι ή βάσις, ἀλλ' αὐτὸ τὸ περιεχόμενον τῆς ἐμπειρίας, ὅπερ δὲν νοεῖται ὃς σταθερόν, ἀλλ' ὃς μεταβλητόν. Ἡ γνῶμη τοῦ Καντίου, διτι ἐν τῇ παραστάσει τῶν καθ' ἐκαστα ἀντικείμενων ἐμπεριέχεται ἥδη η ἐννοια σταθερᾶς τινος τῶν φαινομένων βάσεως, διὰ τὸν λόγον διτι πάντα τὰ ἴδιαίτερα χαρακτηριστικὰ τοῦ ἀντικείμενου γνωρίσματα δύνανται νὰ μεταβάλλωνται, ἐνῷ τὸ ἀντικείμενον μένει τὸ αὐτό, εἶνε τελείως ἥμαρτημένη. Ἡν η περίπτωσις τῆς

**μεταβολῆς** ὅλων τῶν χαρακτηριστικῶν γνωριμίατων ἢτο μεριγματικῶς ὀληθής, ή ἔννοια τοῦ ὄντος θὰ ἐξέλειπεν. Τέλος ἀντικείμενόν τι ἐνεργεῖται αἰρυνδίως μετὰ νέων ἰδιοτήτων ἐν ἄλλῳ τινὶ σημείῳ τοῦ χώρου, πειράνω μεταξὺ τοῦ σημείου, ἐν ᾧ τοῦτο προτιγονιμένως ἔχειτο, δὲν θὰ ἥτο πλέον τὸ αὐτό, ἀλλὰ διάφορον ἀντικείμενον. "Ιναὶ ἀντικείμενόν τι ἀναγνοῦται πάντοτε ὃς τὸ αὐτὸν ἔκατη μεταβολῇ τῶν καταστάσεων του δέοντος ή νὰ διατηρῇ τὴν θέσιν αὐτοῦ ἐν τῷ χώρῳ ή νὰ μεταβιάλῃ ταύτην πάντοτε μετὰ τοιοῦτον τρόπου, ὥστε ή περισσότερος τῆς κινήσεως **νὺξ** συνδέῃ τὰς διαδοχικὰς καταστάσεις ὡς ἐξαρτομένως ὅτι" ἀλλάζον. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτις ἀποδίδομεν εἰς τὰ παλαιά. "Ενειπεν δὲ τούτου τὸ ἀντικείμενον τῆς ἀριστερίας ἄπορη καὶ ὁ συνεργὸς τὴν ἔννοιαν αὐτοῦ δὲν εἶναι σταθερόν, ἀλλὰ μεταβλητόν· οὐχὶ δὲ ή προσωπικότερος μᾶλλος αἴτος τούτο τὸ ἀντικείμενον ἔννικες ἔννοιες διδεῖ εἰς ἡμῖς ἀριστερήν, πάντος υἱῶν αὐτοῦ, ἐν μέσῳ τῶν μεταβιάλων αὐτοῦ καταστάσεων, ὡς **ἕντατον** ἀντικείμενον, ἀλλ' ή ἀρέσσεις ἐν τῇ ἀριστερίᾳ δεδομένη **αὐθικαρξία** καὶ ή **χρονικοτοπική** **συνοχή** τῶν μετεβολῶν αὐτοῦ. Αὕτωςαρξάντεν δὲ λέγοντες υἱῶν τὴν εἰς ἀμφιμένον τινῶν ἔμεσημαδῶν γνωριμίατων στηριζομένην διεύρισκαν τὸν ἴδιατόπον ἀντικείμενον ἄποτε τοῦ περιβιάλλοντος αὐτὸῦ πάροπον.

Οὐχ ἄπτον ὑπερχωρούν εἰς τὰς ἴδιατης τιάτος ὀπορθῶσι αὐτοῖς, συνεπείρη τῶν διατοίνων ή λογικὴ διεργασία τῆς ἔννοιας τοῦ ὄντος ὥρητε νὰ ὀδηγήσῃ τὴν βιθυντιδὸν εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς αὐτοῖς. Αἱ αὐτίαι ὥρως αὐτοῖς ἀνέρισσον διεπιλεκτικός εἰς τὴν **ἔκτασιν**. "Οθεν ή αὐτοῖς δὲν εἶναι ἔννοια, ήτις καθικότερος τὸ πρῶτον ἀριστερήν τὴν ἀριστεράν, ἀλλὰ τοῦνταν τὴν ἔννοια, ήτις ἀποβιβαντική ἀριστερή τοῦ τῇ βίλοι τῆς ἀριστεράς, ὡς προστοθέσιον τὴν λογικὴν ταύτης διεργασίαν. "Η διεργασία αὗτη ἀριστερής **δύο** κατ' αὐτούς οὖσαν διαρρέουσαν ὄδοις. Πρώτην αὐτὴ προγενεστέρην διαῆγεν ή ὅδος τῆς καθηματικῆς **ἰδεατῆς** **ἀφαιρέσεως**, δευτέρην δὲ αὐτὴ μεταγενεστέρην ή ὅδος τοῦ ὄποτε τῆς ἀριστεράς **καθοδηγηθέντος** **ἐπεστημονικοῦ** **εροσδιορισμοῦ**. Ήν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ή ἴσως τοῦ ὄντος ἔννοια χρησιμεύει ὡς μόνη ἀρετηρία. Αὗτη χρησιμοποιεῖται ἀρέσσεις εἰς γενικὰς ἀριστεράς, αἵτινες γίριν τῆς ἀνάγνωστης τῆς ἔνότητος τῆς νοήσεως ἀριστερόζονται τόσον ὡς τὴς ἀριστεροῦς πραγματικότητος, ὡστὸν καὶ ὡς τῶν τὴν αριστεράς ταύτης ἔξυπηρετουσῶν διεργίατικῶν ἰδεῶν. Ην τῇ δευτέρᾳ προπτώσει τοῦνταν τὴν ἔξιτοτις μᾶλλον τὸ δυνατόν ἀπλοπτέρωσην

ξλευθέρας ἀντιφάσεων συνδέσεως τῶν ἐμπειρικῶν γνώσεων ἔγει εἰς τὴν προϋπόθεσιν μιᾶς τῶν ἐμπειρικῶν ἀντικειμένων διαφόρου βάσεως τῶν φαινομένων. Τὴν πρώτην τῶν μνημονεύθεισῶν διδῶν ἡκολούθησεν ἀπὸ τῶν ἀρχαιοτάτων χρόνων ἡ φιλοσοφία, τὴν δὲ δευτέραν ἡ ἐμπειρικὴ ἐπιστήμη, ἵδια δὲ ἡ ἀσχολουμένη περὶ τὴν ἔρευναν τῆς φύσεως. Ἀλλὰ καὶ ἕδω ἴσχυσεν ὁ ἴστορικὸς νόμος τοῦ βαθμιαίου καταμερισμοῦ τῶν καθ' ἔκαστα ἐπιστημονικῶν πεδίων ἐπὶ τῇ βάσει τῆς φιλοσοφίας. Εἰς τὴν ἐμπειρικὴν ἐπιστήμην πιθεσχέθησαν αἱ προϋποθέσεις, ὃν αὗτη εἶχεν ἀνάγκην χάριν τῶν σκοπῶν αὐτῆς, ἐν πρώτοις ὑπὸ τῆς φιλοσοφίας. Διὰ τὴν αἵτιαν δὲ ἀκριβῶς ταύτην τὸ ἴδιον αὐτῆς θέμα συνίστατο εἰς ἔνα διὰ τῆς παροτρύνσεως τῶν ἀναγνῶν τῆς ἐμπειρίας γενόμενον καθορισμὸν τῶν ὑπὸ τῆς φιλοσοφίας διαμορφωθειῶν γενικῶν ἔννοιῶν<sup>1</sup>.

### β'. Ἐξέλιξις τῶν μεταφυσικῶν ἔννοιῶν τῆς οὐσίας.

Ἔτι ἀμέσως ἔτι τῆς ἐμπειρικῆς τοῦ ὄντος ἔννοιας βασιζομένη λογικὴ ἀφαίρεσις, ἥτις ἀποτελεῖ τὴν κρητῆδα τῶν μεταφυσικῶν τῆς οὐσίας ἔννοιῶν, δὲν ὠδίγησεν εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς ἀπὸ τοῦ ὄντος εἰς τὴν οὐσίαν, ἀλλὰ προηγήθησαν ταύτης αἱ ἀφηρημέναι ἔκειναι μορφαὶ τῶν ἔννοιῶν, περὶ ὃν θὰ διμιλήσωμεν ἐν τοῖς ἅπομένοις.

Εἰς αὐτὰς ἀνήκει ἡ ἔννοια τοῦ «εἶναι», ἐξ ἣς μετηνέχθησαν οἱ θεμελιωδέστατοι προσδιορισμοὶ εἰς τὰς βραδύτερον διαμορφωθείσας ἔννοιας τῆς οὐσίας. Ἐν ταύτῃ διακρίνονται τρία σημεῖα, ἀπερ νοοῦνται μὲν ὡς συνηνωμένα ἐν τῇ συμπεκληρωμένῃ ἔννοιᾳ τοῦ «εἶναι», παριστῶσιν δμως τὴν βαθμιαίαν διαδοχὴν τριῶν ἔννοιῶν. Ἔτι μειονένη γενικότης τῶν τριῶν τούτων ἔννοιῶν τοῦ «εἶναι» μετρεῖται εἰς τὰς ἀντιθέσεις, ἀς ἀποτελοῦσιν αἱ ταύτας συμπληροῦσαι λογικαὶ ἀραιότερεσσις. Ἔτι πρώτη μορφὴ τοῦ «εἶναι» ἔχει ὡς ἀντίθετον ἔννοιαν τὸ «μὴ εἶναι». Τὸ πρὸς τὸ μὴ εἶναι ἀντιτασσόμενον τοῦτο «εἶναι» δεικνύει ἀπλῶς μόνον τὴν δεδομένην υπόστασιν οἰουδήποτε ἀντικειμένου τῆς νοήσεως, ἔνεν ἀκριβεστέρου τινὸς προσδιορισμοῦ. Εἰς τὴν πρώτην ταύτην δλως κενὴν ἀντίθεσιν ἐπιπροστίθεται δευτέρα τις μᾶλλον ἀκριβής, ἥτοι ἡ ἀντίθεσις τοῦ «εἶναι» πρὸς τὸ «φαίνεσθαι».

1. Πρβλ. ὡς πρὸς ταῦτα καὶ τὰ ἐπόμενα τὴν ἡμετέραν διατριβὴν: «Was soll uns Kant nicht sein?». Philos, Studien, VII. σελ. 28 καὶ ἑφεξῆς.