



Ἔντοις ἐπομένοις θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὸ νὰ διασαφῆσωμεν, λαμβάνοντες ὑπὸ δύψιν τὸ γενικὸν θέμα ἡμῶν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ὄγηθέντων συναιροῦν τῶν ἐννοιῶν, τὰς ἐννοίας ἔκείνας, ἐν αἷς συνδέονται τὰ κύρια σημεῖα ὅλοκλήρου τοῦ πεδίου τῶν ἐννοιῶν. Αὗται εἶνε ἐκ μὲν τῶν ἐννοιῶν τῆς μορφῆς ή ἐννοία τῆς πολλότητος, τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τῆς συναρτήσεως, ἐκ δὲ τῶν τῆς πραγματικότητος αἵ ἐννοιαὶ τῆς οὐσίας, τῆς αἰτιότητος καὶ τοῦ σκοποῦ.

III. Η καθαρὰ ἐννοιας τῆς μορφῆς.

1. "Ἐννοια τῆς πολλότητος.

Μονὰς καὶ πολλότης εἶνε αἱ γενικώταται ἐννοιαὶ τῆς μορφῆς, αἵτινες ἀπαιτοῦνται πρὸς λογικὴν πασῶν τῶν λοιπῶν διαμόρφωσιν. "Ἐκαστον ἀντικείμενον τῆς νοήσεως, ἐφ' ὃσον νοεῖται ὡς διακεκριμένον ἀπὸ τῶν λοιπῶν, εἶνε μονὰς καὶ δύναται πάντοτε κατὰ καινόνα ν' ἀναλύεται εἰς μιᾶλλον ἐπὶ μέρους μονάδας καὶ νὰ νοῆται ὡς ἀνήκον εἰς εὑρυτέρας μονάδας. Ἡ διττὴ αὕτη πρόδοδος τερματίζεται εἰς τὰς δύο δρικὰς ἐννοίας, ἢτοι εἰς τὴν ἐννοιαν μιᾶς ἐλαχίστης καὶ ἀνεπιδέκτου περαιτέρῳ ἀναλύσεως μονάδος καὶ μιᾶς μεγίστης μονάδος, ἢτις δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ τάσσεται ὑπὸ ἀνωτέραν μονάδα. Ἐν τῇ ἐννοίᾳ τῆς πολλότητος συνδέονται κατὰ ταῦτα δύο ἐννοιαὶ μονάδος, αἵτινες ὥμισς ἐφ' ὃσον πρόκειται περὶ ἐμπειριῶν πολλοτήτων ἔχουσι μόνον σχετικὴν σημασίαν, παριστῶσαι διπλῶς τὰ αὐθαίρετα ὅρια, μέχρι τῶν διοίων ἔξετάθη ἡ διττὴ πρόδοδος ἐκείνη. Αἱ δύο αὕται δρικαὶ ἐννοιαὶ τῆς μονάδος εἶνε ή τοῦ ἀτομικοῦ στοιχείου καὶ ή τοῦ **ὅλου**.

Τὰ στοιχεῖα πολλότητάς τυνος δύνανται νὰ εἶνε κατὰ ποιὸν διάφορα ή δύμοι." Όταν ή διάκρισις τῶν στοιχείων καὶ ή θατὶ τῆς διακρίσεως ταύτης ἐφειδομένη συγκεφυλακώσις αὐτῆς ἐργοσδιορίζεται μόνον όποιο τῆς ποιοτικῆς διαφορᾶς, καλοῦμεν τὴν πολλότητα ταύτην ἐντατικὴν πολλότητα. Οὗτως θαὶ παραδείγματι οἱ ἥχοι, αἱ δομαὶ καὶ αὐτὸς ταῦτα τὰ χρώματα, θαν ἀφαιρεῖται ἐξ αὐτῶν πᾶσαν διάτυξιν ἐν τῷ χώρῳ, ἀνήκουσιν εἰς τὴν ἐντατικὴν πολλότητα. "Οτικῶν τοῦνταν τὰ στοιχεῖα ἔχονται τὴν αὐτὴν ποιότητα, ή διάκρισις αὐτῶν δύναται μόνον νὰ στηρίζεται ἐπὶ τούτου, ὅτι ταῦτα διακρίγονται ἀπ' ἄλληλων διὸ τῆς σχετικῆς αὐτῶν τάξεως. Τὴν πολλότητα ταύτην καλοῦμεν ἐντατικὴν πολλότητα. Καίτοι δὲ ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος εἶνε αἱ προχειρότεραι ἐκ τῆς ἐποπτικῆς ἀντιλήψεως ἀπορρέουσιν ἕννοιαν τοιούτων πολλοτήτων, δέοντας ν' απέχοιται, ἐν σχέσει πρὸς τὴν γενικὴν ἕννοιαν, τοιούτων μερικωτέρων παραδειγμάτων, θανδὴ ή εἰς τὰς ἕννοιας ἀνεπιτίναστῆς καθαρᾶς ἀποτελεῖσας ἀνήκουσιν ἴδιότητας τῆς συνεχείας δὲν εἴρισκεται ἐκ τῶν εφορέων ἐν τῇ γενικῇ ἕννοΐᾳ τῆς πολλότητος.

"Ως τρίτη μορφὴ πολλοτήτων δέοντας νὰ θεωρηθῇ ἀκείνη, ἐν ᾧ συνδέονται κατὰ ποιότητας διαφορετικά στοιχεῖαν πρὸς τὰς διακρίσεις τῆς τέλεως αὐτῶν. Ταύτην καλοῦμεν μικτὴν πολλότητα. Παραδείγματα τουτού της πολλότητος εἶναι ὁ χωρισμός τῶν πάντων καὶ τὸ χωρισμός τῶν πράγματος. Εἰς ἀμφοτέρους τούτους τὰ μερονομένα χρώματα ἔχουσιν εἰς τεξιθέτηταν ἐν τῷ χώρῳ, οἵτις συγχρόνως νοεῖται ὡς ἔμφατωμένη ἐκ τῆς κατὰ ποιόν διακρίσεως αὐτῶν.

"Εφ' ὅσον εἴριστο καθεύδει τὸν τοῦ παθητοῦ τὸν καθαρὸν ἕννοιαν τῆς μορφῆς, δὲν δυνάμεθα νὰ υιώψουμεν τὰς κατὰ ποιόν διακρίσεις ὅπως αὖται εργοποιούθενται εἰς τὰ τὰς ἐντατικὰς καὶ τὰς ἐκτατικὰς πολλότητας, αὐτὸς ἀρρηφούμενης ἀπόφρεσ, εἰρήνη ἐν τῇ μορφῇ πολλότητος ἐν τῇ ἐκτατικῇ. Λιότι ἐνταῦθι οὐδὲν ἀριστερῶν τοιούτων ἀριστερῶν περιεχόμενον δύναται ν' ἀποδίδεται εἰς τὴν ποιότητα, ἂραι οὐδερίσις δύναται νὰ μετέργῃ ποιότης καὶ τὸ αἰσθητόν ὡς περιεχόμενον. Λιὸτι τὸν ἀριστοδιογιστὸν τῆς σχέσεως δύο κατὰ ποιόν διαφόρων στοιχείων ἀπολεῖταιται πάντοτε καὶ τὸ αἰσθητόν ή ἕννοια σχέσεως τηνὸς ἀρρηφούμενης διατίθεταις τοῦ ἐνὸς πρὸς τὸ ἔτερον. "Λιότισθις δὲ ή ἕννοια αὕτη εἶναι ή μόνη καθαροποτική ὡς πρὸς τὴν ἐκτατικὴν πολλότητα. "Ἔνεκτιν τοῦ λόγου τούτου πᾶσι πολλότητας, ἐφ' ὅσον θεωρεῖται ἐν καθαρᾷ τυπωχῇ (εἰδολογικῇ) σχέσει, δύναται νὰ δίδεται μόνον ὡς ἐντατικὴ πολλότητα. Τοῦτο εἴρισκει ὀποιότερος ἐν τῇ οὐσιότεροι τῶν μικτῶν πολλοτήτων σημεῖον.

ἐκφρασιν. Αὗται οὐδὲν ἄλλο εἶνε δηλονότι εἰμὴ ἔφαρμογαὶ γενικῶν ἐννοιῶν τῆς μορφῆς ἐπὶ ἐμπειρικῶς δεδομένων ποιοτικῶν πολλοτήτων, εἰς ὅν τὴν συνένωσιν ἥγαγεν ἢ περίστασις, ὅτι αἱ σχέσεις τῶν ποιοτικῶν στοιχείων, ἐὰν ταῦτα πρέπῃ νὰ εἶνε ὄντως καθαρῶς εἰδολογικά, δέον νὰ νοῶνται ἀναγκαῖως ὡς ἐκτατικὰ στοιχεῖα.

Ἡ οὕτως ὑπολειπομένη ἐννοια τῆς ἐκτατικῆς πολλότητος δύναται αὐθις ν' ἀναλυθῆνεις διαφόρους ὑποτεταγμένας ἐννοίας, αἵτινες διακρίνονται τοῦτο μὲν ἐν σχέσει πρὸς τὸ δλον, ἢτοι τὴν ἀνωτέρων ἐννοιαν τῆς μονάδος, τοῦτο δὲ ἀναφορικῶς πρὸς τὸ στοιχεῖον, τουτέστι πρὸς τὴν κατωτέρων τῆς μονάδος ἐννοιαν, καὶ ἐν τέλει ὡς πρὸς τὸν τρόπον τῆς διατάξεως τῶν στοιχείων. Ἐν τῇ ποιότητῇ περιπτώσει ἢ πολλότις εἶνε πεπερασμένη ἢ ἀπειρος. Πεπερασμένη μέν, ὅταν ἢ ἐνότης τοῦ δλου δύναται νὰ ἐπιτυγχάνεται εἰς τινα πραγματικῶς γενομένην πρόοδον, ἢτις ἀρχεταὶ ἀπὸ τοῦ μερικοῦ ἀπειρος δέ, ὅταν ἢ ἐνότης αὕτη εἶνε μόνον ἴδεατῶς ἐφικτή, δηλαδὴ ὑπὸ τὴν προσπόθεσιν, ὅτι μία οὖδεποτε τερματιζομένη πρόοδος νοεῖται ὡς ἵδη συντελεσθεῖσα. Οὕτω τὸ εἰς δύο σημεῖα περιστούμενον εὐθύγραμμον τμῆμα ἢ περιωρισμένος τις ἀριθμὸς σημείων εἶνε πεπερασμέναι πολλότητες, τούναντίον δὲ χῶρος καὶ δὲ χρόνος καὶ ἢ σειρὰ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπειροι πολλότητες.

Ἐν σχέσει πρὸς τὰς διακρίσεις τῶν στοιχείων, δὲ τυπικὸς (εἰδολογικὸς) χαρακτὴρ τῶν ἐννοιῶν τῆς πολλότητος συνεπάγεται περιορισμόν τινα, ὅστις συνδέεται πρὸς τὴν ἐν τοῖς ἀνωτέρῳ ἐξετασθεῖσαν γενικὴν διάκρισιν τῶν ἐντατικῶν καὶ ἐκτατικῶν πολλοτήτων. Ἐν ἐμπειρικῇ τινι μεθ' οἰωνδήποτε ποιοτικῶν ἴδιοτήτων ἔφωδιασμένη πολλότητι δύναται τὸ καθ' ἔκαστον, ὅπερ θεωρεῖται ὡς σχετικὸν στοιχεῖον, νὰ εἴνε πάλιν ἐν ἐκ μερῶν τινων συγκείμενον σύνολον, ὅπερ δύναται νὰ νοῆται ὑπὸ τὴν ἐποψιν τῆς πολλότητος. Τούναντίον εἰς καθαράν τινα ἐννοιαν τῆς μορφῆς πᾶσαι αἱ ἴδιοτητες ἐκεῖναι, αἵτινες δὲν ἀποκτῶνται ἐκ τῶν προτέρων ἐν τῇ ἐννοίᾳ, οὖδελως δύνανται νὰ νοηθῶσιν ἐν ταύτῃ. "Οθεν ἂμα ὡς προσδιορισθῇ ἢ ἐννοια τοῦ στοιχείου ἐγείρεται συγχρόνως ἢ λογικὴ ἀξίωσις, ὅπερ καὶ ἡ μονὰς μὴ νοῆται ὡς τι ἐκ μερῶν συγκείμενον σύνολον. Τοιουτορόπως τὸ στοιχεῖον, συντείᾳ τοῦ εἰδολογικοῦ περιορισμοῦ τῆς διαμορφώσεως τῶν ἐννοιῶν, εἶνε ἀπολύτως μεμονωμένον καὶ ἀπλοῦν. "Οθεν πᾶσαι αἱ διακρίσεις διαφόρων πολλοτήτων δὲν ἔχουσιν ἐν αὐτοῖς τούτοις τοῖς στοιχείοις τὴν αἵτίαν αὕτων, ἀλλ' ἐν τῇ διατάξει τούτων. Ρε-

βιάρης τοιούτοι τρίνει διατάξεως δύνανται νὰ νομοθῶσιν ἀπειρά-
ζιμους. Εἰς τὴν μαθηματικὴν δὲ ἐπιστήματιν ἐνιατόκαται ή ἔρευνα
τῶν κυριωτέρων τῶν οὗτοι^{πλανητών} διαμορφώσεων τῆς
ἐννοίας τῆς πολλότητος καὶ ὁ καθορισμὸς τῶν γενικῶν χαριστή-
ρων δι’ ἑκάστην ἐξ αὐτῶν καὶ διὰ τὰς σχέσεις αὐτῶν πρὸς ἄλλι-
λας. Μεγίστην σημασίαν ἔχει ἐνταῦθαι ἀποφίσ τις, οἵτις δίδει τὴν
ὅρτην ἐν τῇ διακρίσει τῶν θεμελιωδῶν μορφῶν τῶν ἐννοιῶν
τῆς πολλότητος. Η ἀποφίσ αὕτη ἀναφέρεται εἰς τὴν **πρόσοδον**
τῶν **συνδυασμῶν**, δι’ ὃν ἀποκτᾶμεν ὡς δεδομένων στοιχείων
μίαν πολλότητιν, καὶ εἰς τὴν τῶν **ἀποσυνθέσεων**, δι’ ὃν, ἀντι-
στρόφως, ἐάν ή πολλότης εἶναι δεδομένη ὡς τι σύνολον, ἐπινα-
γόμεθα εἰς τὰ στοιχεῖα ταύτης. Τόσον ή συνθετικὴ δύσην καὶ ή
ἀναλυτικὴ αὕτη πρόσοδος δίνεται νὰ εἶναι πεπερισμένη ή ἀπειρος.
Οθεν ή ἐννοια τοῦ πεπερισμένου καὶ τοῦ ἀπειροῦ συνδέεται
τρόπος τὴν τῆς πολλότητος κατὰ διπλούν τρόπον. Ήν τῇ μᾶς μὲν
περιστούμενοι ἀποτελοῦνται ή πολλότης εἶναι εἴτε πεπερισμένου εἴτε ἀπει-
ροῦ μεγέθους, ἐν τῇ ξερῷ δὲ ὁ ἐν οἰηδίησι πεπερισμένῳ
ταύτης τρίμιστι περιλαμβανόμενος ἀριθμὸς τῶν στοιχείων προσ-
ποτέλεστοι ὡς πεπερισμένος ή δις ἀπειρος.

Ἐξ ἀμφοτέρων τούτων τῶν περιττώσεων ή **δευτέρα** τυγ-
χάνει **εξαιρετικῆς** απονδυαστήτος. Εἰδεν ή εἰς τὰ στοιχεῖα αὕτης
ἀνάλυσις μᾶς πεπερισμένης πολλότητος, εἴτε ἐνδὲ οἰνοδίησι
ἀκομονθέντος τριμίστος μᾶς ἀπειροῦ πολλότητος εἶναι πεπερι-
σμένη ἀκολουθία πρᾶξεων, ή σεολλότης εἶναι **κατατετμημένη** ή
διακεκομμένη, ἀποτελεῖται δὲ ἐν ἑκάστῳ πεπερισμένῳ τριμίστι
ἢ διακεκριμένον μερῶν, ἀειναι εἶναι κατὰ τοιούτον τρόπον κεχω-
ρισμένα ἀτ’ ἄλλιλα, ὥστε μεταξὺ αὐτῶν θὰ ἔδιναντο πάντοτε
νὰ ὑπάρχουσι πολλὰ ἄλλα στοιχεῖα. Λοιθρός τις κεχωρισμένον
γεωμετρικῶν σημείων ἐν πεπερισμένῃ τινὶ ἐπειδήται εἶναι ή κατε-
φινετέρα ἀναπαράστασις τοιαύτης καὶ’ ἀμφοτέρος τὰς ὅψεις
τῆς προΐδου πεπερισμένης πολλότητος. Οταν τούναντίον θὰ
πεπερισμένου συγκλονι πάλιν ἀφορισθεντοι νοῶμεν τὴν ἀνάλυσιν
ἢς ἀπειρον ἀκολουθίαν πρᾶξεων, θὰ ἔδομεν, διτε εἶναι ἐνδιεχόμε-
ναι δύο περιττώσεις, ἀτ’ ὅπον τὴν ἀκολουθίαν ταύτην φέρομεν
εἰς πέρας πρᾶγματικῶς ή νοοῦμεν ταύτην ὡς ἀπραγματοποιητον.
Ἐν τῇ πρώτῃ περιττώσει ὡς ἀποτέλεσμα τῆς ἀναλύσεως ἀπομένει
ἀπειρος ἀριθμὸς πρᾶγματικῶν, ἀτ’ ἄλλιλαν κεχωρισμένων στοι-
χείων, καὶ προκύπτει ή ἐννοια κατατετμημένης καὶ διακεκομμένης
τινὸς πολλότητος, ης ἀκιστον μέρος ἔμπεριζει ἀπειρον ἀριθμὸν
στοιχείων, μεταξὺ τῶν ὅποιον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσεν

ἄλλα στοιχεῖα, οὗτως ὥστε ταῦτα εὑρίσκονται πανταχοῦ ἐν ἀμέσῳ συναφείᾳ. Ἐν τούτοις δύναται νὰ νοῆται ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ χωρισμός τις μεταξὺ δύο προσεχεστάτων στοιχείων, διὸ οὐ τὸ ἐν στοιχεῖον προσπίπτει εἰς τὸ ἔν, τὸ δὲ ἄλλο εἰς τὸ ἔτερον τῶν δύο διὰ τοῦ χωρισμοῦ παραχθέντων μερῶν. Ἀν δημοσ τοῦντίον νοῶμεν τὴν ἀνάλυσιν ὡς **πραγματικῶς ἀνεπίτευκτον**, ἢτοι ἀν προϋποθέσωμεν, ὅτι πᾶσα πραγματική κατάτμησις θὰ ἥδυνατο νὰ διδηγήσῃ ἡμᾶς εἰς τοιαῦτα στοιχεῖα, ἀτινα δύνανται πάλιν ν' ἀναλύωνται ἐπ' ἄπειρον, οὐδὲν οὐτοια τοῦ στοιχείου ἔχει μόνον **ἰδεατὴν σημασίαν**. Ἡ ξέννοια αὕτη δηλοῦ, ὅτι πᾶν πραγματικῶς μεδομένον, ἔστω καὶ ἐλάχιστον μόριον, δέον ν' ἀναλυθῇ περιτέρῳ, ὑπάρχει δὲ συγχρόνως ἐν αὐτῇ ἡ ἰδέα μιᾶς ἐν πραγματικῇ επιλιγμοιίᾳ ἀνεπίτευκτου, ἢτοι **ὑπερβατικῆς** μονάδος. Οὐδὲν τερούμπτει ἡ ξέννοια τῆς συνεχοῦς πολλότητος, ἐν γῇ οὐδέποτε εἶνε δυνατὸν νὰ χωρίζωνται ἀπ' ἄλληλων δύο προσεχέστατα στοιχεῖα, οὗτως ὥστε ἔκαστον ἐξ αὐτῶν ν' ἀνήκῃ εἰς ἄλλο τι τιμῆμα, διότι ἐν τῇ συνεχεῖ ταύτῃ πολλότητι οὐδέποτε δύνανται νὰ νοηθῶσι δύο στοιχεῖα·ἐν ἀπολύτῳ προσεγγίσει. Ὁθεν, μολονότι δι' ἀπιντας τοὺς ποσοτικοὺς προσδιορισμοὺς ἡ κατατεμημένη καὶ μὴ διακεκομμένη πολλότης δύναται ν' ἀντικαθιστᾷ τὴν συνεχῆ πολλότητα, καθ' ὃν τρόπον δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ διακρίνωμεν πρακτικῶς, ἐπὶ παραδείγματι, ἵνα μὴ διακεκομμένων σημείων συνιστάμενον χῶρον ἀπὸ τοῦ συνεχοῦς χώρου τῆς ἐποπτικῆς ἀντιλήψεως ἡμῶν, ἔξακολουθούσιν δημοσ τοῦτον εἶνε τελείως διακεκριμέναι ἀμφότεραι αἱ μορφαί, καὶ δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ παραγάγωμεν τὸ συνεχὲς ἀπὸ τὸ κατατεμημένον. Ἐκεῖ ἔνθα ἐγένετο τοιαύτη ἀπόπειρα, εἴτε οἱ προβάντες εἰς αὐτὴν περιωρίσθησαν εἰς τὴν πρακτικὴν τῆς καταμετρήσεως ὄψιν, εἴτε περιῆλθον εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἐπισυνάψωσιν εἰς τὴν παραδοχὴν τῶν ἐν ἀμέσῳ συναφείᾳ διατεταγμένων πραγματικῶν στοιχείων προσδιορισμοὺς τοιούτους, οἵτινες ἐμπεριέχουσι τὸν ὅρον τῆς συνεχείας ἀνευ πραγματικοῦ ταύτης ὄρισμοῦ. Ἡ ἀληθὴς διαφορὰ ἀμφοτέρων τῶν μορφῶν ἔγκειται ἀκριβῶς ἐν τούτῳ, ὅτι ἐν ταύταις οὐ θεμελιώδης τοῦ στοιχείου ξέννοια εἶνε τελείως διάφορος.

2. Ἀριθμός.

Ἄριθμὸς εἶνε ἡ εἰς μονάδα συγκεφαλαῖσις τῆς στολλατητος. Ὁθεν δ ἀριθμὸς ἐν τῇ γενικωτάτῃ αὐτοῦ σημασίᾳ δηλοῦ τόσον τὸ εἶδος τῆς πρὸς ἣν σχετίζεται πολλότητος, ὅσον καὶ τὸς

ἴδιαιτέρας κατὰ ποσὸν καὶ κατὰ ποιὸν ίδιότητας τοῦ μέρους ἐκείνου, διπερ ἀποστῶμεν ἐκ ταύτης. Συγχρόνως δὲ δύναται ἡ λογικὴ σκέψις χάριν δεδομένου τινὸς σποποῦ ν' ἀφαιρῇ λογικῶς ἔχ τινος τῶν ὄφεων τούτον τῆς ἐννοιας τῆς πολλότητος. Ἐπειδὴ αἱ ἐννοιαὶ τοῦ ἀριθμοῦ εἰνε τοσοῦτον ἀπλούστεραι ὅσον εὐρυτέραι εἰνε τοιαύτῃ τις ἀφαιρεσίς, οἱ πρωτογενέστατοι καὶ ἀπλούστατοι ἀριθμοὶ εἶνε ἐν ταῦτῷ καὶ οἱ μᾶλλον ἀφηρημένοι. Τοιοῦτοι εἶνε οἱ ἀπλοὶ **ἀκεραῖοι ἀριθμοί**, οἵτινες ἔμετεροι ἔχουσι τὴν ἐννοιαν τῆς κατατετιημένης πολλότητος κατὰ τὴν **σεσοστικήν** αὐτῆς ἀποκλειστικῶς ὅμιτι, ἥτοι ἀπιλλαγμένην πάσης κατὰ ποιὸν ίδιότητος. **Ἄλλο περιστέρῳ** τροποποιήσεις, εἰς ἃς ὑποβιβλεῖται ἡ ἀρχικὴ αὕτη ἐννοια τοῦ ἀριθμοῦ, ἀπορρέουσι κατ' οὐσίαν ἐκ τῆς προσθίκαις εργοσδιορισμῶν τινῶν κατὰ ποιόν. Η οπούδιαστάτη τῶν τοιούτων ἐπεκτάσεων ἔγκειται ἐν τούτῳ, διτι αἱ ἐν τινὶ πολλότητι ἐνυπάρχουσαι **διακρίσεις κατευθύνσεως** συμπεριλαμβάνονται εἰς τὸ ποσοτικὸν περιεχόμενον τῆς ἐννοιας τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐν πρώτοις ἀναφεύγεια ἐνταῦθις ὡς γίνεται ἐν εἰλεύστοις ἀντικειμένοις τῆς ἔμετερας πραγματοποιημένη περίστασις ἡ διάκρισις δύο κατευθύνσεων, οἵτινες ενδισκούνται τὴν ἕωςτον ἔκφρασιν ἐν τῇ ἀντιθέσει τῶν **Θετικῶν** καὶ τῶν **Δρυητικῶν** ἀριθμῶν. Ἀλλὰ τὸ πρόβλημα, διπερ ἀφορᾷ εἰς τὸν ἀριθμητικὸν προσδιορισμὸν πληθύνος τινὸς διακρίσεων κατευθύνσεως, ἀνηργουσῶν εἰς γίνεται καὶ τὴν αὐτὴν πολλότητα, λόγται κατὰ κανόνα διὰ τῆς ἐννοιας τοῦ μηγαδικοῦ ἀριθμοῦ. Πρὸς τοὺς ἐπὶ τῶν κατὰ ποιὸν ίδιοτήτων τῆς πολλότητος ἐδραιουμένους μετασχηματισμοὺς τούτους συδέονται καὶ ἄλλοι μετασχηματισμοί, οἵτινες, καίτερο προκαλούμενοι ὡς τὰ πολλὰ ὑπὲρ τῆς τοιούτητος τῶν ἀντικειμένων, ἀνήκουσιν ὅμιτος αὐτοὶ καὶ ἡ βαντοὺς εἰς τὴν ποσοτικὴν τῆς ἐννοιας ὄψιν. Ἐνταῦθις ὑπερέχει τὸ πρῶτον προσεχὲς θῆμα, διπερ ἀγειρῆμας εἰς τὴν μόρφωσιν νέας τινὸς ἐννοιας ἀριθμῶν, ἥτοι ἡ μεταφορὰ τῆς ἐννοιας τῆς μονάδος ἐκ τοῦ **ἕτερου μέρους εἰς τὸ δλον**. Ἐν τοῖς **ἀκεραῖοις** ἀριθμοῖς ἡ ἐννοια τῆς μονάδος μεταφέρεται εἰς τὸ **καθό** ἐκαστον, τοιτέστιν εἰς τὴν ὡς στοιχεῖον τῆς πολλότητος παραδεδεγμένην μονάδα. "Οὐεν οἱ καθόι" ἐκαστει ἀριθμοὶ ἀποκτῶνται διὰ τῆς συνεγνώσεως τῶν στοιχειωθῶν τούτων μονάδων εἰς πλήθη εὐρυτέρας ἐκτάσεως. Η ἐμπειρικῶς συτελούμενη διαδοχικὴ συνένωσις τοιούτων μονάδων εἶναι ἡ ἀριθμησις. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη εἶναι διαδοχικὴ πρᾶξις, πολλοὶ ἀθεώρουν ίδεατος τὸν ἀριθμὸν ὃς προκάτεινται ἐκ τῆς ἐκποτείας τοῦ χρόνου. Η θεωρία ὅμιτος αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς συμμετέχεως ψυχο-

λογικοῦ τινος παράγοντος πρὸς τὴν καθαρῶς λογικὴν φύσιν τοῦ ἀριθμοῦ. Βεβαίως ἡ γένεσις τοῦ ἀριθμοῦ θὰ ἥτο ἀδύνατος ὅνευ τῆς ἐνεργείας τῆς ἀριθμήσεως, τουτέστιν ὅνευ πράξεώς τινος ἐν χρόνῳ. Δὲν εἶνε δύμως ἐνεκεν τῆς αἰτίας ταύτης ὁ χρόνος ἀναγκαῖα προϋπόθεσις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, καθὼς δὲν εἶνε τοιαύτη καὶ ἐν σχέσει πρὸς τὸν νόμον τῆς ταυτότητος, ὅστις δὲν θὰ ἥδυνατο νὰ προκύψῃ βεβαίως ὅνευ τῆς διαδοχικῆς ἀντιληφτεως καὶ συγκειμένων ἀντικειμένων. **Λογικὴ** προϋπόθεσις δὲν εἶνε ἐκείνη, ἡτις συνεπεία τῶν ἴδιοτήτων τῶν ἡμετέρων παραστάσεων καθίσταται συμπιέτοχος εἰς τὴν γένεσιν ἐννοίας τινός, ἀλλ' ἐκείνη, ἡτις δὲν δύναται νὰ νοηθῇ ως ἐνυπάρχουσα ἐν τῇ ἐννοίᾳ, χωρὶς νὰ αἴρεται αὐτῇ αὕτη ἡ ἐννοία. 'Υπὸ τὴν ἔποψιν ταύτην ὁ χρόνος δὲν εἶνε λογικὴ προϋπόθεσις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, διότι αὕτη δὲν νοεῖται μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἀναγκαῖως, θατὶς προϋποθέτει μόνον, ἀπὸ λογικῆς ἀπόψιψεως, τὴν πολλότητα, οὐδαμῆς δὲ ἴδιαιτέρων τινὰ πολλότητα, ως εἶνε ὁ χρόνος. Πάντως ἡ ψυχολογικὴ σημασία, ἢν ἔχει ἡ πρᾶξις τῆς ἀριθμήσεως, ως πρὸς τὴν ἐμπειρικὴν γένεσιν τῶν ἐννοιῶν τοῦ ἀριθμοῦ, ἔχει ὃς ἀποτέλεσμα ὅπως Θεωρῆται ἐν πρώτοις ὡς **ἀριθμητικὴ μονάδας** τὸ ὡς στοιχεῖον πολλότητός τινος Θεωρούμενον καθ' ἔκαστον καὶ ἵνα κατὰ ταῦτα πᾶσα περιληπτικὴ ἐννοία τῆς μονάδος, ἡτις ἐκφράζεται δι^ποίουδήποτε ἐκ πολλῶν μονάδων ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ, εἶνε συγχρόνως πάντοτε ἐννοιά τις πληθύος. Οὗτω γεννᾶται ἡ σειρὰ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὃν ἡ πρώτη μονάδας παριστᾶ τὸ στοιχεῖον πολλότητός τινος, ἐνῷ αἱ ἐπόμεναι συγκεφαλαιούσι σύνολόν τι στοιχείων εἰς τινα μονάδα. 'Εὰν τούναντίον ὃν σύνολον δι^παριθμήσεως ἐπιτευχθὲν Θεωρῆται ἀντιστρόφως ὡς μονὰς καὶ ἡ μονάδα αὕτη, ἡτις ἐν ταῦτῷ νοεῖται ως πολλότης, ἀναλύεται εἰς μονάδας τοῦ πρώτου εἶδους, γεννῶνται οἱ **ἀλασματικοὶ ἀριθμοί**. "Οπως οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ σχηματίζονται ἐκ τῆς συνενώσεως τῶν μονάδων, οὗτως οἱ ἀλασματικοὶ ἀριθμοὶ μορφοῦνται ἐκ τοῦ **μερισμοῦ** αὐτῶν. 'Ακριβῶς δ^ι ἐνεκεν τούτου οἱ μὲν ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἀνάγκην ἐνδε μόνον ἀριθμητικοῦ συμβόλου, ὅπερ παριστᾶ τῶν συνδεδεμένων μονάδων τὸ σύνολον, οἱ δὲ ἀλασματικοὶ **δύο** συμβόλων, ἐξ ὃν τὸ μέν, τουτέστιν ὁ παρονομαστής, δηλοῖ τὴν εἰς μονάδα συνενωθεῖσαν πληθύν, τὸ δὲ ἔτερον, ἡτοι ὁ ἀριθμητής, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐπὶ μέρους μονάδων, αἵτινες περιέχονται ἐν τῇ περιεκτικῇ μονάδι ἐκείνῃ. Οὗτω τὸ ἀλάσμα $\frac{4}{5}$ δηλοῖ, διτε $\frac{2}{5}$ ἐνδε μὲν 5 μονάδων συνισταμένου ὅλου δέον νὰ Θεωρῶνται αἱ 4. 'Επειδὴ δὲ αἱ μο-

νάδες, αἵτινες συναποτελοῦσιν ἐν ὅλον, καθὼς καὶ οἱ κατατημέσεις, οἱ δύνανται γὰρ ὑποστῆσιν οἱ περιεκτικοὶ μονάδες, δύνανται γὰρ εἶναι διαιροφόταται, οἱ δὲ τοῖς κλασματικοῖς ἀριθμοῖς ἔννοια τῆς δινοτέρας μονάδος οἱ τοῦ ὅλου, καθὼς ἐπίσης καὶ οἱ ἔννοια τῆς κατωτέρας οἱ τῆς κυρίας μονάδος εἶναι μεταβλητοί, καὶ οἱ πρὸς δεδομένον τινὰ σκοπὸν δεκτὴ γενομένη κατωτέρα μονάς δύναται δι’ ἄλλους σπουδοὺς ν^ο ἀναλυθῆ^ν περιστέρω. “Οὐεν οἱ σχέσις τῶν ἀκεραίων πρὸς τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς δύναται ἐπίσης γὰρ νοηθῆ^ν κατὰ τὸν ἕξης τρόπον: οὗτοι διγλυδή^ν εἰς μὲν τοὺς πρώτους αἱ ἔννοια τῆς μονάδος καὶ τοῦ στοιχείου τῆς πολλότητος τῶν ἀριθμοῦ^ν συμπίπτουσι πρὸς ἄλλοις, ἵνα τούτωντον εἰς τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς οἱ ἐκάποτε δεκτὴ μονάς νοεῖται ὡς δυναμένη ν^ο ἀναλυθῆ^ν εἰς διαιδήσιτε στοιχεῖα, ὑπάρχει μόνον οἱ προϊατοθετικοί, οἵτινες οὐδὲν τούτης τῆς πολλότητος θεωρεῖται ὡς κατατημένη, οὗτοι διγλυδή^ν οἱ ἀνιᾶσις δύναται μὲν γὰρ πινακισθῆ^ν διανοθήσατε, οὐδέποτε δῆμος οὐτε ἄπαιρον.

Αἱ τῶν προλεγθέντων δειπνάνται συγχρόνως τὰ δρα, ἔπειτα διαχωρίζονται τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τούτης τηνὶς πατηγούσιας ἀριθμοῦ, οἵτοι τῆς τῶν **ἀσυμμέτρων**. Εἰσίσης καὶ ἐν σχέσει πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους ἐκάποτε μονάς νοεῖται ὡς δυναμένη ν^ο ἀναλυθῆ^ν εἰς στοιχεῖα, ἀλλ’ οἱ ἀνιᾶσις θεωρεῖται πρὸς τούτους ὡς **ἄπειρος**, οἵτις δῆμος τὰ τελευταῖα τῆς μονάδος στοιχεῖα εἶναι δυνατὸν γὰρ ἐπιτίθενται μόνον ἴδιατοις, οὐδέποτε δῆμος δύναται γὰρ εἶναι γεγχίσκωνται διὰ τοὺς προγραμματικοὺς τελομένους μερισμούς. Βεβαίως τοιοῦτος τις προγραμματικὸς μερισμὸς προσεγγίζει πρὸς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ ἴδιατοῦ ἀκεράου μερισμοῦ, ἐφ’ ὃσον χωρεῖ περιμέτρο, καὶ δύναται διὰ δοθέντα τινὰ διορθωτικὸν ἀριθμὸν γὰρ διλογεῖται γάρ τοις προσεγγίσοντος πάντοτε διὰ κλασματικὸν ἀριθμοῦ. Κατὰ τὸν τρόπον τούτον δὲ ἀσύρματος ἀριθμοῦ ἀνταποκρίνεται ἐντελῶς πρὸς τὴν **συνεχῆ πολλότητα**. Λαὶ τῆς διαιροφόρως τῆς ἔννοιας τινίτης τοῦ ἀριθμοῦ ἔλειψε συγχρόνως οἱ τοῦ ἀριθμοῦ ἔννοια τὴν μεγάστην αἵτης γενικότητα, ἐπειδή αὕτη ἥκολονθήσειν ἐν τῇ βασιστῇ ἔξελίζει τούς τις τὰς διαιροφόρσεις τῆς ἔννοιας τῆς πολλότητος. Άλλον τῇ τελευταῖα δῆμος ταύτῃ ἀχωρίστως δεδομέναις ἴδιατητες ἐχορίσθησαν ἀπ’ ἄλλοις κατὰ τὰς διαιρόρρους αὕτην δῆμοις, ἐπειδή οὐ μὲν κατὰ ποιὸν ἴδιατητες ἀνενεγκούνται εἰς τοὺς **θετικούς**, **ἀρνητικούς** καὶ **μηγαδικούς** ἀριθμούς, αἱ δὲ κατὰ τοσοῦν εἰς τοὺς **ἀκεραίους**, **κλασματικούς** καὶ **ἀσυμμέτρους**. “Εγίνεν τούτου πᾶς ἀριθμὸς

Δνίκαια αίνικοτε εἰς μίαν ἐκ τῶν πρώτων καὶ εἰς μίαν ἐκ τῶν δευτέρων μορφῶν.

Τοῦ λογικὴς ὄντες τῆς ἔννοίας τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὴν πλήρη γενικότητά της παρεβλάπτετο μέχρι τῶν ἡμερῶν ἡμιῶν. Οὐδὲ τῶν φυσιολογικῶν ὅρων τῆς Ἑλλεσσός της. Ἐπειδὴ η̄ ἀριθμησις περιφριστικένων ἀπὸ ἀλλήλων ὄντες τῶν παραστάσεων παρέσχε τὴν πρώτην μορφὴν πρὸς διαιρόρροψιν τῆς ἔννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ἐπειδὴ πατὰ ταῦτα ἐν τῇ γλώσσῃ ὑφίσταντο λέξεις, δηλοῦσαι μόνον τοὺς θετικοὺς μιεραίους ἀριθμούς, οὐδὲρχε καὶ ὑπεράρχεις εἴσιτε ἐνίστε η̄ τάσις, ὥστε ὡς κυρία τοῦ ἀριθμοῦ ἔννοια νοῆται η̄ μνημονεύθεια αἵτινη κατηγορία τῶν ἀριθμῶν, ἐνῷ οἱ ἀρνητικοὶ καὶ οἱ ηλιασματικοὶ ἔτε δὲ μᾶλλον οἱ μηγαδικοὶ καὶ οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ δὲν θεωροῦνται ὡς αὐθιύλαριτοι, ἀλλ’ ὁριστέονται ἀριθμητικῶν πρᾶξεων. Οὕτως οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ προσέχονται τῷ ὅντι ἐπ τῆς ἀριαρέσπειας ἐν τουτέτας περιπτώσει, οὐδὲ οὐδὲ τὴν αἵτινη δὲν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ, ἐπειδὴ η̄ ἀριαρέσπειας εἶναι μηγαδύτερος τοῦ μειωτέου. Ωσαύτως οἱ ηλιασματικοὶ ἀριθμοὶ προκίνετον ἐπ μὴ ἐκτελεστῶν διαιρέσεων καὶ ἐν τέλει οἱ ἀσύμμετροι καὶ οἱ φανταστικοὶ ἐπ τινῶν προβλημάτων, ἀπερι ἀφοροῦσιν εἰς τὴν ἔξαγωγὴν ὃτιος καὶ ὃν η̄ λύσις εἶναι ἀδύνατος διὰ τῶν συνίθων ἀριθμῶν. Ἀλλ’ ἀφιεβδεῖς η̄ μὴ ὕπαρχεις λύσεως ὠρισμένων τινῶν ἀπὸ λογικῆς ἀπόφεως ἀναγκαῖον προβλημάτων τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἀκοδικευνίται, οὗτοι η̄ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ ἀπαιτεῖ ὄντες τούχοντας, ιερίνες δύνανται νὰ πραγματοποιήσουν μόνον διὰ τῆς προσθίραις τῶν στεριατέρων ὕπαρχων τῶν ἀριθμῶν. Ως πρὸς τοὺς ἀρνητικοὺς καὶ τοὺς φανταστικοὺς ἀριθμούς ἀναγνωρίζεται γενικῶς τοῦτο, ίδιος διὸ οὗτοι η̄ ἔννοια τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ἔξετίθη μέχρι τῆς ἔννοίας μηγαδικοῦ ἀριθμοῦ, οἵτις η̄ γαγκρενίζεις εἰς μίαν ἀπὸ τῆς τυχαίας ἀφετηρίας τῆς ἀρχικῆς ταύτης γενέσεως τελείωσ. ἀνεξάρτητον διαιρόρροψιν μηγαδικῶν συστημάτων ἀριθμοῦ. Μόνον ἐν σχέσει πρὸς τοὺς ηλιασματικοὺς καὶ τοὺς ἀσύμμετρους ἀριθμούς δὲν διωλογεῖται συχνάως τὸ γεγονός, οὗτοι οὔτοι ἀπαιτοῦσιν οἷοντας ἐντατικήν τινα διεύρυνσιν τῆς ἔννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, ὥστε οἱ προιωνυμογενεύοντες ἐντατικήν διεύρυνσιν τῆς ἔννοίας ταύτης. Ἐν τούτοις τοῦτο πατενοΐθη η̄ δη οὐτὸ τοῦ Νεύτωνος, οὗτοις ἀπέρριψε τὸν διαιριδὸν τοῦ ἀριθμοῦ ὡς «συνδλούς μονάδων» καὶ οὐτις δισχυρίζετο, οὗτοι η̄ οὐσία τοῦ ἀριθμοῦ ἔγινανται «ἐν τῇ ἀφηρημένῃ σχέσει ποσοῦ τινος πρὸς ἕτερα δμοειδῆ ποσά». Οὕτως η̄ ἔννοια αἵτινη τῆς σχέσεως περι-

λαμβάνει τόσον τοὺς κλασματικὸς διουν καὶ τὸς απορρέουσ
ἀριθμούς, εἶναι ὅμως μονομερῆς κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν,
διότι ἔξαρσει μόνον τὴν ποσοτικὴν τῶν ἀριθμῶν ὅψην. Εἴδη οὐ-
λήσωμεν νὰ μὴ παρέδωμεν τὴν κατὰ ποιὸν ὅψην αὐτῶν, οἵτις ἐκ-
δηλοῦται εἰς τὰς διακρίσεις τῶν θετικῶν, τῶν ἀρνητικῶν καὶ τῶν
μιγαδικῶν ἀριθμῶν, η̄ περιοχὴ τῆς ἔννοιας τοῦ ἀριθμοῦ καλύ-
πτεται πλήρως ὑπὸ τῆς **καρονικῶς διατεταγμένης πολλότητος**.
Ἐκεῖ ἔνθα ἐν ἀναμοιάζει τινὶ πολλότητι ἐπιχειροῦνται προσδιοι-
σμοὶ ἀριθμῶν, ἀνδέκοτε λειτίσμονται ὑπὲρ ἐν τοῖς πρόγραμ-
τοις ἀντικείμενοι, οἵτις ὅστε γονεῖς ὡς κινούμενοι καὶ ἐντιθε-
ῖται πολλότητας τῶν ἀριθμῶν. Οὗτοι κατὰ τὴν ἀπεργίανταν ἀντικε-
μένον, καὶ οὐδὲ οὐτοὶ δημοτες τρόπον διανεμούμενον ἐν τῷ χώρῳ, δὲν
λαμβάνεται ὑπὲρ ὅψην τὸ διανόνιον τῆς διαθέσιος αὐτῶν. Οὐχ
ἴστοι η̄ ἔννοια τῆς κινούμενης πολλότητος εἶναι μόνον η̄ βάσης
τῆς ἔννοιας τοῦ ἀριθμοῦ καὶ οὐχὶ η̄ ἔννοια εἶται αὐτῇ αὐτῇ. Τὰ χρι-
στηριστικὸν τῆς ἔννοιας ταύτης γνώρισμα ἔγκειται μᾶλλον ἐν
τούτῳ, ὅτι αἱ κατὰ ποιὸν καὶ κατὰ ποιὸν ἴδιοι φρεσκοί, οἵτινες ἐν
τῇ πολλότητι γονεύνται ὡς συνδεδεμέναι, διεργούμενοι ἀετὸς ἀλλι-
λον ὡς διαφοριμέναι συστατικὲς μέρη ἔννοιαν, ἵνα συνδεθῶσι
πάλιν τὸ πρῶτον ἐν τινὶ περιλαμβανούσῃ ταῦτα ἔννοια. Τοῦτο
δηλοῦται ἐκ τούτου, ὅτι κακοτος μερονομένος ἀριθμὸς ἀνίρα
πρῶτον μὲν εἰς ὀρισμένον τι **ἀριθμητικὸν σύστημα**, ἐν ᾧ περι-
λαμβάνεται η̄ κατὰ ποιὸν θετικὴ η̄ ἀρνητικὴ, προτεριανὴ η̄
φανταστικὴ αὐτοῦ ἴδιότητες, δεύτερον δὲ εἰς ὀρισμένον τι **εἶδος**
ἀριθμῶν, ἐν ᾧ καθορίζονται αἱ κατὰ ποιὸν αὐτοῖς οὐσίαις, αἵτι-
νες ὑποτίθενται διὰ τὴν ἐν λόγῳ πολλότητα. Ενταῦθα ἀνίρα-
σιν αἱ διακρίσεις τῶν ἀκεραιῶν, πλασματικῶν καὶ απορρέουσ
η̄ συνεχῶν ἀριθμῶν.

Ἔτι περισσεύεις, διετοῦ τοὺς μὲν ἀπορρέουσας ἀριθμοὺς περι-
στῶμεν οὐχὶ ἀλλως εἰμὶ τῇ βοηθείᾳ προσεγγιζόντον κλασμάτου,
τὰ δὲ κλάσματα μόνον ὡς οχέσαις ἀκεραιῶν ἀριθμῶν, οὐδεμίαν
ἔχει σημασίαν ὡς πρὸς τὸ ζήτημα, ὅπερ ἀφορεῖ τὰς τὴν Σογδαῖην
αὐθυνπαρέβαιν τῶν ἀριθμῶν. Λιότε τὸ δεύτερον τῶν γεγονότων
τούτων, ὅπερ πρὸς τὸ πρῶτον συνδέεται ὡς προσαρτέσαι ἀκολου-
θία, προκύπτει ἐκ τῆς περιστάσεως, διετοῦ πρόκειται τῆς αναγνί-
σεως τῶν μονάδων καὶ τοῦ μερονομοῦ αὐτῶν, αἱ ἀντιστοιχιώμα-
ται πρὸς τὰ δύο εἶδη τῶν ἀκεραιῶν καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθ-
μῶν, συνάπτονται διηγειῶς πρὸς ἀλλήλας ἐν τῇ νοήσει ἡμῶν,
οὕτως ὅστε, ἵνα καθοστατεῖ πάντοτε θράκτη η̄ σύγκρισις τῶν
ἀριθμητικῶν ποιῶν, δέον. Αμφότεραι τὰ εἶδη τῶν ἀριθμῶν τὰς

παρίστανται διὰ τοιούτων τύπων, ὅστε, ὅταν παραστῇ ἡ ἀνάγκη, νὰ δύνανται νὰ μετατραπῶσιν εἰς ἄλληλα. Ἡ ἀδυναμία δημιουργοῦ νὰ μεταχειρίζεται ἐν σχέσει πρὸς τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς μόνον προσεγγίζοντος ἀριθμητικὰς παραστάσεις, προέρχεται ἐκ τῆς ἀπείρου ἐκτάσεως τοῦ προβλήματος, ὅπερ τοιούτου εἶδους ἀριθμοὺς ἐμπερικλεῖται ἐν ἕαυτῷ. Διὰ τὴν αἵτιαν ταύτην ἥγανγον ἡμᾶς οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοί, καθὼς καὶ ἡ ἀνάγκη παραστάσεως τῶν ἀγγωνίστων τοῦ προβλήματος ἐν τοι νέεσσι, εἰς τὴν χρησιμοποίησιν γραμμάτων πρὸς δήλωσιν ἀριθμῶν. Διὰ τῶν γραμμάτων τούτων τοῦ λόγου νοεῖται ὡς ἐκπληρουμένη πᾶσα λογικὴ ἀξίωσις, οἵτις δὲν δύναται νὰ πριγματοκοινῇται διὰ τῶν ἐμπειρικῶν ἐννοῶν τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ καὶ σύναμα ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ ἐκφράζεται” αὐτῶν τῶν μορφῶν τὴν πλήρη αὐτῆς γενικότητα. “Οὐεν, διὰ καθοριστομεν τὸ περιεχόμενον τῆς γενικῆς ἔννοιας τοῦ ἀριθμοῦ, δέον νὰ λέιψωμεν ὡς ἀφετηρίουν τὰ γενικώτατα ταῦτα σύμβολα τῶν ἀριθμῶν καὶ νὰ προβάλλωμεν εἰτα τὸ ἔξις ἐρώτημα: ποῖον εἶναι τὸ λογικὸν περιεχόμενον, ὅπερ δύναται νὰ δυθῇ εἰς τὰ σύμβολα ταῦτα ὑπὸ τοὺς ποικίλους ὅρους τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῶν;

“Ἔὰν συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα θελήσωμεν νὰ συμπληρώσωμεν τὸν ἐν τοῖς ἀνωτέρῳ μνημονευθέντι δρισμὸν τοῦ Νεύτωνος, δυνάμεθα ἐν γένει νὰ δρίσωμεν ἀριθμούν τινα ὡς τὴν κατὰ ποιὸν καὶ ποσὸν σχέσιν δύο μερῶν μιᾶς πολλότητος πρὸς ἄλληλα. Ἡ ἐκφρασις τῆς ποιοτικῆς σχέσεως διπλαῖς τὴν πιτάταιεν εἰς ὁρισμένον τι ἀριθμητικὸν σύστημα, ἡ δὲ ἐκφρασις τῆς ποσοτικῆς σχέσεως προϋποθέτει τὸν καθορισμὸν τοῦ εἶδους τοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτως, ἐπὶ παραδεγματι, ἀρνητικός τις ἀκέραιος ἀριθμὸς ἐμπεριέχει ποιοτικὸς μὲν τὴν ἀντίθεσιν πρὸς τινα ἵσον θετικὸν ἀριθμόν, ποσοτικῶς δὲ τὴν σχέσιν ἐνὸς ὅλου πρὸς τὴν μονάδα. Ἀκέραιος τις μηγαδικὸς ἀριθμὸς ἐμπεριέχει ποιοτικῶς μὲν εἴτε διὰ τῆς σχέσεως πρὸς δύο κυρίας κατευθύνσεις δεδομένον προσδιορισμὸν κατευθύνσεως, ποσοτικῶς δὲ τὴν ἐν ἀνατέρᾳ τούτων τῶν κατευθύνσεων σχέσιν τοῦ ὅλου πρὸς τὴν μονάδα. Ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς προσδιορίζει εἴτε τὴν σχέσιν ἐνὸς ἐκ μονάδων συνισταμένου μέρους πρὸς τὸ ὅλον, εἰς ὃ ἀνήκει (κλάσμα γνήσιον), εἴτε ἀντιστρόφως τὴν σχέσιν τοῦ ὅλου πρὸς τὸν πάλιν μέρος συγκείμενον ἐκ μονάδων (κλάσμα νόθον). Ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς ἐμπεριέχει σχέσιν τινὰ δύο μερῶν μιᾶς πολλότητος πρὸς ἄλληλα, οἵτις δύναται νὰ δηλοῦται μόνον διά τινος ἐπ’ ἄπειρον ἐκτενομένης κατατμήσεως εἰς πάντοτε μικρότερα στοιχεῖα. Εἰς τοὺς ποσοτικοὺς δὲ τούτους προσδιορισμοὺς προστίθεται ἐπά-

στοτε διὰ τῆς κατατίξεως εἰς τι σύντηρο ἀριθμὸν ἢ ἀκατου-
μένη ποιοτικὴ συμπλήρωσις.

Ἐν τῇ περιστάσει, διὰ ἐκαστος ἀριθμὸς διάφορος τῆς μονί-
δος παριστᾶ σχέσιν τινὰ ἔνδος ὅλου πρὸς τὰ μέρη αὐτοῦ, ἐνυπάρ-
χει ἥδη εἰς λόγος, ὅστις ἄγει ἡμᾶς ὑπὲρ τὰ ὅρια τῆς ἐννοίας τοῦ
μεμονωμένου ἀριθμοῦ. Ἀφοῦ ίδιαιτέρως ἐν τῷ πλεομετικῷ
ἀριθμῷ ἡ σχέσις ἐκείνη δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τίνος ἐνφρά-
σεως, ἵτις συγισταται ἐκ δύο διαφόρων ἀριθμῶν, ἢ μετάβασις
εἰς μίαν ἐπέκτασιν τῆς οὗτοι προκατατησης ἐννοίας τῆς σχέσεως
δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ εὐκόλως. Η ἐπέκτασις δημοσιεύεται
πλέον ὡς πιστικὰ μέρη, ἀνήκοντα εἰς μίαν μερογομένην ἐννοίαν
ἀριθμοῦ, ἀλλ' ὡς ἀριθμὸν αὐθιναίροντος, οἵτινες ἔννοεν τῆς πρὸς
ἄλληλους σχέσεως νοοῦνται ὡς ἐξαρτώμενοι ἀπ' ἄλλοις ἔργο-
βιστοῖς. Η οὗτοι προκατατησαι νὰ ἔννοια είναι ἡ τῆς συναρτήσεως.

2. Συνάρτησις.

Η πρώτη ἀριθμοῖ, οὐατες νοῦμεν δύο ἀριθμοὺς ἐν ὀμοιοτάτῳ
ἐξαρτήσει, δίδεται οὖτε ὁ εἰς παραγέται ἐκ τοῦ ἐτέρου. Η λο-
γικὴ πρᾶξις τῆς γενέσεως τούτης είναι ἡ **ἀριθμητικὴ πρᾶξις**, ἢ
δὲ μεταξὺ τῶν ἀρχαῖν τὰ διάφορα πρὸς τὰ ἔξι αὐτῶν παραγορέντων ἀριθ-
μὸν ἀμοιβαίνει σχέσις ἀποτελεῖ τὴν διὰ τῆς **πράξεως** σύνδεσιν.
Πάσσαι αἱ ἀριθμητικὰ πρᾶξις στηρίζονται ἐπὶ τῶν δύο ἀρχαῖν
ἐνεργειῶν τῆς ἀριθμητικος καὶ τῆς ἀντιστροφῆς αὐτῆς, ἐπὶ τῆς
προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως μονάδων. Καὶ αἱ σύνθεται πράξεις,
αἵτινες προκατατοῦσιν ἐκ τῆς ἀρχαῖς προσθέσεως μονάδων,
δύνανται μεταύτως καὶ ἀντιστρέψονται, οὕτως ὡστε αἱς ἀριθμοὶ,
ὅστις διὰ μιᾶς τῶν τεσσάρων θεμελιωδῶν πρᾶξεων, τῆς προσθέ-
σεως, τῆς ἀφαιρέσεως, τῶν πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως,
καθὼς καὶ διὰ τῆς ἐπαναλαίψεως τῶν δύο τελευταίων πρᾶξεων,
τῆς εἰς δύναμιν ἀντιτίθεσις καὶ τῆς ἐξαγωγῆς ἕιπος, πρέπει
εξ ἄλλου τινός, δύναται νὰ διανείγεται διὰ τῆς ἐνυπερέης αἱ πρά-
ξεως εἰς τοῦτον. Οὕτω πᾶσαι πραξεολογικὴ σύνδεσις περιλαμβά-
νει **ἀμοιβαίαν** τινὰ ἔξιρτησιν δύο ἀριθμῶν, ὁ γεφευτὴρ ἢ οὗτος
τοῦ ἀμοιβαίου λογικοῦ πιθανομοῦ ἀπομένει εἰς τάξις τῶν ἀριθ-
μογάς, εἰς ἃς ὑποβάλλεται ἡ ἔννοια τῆς λογικῆς ἐξαγωγῆς ἐπὶ
μαθηματικῶν πεδίον. Επειδὴ δὲ ἐνυπερέη πᾶσαι ἔξιρτησις πρά-
ξεσται ἐπὶ πραξεολογικῆς συνδέσεως καὶ ἐπειδὴ οὐδερίοι πρᾶξις
ὑπάρχει, ἵτις νὰ νοῆται ὡς μὴ δυναμένη καὶ ἀντιστρέψει, εἴναι