

καὶ εἰς τοῦτο ὅπος καὶ εἰς τὰ ἄλλα σημεῖα, λαμβάνονται ἀφορμὴν  
νὰ ἔχωσι πρὸς ὅφθαλμῶν τὰ συμπεριέστερα, ἥπερ ἀπὸ καθαρᾶς λο-  
γικῆς ἀφετηρίας συνίγαγεν ἡ θεωρία τῆς γνώσεως, τότε μόνον  
ὅμιλος θὰ δυνηθῶσιν αὕται νὰ ποιῶνται ἀφοριλεπτέρων χρῆσιν  
τῶν εἰδημένων συμπεριεσμάτων, οἵτινες ἀποτικλύνονται ἀρ' ἐκε-  
τῶν ἐκ τῶν προτέρων πάσις ἐκείνας τὰς ἀποφαλμένας προϋπο-  
θέσεις, αἵτινες στηρίζονται εἴτε ἐπὶ τῆς ἴδιας, εἴτε αἱ φιλοσοφικαὶ  
ἔννοιαι ἐκεῖναι, ὡς διασχιζόσθη ὁ Κάντιος, ἔχουσιν εἰς τὰς ἥθε-  
κας καὶ θρησκευτικὰς αξιώσεις τὴν ειντὸν παταγωγήν, εἴτε ἐπὶ  
τῆς γνώμης ὅτι, — ὡς ἐδίδαξεν ἡ παλαιοτέρα μεταφυσική, — αἱ  
ἥθικαι καὶ θρησκευτικὰς αξιώσεις αὕται προέρχονται ἐκ τῶν  
φιλοσοφικῶν ἴδεων.

## 2. Γενικαὶ λογικαὶ βάσεις τῶν ὑπερβατικῶν ἰδεῶν.

Μεταξὺ τῶν γενικῶν νόμων τῆς νοήσεως εἰς μόνον ὑπερβατικού  
δινάμενος νὰ ἔπεινται πάριν τῶν ὅρων δεδομένου τινὸς περιε-  
χομένου τῆς ἐμπειρίας. Ὁ νόμος οὗτος εἶναι ἡ ἀρχὴ τῆς αν-  
δέσεως τῶν ἡμετέρων ἔννοιῶν, συμφένοντος πρὸς τὴν *αλτίαν* καὶ  
τὸ ἀποτέλεσμα. Η διμοιδοῦσα καὶ ἡ διαφοροῦσα δύναμις πάντοτε  
νὰ ἔλεγχονται διὰ τῆς συγκρίσεως δεδομένων περιεστίσεων.  
Τοῦναντίον δὲ πρός τι ἀποτέλεσμας συνδεομένη αὐταὶ καὶ τὸ πρᾶς  
τιναὶ αὐτίαν συνδεόμενον ἀποτέλεσμας δὲν δύναται νὰ δοθῇ  
κατὰ νοητὸν τρόπον ἢν τοῖς πρινεριστοῦ, ἀλλὰ προτίθενται συ-  
πληρωματικῶς εἰς δεδομένον τὸ γεγονός. Μάλισται δὲ ἡ ἔνδειχο-  
μένη αὕτη πρόσοδος τῆς ἡμετέρους διαγνώσεως, ἥτις ἔπεινται  
πιπέρ τὰ ὅραι τῆς πριγματικῆς ἐμπειρίας, ἀποβαίνει ἀναγνώσια,  
ἄμα δὲ θεωρήσωμεν τὸν νόμον τῆς αὐταὶ καὶ τοῦ ἀποτελέσμα-  
τος, καθάς ὅλως ἀπαιτεῖ τοῦτο ὁ γαροκαλὸς αὐτοῖς, δις γενικῆς  
ἰσχύοντα νόμου τῆς νοήσεως, ὡς ἐφιρριοδότερον ἀρ' ἕπειτον  
ἴδιαίτερον περιεχόμενον ἔννοιαν. Πρετίδη τὸ περιεχόμενον τῆς  
ἡμετέρας ἐμπειρίας εἶναι πάντοτε περιποριαμένον, δὲ πρόσοδος τῶν  
αὐτίων πρὸς τὰ ποτελέστερα καὶ ἡ ἐπιναγματικὴ τῶν ἀποτελεσμά-  
των εἰς τὰς αὐταὶ περιορίσεις ἀπότικης μὲν προστέμνει τινὰς ὅραι,  
ἐκρ' ὅσον αὕτη συνδέει ἐμπειρικὴς γνώσεις. Πρετίδη ὅραις δὲ εἰς  
τὴν γενικὴν ἰσχὺν ἀφορῶσι πέποντες ἀπαιτεῖ τὴν ἐφιρριοδότην τοῦ  
νόμου τοῦ ἀποχρῶντος λόγου ἐπὶ πειστὸν τῶν ἐνδεχομένων ἐμπει-  
ρικῶν γνώσεων, ὅχι δὲ μόνον ἐπὶ τῶν ἥδη ἀποκτηθεισῶν, ἡ  
πρόσοδος αὕτη ἀποβαίνει περιποριαστος, διότι γεννᾶται ἢν τῇ  
ἡμετέρᾳ διανοήσει ἡ ἀνάγκη τοῦ ν' ἀνιψητῶμεν, δις πρὸς τοὺς

ἀρχικὰ καὶ τελικὰ σημεῖα τῶν ἐμπειρικῶν συνειδμῶν, τὰ οἰκεῖα μέρη ἔξω τοῦ πεδίου τῆς πραγματικῆς ἐμπειρίας. Βεβαίως ή εἰς τὴν πραγματικότητα προστεθεῖσα ἴδεατή αὕτη συμπλήρωσις δύναται νὰ μεταβληθῇ ὑπό τινας δρους καὶ εἰς μονομερεῖς τινας περιπτώσεις εἰς πραγματικὴν ὑπόστασιν. "Ἐνεκεν δῆμως τοῦ λόγου τούτου ή στιγμὴ τῆς μεταβάσεως εἰς ἔξω τῆς ἐμπειρίας κειμένας αἴτιας καὶ ἀκολουθίας δύναται μὲν νὰ ἔνταθῇ περαιτέρω, οὐδέποτε δῆμως εἶνε μόνοντὸν ν' ἀρθῇ ἐξ δλοκλήρου. Τοῦναντίον ή διηγεκῶς ἐκδηλουμένη λειτουργία τῆς εἰς πραγματικὰ συμβεβηκότα μεταβολῆς ἐνδεχομένων γεγονότων, καθ' ἣν διαρκῶς ὑπερπηδῶνται τὰ ἐπιτευχθέντα δρια, εἶνε ἐν πρώτοις ἐκείνη, δι' ης ή φιλοσοφικὴ νόησις λαμβάνει συνείδησιν ἐαυτῆς, ὡς τινος πρὸς τὸ ἀπειρον σταθερῶς ὁρπούσης ἐνεργείας τοῦ πνεύματος. Θὰ ἦδύνατο τις νὰ εἴπῃ, ὅτι διὰ τοῦ τρόπου τούτου γεννᾶται τὸ πρῶτον ή φιλοσοφικὴ διανόησις, δοθέντος ὅτι τὴν δρᾶσιν ἐκείνην τοῦ πνεύματος, ήτις τὴν διεργασίαν τῆς πραγματικότητος συμπληροῦ δι' ἴδεῶν, αἵτινες περιβάλλουσι σύμπασαν τὴν ἐμπειρίαν, χωρὶς ν' ἀνήκωσιν εἰς ταύτην, θεωροῦμεν ὡς ἐνέργειαν τῆς φιλοσοφικῆς διανοήσεως. Κατὰ τὴν ἔννοιαν ταύτην ή γνῶσις τῆς γενικῆς ἰσχύος τοῦ νόμου τοῦ ἀποχρῶντος λόγου ἀποτελεῖ τὴν στιγμὴν τῆς γενέσεως τῆς φιλοσοφικῆς διανοήσεως.

"Ἀλλ' ἐπειδή, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, ή συνφδὰ τῇ αἴτιᾳ καὶ τῷ ἀποτελέσματι προκύπτουσα σχέσις προϋποθέτει τὴν εἰς τὰ μέρη αὐτοῦ ἀνάλυσιν συνόλου τινός, ἐφ' ὅσον πᾶσα σχέσις ἐξαρτήσεως ἀπαιτεῖ σύνολόν τι, ἐνῷ τὰ ἀπὸ ἄλληλων ἐξαρτώμενα μέρη περιέχονται ἐν ἀμοιβαίᾳ πρὸς ἄλληλα συναφείᾳ, ή εἰς ἀπεριόριστόν τινα πρόδον ἀφορῶσα ἴδεα ἐκείνη, ήτις ἐπιβάλλει τὴν ὑπὲρ πάντα τὰ δεδομένα δρια ἐπέκτασιν τοῦ συνειδοῦ τῆς πραγματικότητος, συνδέεται πρὸς τὴν εὐρυτέραν ἴδεαν τοῦ συνόλου πάσης ὑπάρξεως, ἐν ᾧ θεωρεῖται ὡς συντελεσθεῖσα ή εἰρημένη πρόδος, καίτοι αὕτη ἐν τοῖς καθ' Ἑκαστα αὐτῆς καθορισμοῖς οὐδέποτε θὰ εἶνε δυνατὸν νὰ πραγματοποιηθῇ τελείως. "Η γνῶσις, ὅτι ή ἴδεα τῆς ἀπείρου προόδου πασῶν τῶν συνδέσεων καὶ ή συναρμογὴ τοῦ ἀπείρου αὐτῶν ὀριθμοῦ πρὸς τι σύνολον ἐξαρτῶνται ἐντελῶς ἀπὸ ἄλληλων, ἐπεβλήθη μετά τινος ἀκατατιαχήτου φυσικῆς ἀναγκαιότητος εἰς πᾶσαν ἔρευναν, ἀφορῶσαν εἰς τὸ περιεχόμενον τῶν ὑπερβατικῶν φιλοσοφικῶν ἴδεῶν, καίτοι δ τρόπος τῆς ἀλληλουχίας ταύτης θὰ παραμείνῃ ἵστος τόσον ἄγνωστος, ὃσον ἀφίστανται οὐσιωδῶς ἀπὸ ἄλληλων αἱ ἔννοιαι τοῦ ἀπείρου, εἰς ἀς μάγουσιν ήμας ἀμφίτεραι αἱ εἰρημέναι ἴδεαι. "Ἐνεκα τοῦ

λόγου τούτου δένεται νὰ συμβῇ, μάτε, ἐν τινὶ σπειδίῳ τῆς ἐποπτείας, οὐ υπὲρ πᾶν δεδομένον ὅριον μὴ διναρένη νὰ ἐκτεθῇ πρόσοδος καὶ τὸ συμπληρωθὲν σύνολον παντὸς ὅτι δύναται νὰ δοθῇ εἰς τὴν νόησιν, ν' ἀντιράσκωσι τελεῖως πρὸς ἄλληλα. Καὶ ἐν τούτοις οἱ δύο ἀτέφυμονες οὖτοι συνειρίποι συνδέονται στενῶς πρὸς ἄλλήλους. Οἱ εἰς οὐδέποτε δύνεται νὰ διτέρην ἔνευ τοῦ ἑτέρου, διότι ἐκάστη αἵνδεστις τῶν μερῶν ἀλληλουχίας τινός, ἂρι καὶ πᾶσι ἐν αὐτῇ συντελούμενῃ πρόσοδος, προσποθέτει σχέσιν τινὶ ἐξαρτήσεως τῶν μερῶν τούτων, μετ' αὐτῆς δὲ τὴν συναρμογὴν πρὸς τις σύνολον, ἐν φάσει πάντα τὰ μέρη ταῦτα.

### 3. Μαθηματικὰ ὑπερβατικὰ ἰδέα, πραγματικὰ καὶ φανταστικὰ.

**Πλεονεκτήν** ἀπόδειξιν οὐχὶ μόνον ὡς πρὸς τὴν γενικήν πιθανότητα, ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς τὴν ἐπιτερψικήν ἀναγκαιότητα τουατῆς τινὸς ἐξάρσεως τῆς νοήσεως ὑπὲρ πᾶν δεδομένον ὅριον τῆς ἐργασίας, παρέχουσι τὰ στρατηγὰ τῆς ἐπιστῆμης ἀνάγνησην, ἵνα τριάντα, ἵνα ἀντικατέστηται τὴν μεταφρονεῖν, ἵνε αὐτῇ εἶχεν ἀπολέσει εἰς τὰ ὅμιλα τῶν φιλοσόφων τὸ εὐλαύνον προνόμιον αὐτῆς τοῦ ν' ἀσχολῆσαι περὶ τὴν εὑρετικὴν αριθμονοῦ τοῦ πιθανοῦ καὶ τοῦ ἀνδεχομένου. Πρόκειται περὶ τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Τὰ μαθηματικὰ κανονίται πατ' αρχὰς ἐντὸς τῶν ὕψων τῆς ἐμπειρίας. Αἱ ἔννοιαι τῶν ἀριθμῶν, τῶν τοπικῶν μορφῶν τῶν σχέσεων τῶν σπιστῶν, διαιροφορίνται πανταχοῦ ἐν τωτικῶν (εἰδολογικῶν) ἀφαιρέσισιν, προερχομένων ἐκ τῶν ἀντικατιμένων τῆς ἐμπειρίας. Η μαθηματικὴ ὅριος ἐπιστῆμην ἐξυφιᾶσι πανταχοῦ ὑπὲρ τὰ ὅρια τῆς ἐργασίας, διότι παροτρύνεται αὐτῇ εἰς τὸ νὰ δίδῃ εἰς τὰς ἐν τοῖς ἐμπειρικοῖς ἀντικείμενοις ἀρχομένας διαπλάσεις τουατῆν ἐκτισιν, οἷαν ἐπιτρέπει ἡ ἐκ τῶν ἐπιστεριῶν ἀποδείξεων τελεῖος ἀνεξάρτητος λογικότης τῆς μαθηματικῆς σκέψεως. Οὔτες ἐξελίσσουνται αἱ ἔννοιαι τοῦ ἀριθμοῦ, τῆς στολλότητος καὶ τῆς συναρτήσεως, αἵτινες εἶναι ὅλως ἀνεφόριστοι εἰς ἀριθμῆτὴν ἀντικείμενα τοῦ ἐμπειρικοῦ κόσμου, εἰς πραγματικὰς συναρτήσεις ἀντικείμενα καὶ εἰς σχέσεις πραγματικῆς ἐξαρτήσεως. Λιὸν πάντων τούτων ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη δειπνεῖ καταργανῶς τὴν τάσιν, ἢν γει ἡ νόησις ἡμῖν, σπῶς ὅριωμένη ἀπὸ τῆς ἐργασίας ὑπερτεμπέζει πάντα τὰ ὅρια ταῦτης. Οὐχὶ δὲ μόνον ἀπλοῦ παράδειγμα, ἀλλὰ καὶ μαρτύριον τῆς δικαιολογημένης ἀναγκαιότητος τῆς τάσεως ταύτης παρέχουσιν εἰς ἡμῖν αἱ ὑπερβατικαὶ θεωρίαι τῶν μαθηματικῶν ἐπι-

στημέν. Διότι ούδεις δύναται ν” ἀμφισβήτησῃ τὸ δικαίωμα, ὅπερ ἔχει ἡ νόησις ἡμῶν, μπως ἀφορμωμένη ἀπὸ δεδομένης τινὸς ἀφετηρίας ἐννοιῶν ἀκολουθῆς τὴν ὅδὸν τῆς προόδου, ἐφ’ ὃσον ἐπιτρέπει τοῦτο ἡ σύνδεσις τῶν ἐννοιῶν, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ ἀποχρῶντος λόγου. Ἐπειδὴ δικαίωσι πᾶσαι αἱ τοιαῦται θεωρίαι ἔχουσι τὸ δικαίωμα τοῦτο, μόνον διότι ἐκπρορεύονται ἐκ τῶν γενικῶν νόμων τῆς νοήσεως, δέον νὰ δμολογήσωμεν, ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη παρέχει ἀποκλειστικῶς ἐν ίδιαζόντως καταφανὲς παράδειγμα τῆς ἐν τῷ ἀνθρωπίνῳ πνεύματι ἐνυπαρχούσης πρὸς μόρφωσιν ὑπερβατικῶν ἰδεῶν ὥσπει, καὶ δτὶ θὰ ᾖ τὸ παράλογον νὰ μπολάβωμεν τὴν πρὸς τὸ ἀπειρον καὶ τὴν ἐνότιτα τάσιν ὡς μαθηματικὴν τρόπον τινὰ εἰδικότιτα. “Οσον δημιούργων πρόκειται ἐνταῦθα περὶ μόνου μαθηματικοῦ ἐνδιαιρέοντος, τοσοῦτον σπουδαιότερον δέον ἀκριβῶς νὰ θεωρῶμεν τὸ παράδειγμα τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, δεδομένου δύντος δτὶ οἱ δροι, οἱ ἀφορῶντες εἰς τὴν γένεσιν καὶ εἰς τὴν ἐνδεχομένην πραγματικὴν σημασίαν τῆς ὑπερβατικῆς ἐξελέξεως τῶν ἰδεῶν, δύνανται νὰ διαβλέπονται σιφέστατα ὑπὸ τεύτης.

Καταφανής δὲ είνε ὁ καθαρῶς τῆς μαθηματικῆς σκέψεως τυπικὸς χαρακτήρας, ὅστις τὰ μάλιστα συμβιάλλεται εἰς ὑπερβατικὰς διαπλάσεις ἐννοιῶν. Ἡ τυπικὴ Ἑλλένις δύναται δηλονότι νὰ ἔκτείνεται ὑπὲρ πᾶν δεδομένον ὅριον, ἐπειδὴ οἱ κανόνες τῆς ἐπεκτάσεως ταύτης παρέχονται ὑπὸ τῶν κανόνων τῶν ἔκτελουμένων πρόξεων, καὶ διότι ἔκτὸς τῶν κανόνων τούτων οὐδεὶς ἄλλος ὅρος είνε ἐνταῦθα ἀναγκαῖος. Ἡ παρότρυνσις πρὸς ἐπέκτασιν τῶν ἐν τοῖς ἀντικειμένοις τῆς ἐμπειρίας ἀρχομένων συνθέσεων καὶ ἀναλύσεων τῆς μαθηματικῆς σκέψεως εὑρίσκεται ἦδη, ὡς φαίνεται, εἰς τὰς γενικὰς ἴδιότητας τῶν ἐμπειρικῶν μορφῶν, αἵτινες χρησιμεύουσιν ὡς βάσεις πάσης μαθηματικῆς μορφήσεως ἐννοιῶν. Ὁ χῶρος, καθὼς λέγει ὁ Κάντιος, είνε δεδιομένος ὡς ἀπειρον ποσόν, ἢ δὲ διαδρομὴ τοῦ χρόνου είνε ἐπίστης ἀπεριόριστος. Λιὸ πᾶσα κίνησις, ἢ ἣ ἀπαρίθμητις τῶν ἐν χώρῳ καὶ χρόνῳ ἀντικειμένων, δύναται νὰ ἔκτείνεται ἐπ' ἀπειρον. Ἐν τούτοις είνε εἶδός τι συγχύσεως αἴτιας καὶ ἀποτελέσματος, ἐὰν τοὺς τύπους αὗτῆς τεύτης τῆς ἐμπειρίας Θεωρήσομεν ὡς ἀρχικῶς ἀπεριορίστιν συναρτήσεις. Ἡ ἐμπειρία δὲν είνε ἀπειρος οὔτε κατὰ τὴν μορμὴν οὔτε κατὰ τὸ περιεχόμενον αὐτῆς. Ἀπειρος είνε μόνον ἡ πρόδος ἀπό τινος μέρους τῆς ἐμπειρίας εἰς ἕτερον ἢ ἀπό τινος ἀντικειμένου εἰς ἄλλο ἀντικείμενον. Εἶνε δὲ ἡ πρόοδος αὕτη ἀπεριορίστος, διότι ἡ νόησις ἥμινν εἰς πάσις αὗτῆς τὰς ἐνεργείες, ἀρτ

καὶ εἰς τὰς ἀπλουστάτας ταύτις ἐφαρμογὰς ἐπὶ τῆς τυπικῆς τῶν ἀντικειμένων συνδέσεως, εἶναι εἰς θέσιν νὰ ὑπερβαίνῃ πᾶν δεδομένον ὅριον. Ὁ τοπικοχρονικὸς ἡμῖν σταραστατικὸς κόσμος ἐμπεριέχει πάντοτε περιωρισμένον τινὰ ἀριθμὸν αὐτοτελῶν σταραστάσεων· ἐὰν δὲ δὲν λέβωμεν όπ' ὅφιν τὰς ἀπαιτήσεις τῆς ἡμετέρας διανοήσεως, θὰ ἴδωμεν, ὅτι μία οὖα δήποτε σταραστατικὴ εἰκὼν οὐδεμίαν ἐμπεριέχει ἐν ἕαυτῇ αλτίσιν, οἵτις θὰ ἔδιδεν εἰς ἡμᾶς ὥφορομήν ως μή θεωρῶμεν ταύτην ὡς αὐτοτελές τι καὶ συμπεπληρωμένον. Καίτοι δὲ δημολογεῖται, ὅτι οἱ πραγματικὴ διαδρομὴ τῶν παραστάσεων καὶ η ἐν χώρᾳ καὶ χρόνῳ ἐμπειρικὴ διάταξις τῶν ἀντικειμένων ὑποβοηθοῦσιν ἕκανως τὴν εἰς τὴν ἀπεργοῦ πρόσθιδον ἀφορῶσαν ἴδειν ἔκεινην, καθόσιν ἐν πάσῃ ἀλληλοιχτὶ τῶν ἡμετέρων ἐμπειρικῶν γνώσεων οὐδέποτε ὑπάρχει περίστασις, προάγουσαι οἵτις εἰς τὴν μόρφωσιν τῆς ἔννοιας ἀπολύτου τινὸς ὅρου, η ειδικότης δημοσιότης τῆς πατιλλήλου συνδεσμοῦ τοῦ ἐμπειρικοῦ τῶν ὅγειων συναρμοῦ μεταξὺ τινος ἴδεις, οἵτις ἐν οὐδεμιᾷ ἐμπειρίᾳ εἶναι δυνατόν νὰ πραγματοποιηθῇ, ἀποβαίνει ἔλικς διάφορος τῆς παταγωγῆς αὐτῆς ταύτης τῆς ἴδειας. Ταύτην δινάμεθα ν' ἀποκτήσωμεν μόνον ἐν τῇ νοήσει. Διότι, οσον παὶ δὲν εἶναι ἀκατάσχετος η ὁπεῖ πρός ἐπέκεισιν τῆς ἡμετέρας ἐμπειρίας, η αἰσθητικὴ ἀντίληψις, στηριζομένη ἡρ' ἕαυτῇ, θὰ νοῇ ως ἀνυπέρβλητε τὰ ὅραι ἔκειναι, ἀπερ δὲν ἔχουσι πρέγματι ὑπερονικήθη. Μόνον η νόησις δύναται ν' ἀπαιτήσῃ ἀπέκτασιν τινας τῆς ἐμπειρίας, οἵτις δὲν δίδεται εἰς οἵτις ἐν τῇ αἰσθητικῇ ἀντίληψι. Τὴν δύναμιν δημοσιότητην ἀντλεῖ η νόησις ἐκ τῆς συμφόνως πρὸς αἰτίας καὶ ἀποτελέσματι συνδέσεως ἔκεινης, οἵτις ἐφίνη οἷτιν ὡς πηγὴ τῶν δύο ἴδεων τοῦ ἀπειροῦ καὶ οἵτις ἄγει τὴν νόησιν οἷτιν εἰς τὴν συναρμογὴν πάντων τῶν αὐτοτελῶν γεγονότων, οἵτοι εἰς τὴν ἴδειν τῆς ἀπεργοῦσαν τῶν συνδέσεων καὶ εἰς τὴν ἴδειν τοῦ ἀπειροῦ ἀριθμοῦ τῶν συνδέσεων τούτων.

' Εἶναι ἕντες τὰ πρέγματα ἔχοσιν οὕτως, αἱ παραστάσεις τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου δὲν θὰ εἶναι, ως συνήθως πιστεύεται, τὰ πρότυπα πασῶν τῶν ἐνδεχομένων διαμορφώσεων τῆς ἴδειας τοῦ ἀπειροῦ η αἱ πραγματοποιήσεις τῆς ἴδειας ταύτης, ἀλλ' ἀπλῶς μόνον παραδείγματα τῆς πραγματώσεως τῆς περὶ οὓς δὲ λόγος ἴδειας, ης κυρία πηγὴ εἶναι η συνφδὴ τῷ νόημῷ τοῦ ἀποχρῶντος λόγου συνδέουσαι νόησις.

' Εν πάσῃ περιπτώσει καὶ ὡς ἀπλᾶ θεωρούμενα παραδείγματα, αἱ μορφαὶ τῆς ἐμπειρίας παρέχουσι, μετὰ τῶν ἐξ αὐτῶν

προερχομένων μαθηματικῶν μορφῶν τῆς νοήσεως σημαντικὴν βάσιν τῆς ἐν γένει ἔξελίξεως τῶν φιλοσοφικῶν ίδεῶν. Ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη ἐμδρφωσε, μετὰ τῆς χαρακτηριζούσης αὐτὴν σαφηνείας καὶ θετικότητος, ἀρχὰς καὶ ἀκριβεῖς μεθόδους καὶ εἰς τὰ σημεῖα ἀκόμη ἐκεῖνα, ἐνθα αἱ γενικώτεραι φιλοσοφικαὶ ἔννοιαι τῆς αὐτῆς καταγωγῆς δὲν ἥδυνήθησαν νὰ ἔξελθωσι τοῦ νεφελώδους συμφυμοῦ μετ' ἐννοιῶν ἐμπειρικῆς προελεύσεως, μετ' ἥθικῶν πόθων καὶ ἀξιώσεων καὶ ἐν τέλει μετὰ τελείως φυταστικῶν καὶ ἀβασίμων παραστάσεων.

Ἐπὶ μαθηματικοῦ πεδίου ὑπάρχουσιν ἐν πρώτοις δύο, κατὰ τὴν γενικὴν σημασίαν αὐτῶν, δλως διάφοραι εἴδη συνεχείας τῆς ἐπεκτάσεως τῶν ίδεῶν ὑπὲρ τὰ ὅρια τῆς ἐμπειρικῆς ἀφετηρίας καὶ τῶν ἐμπειρικῶν ἐφαρμογῶν. Κατὰ τὴν ἀπεριόριστον πρόσοδον τοῦ πρώτου εἴδους αἱ ὁδοὶ νοηταὶ θεωρούμεναι ἐννοιαὶ τῆς ἐνότητος εὑρίσκονται ἐν πλήρει κατὰ ποιὸν συμφωνίᾳ πρὸς τὰς ἐμπειρικῶς δεδομένας ἀρχαὶς αὐτῶν ἀξίας. Αἱ ἐννοιαὶ ἀπομένουσιν, ἵνα ἐκφρασθῶν μαθηματικῶρον, ἐντὸς μᾶς καὶ τῆς αὐτῆς συναρτήσεως. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δὲν ἀποδίδεται εἰς εἰδῆς ταύτας τὰς ἐννοίας, ἀλλὰ μόνον εἰς τὴν γενικήν ίδεαν τῆς ἐπεκτάσεως αὐτῶν ὑπὲρ πᾶν καθωρισμένον ὅριον ὑπερβατική τις σημασία, κατὰ τὴν φιλοσοφικὴν σημασίαν τῆς λέξεως<sup>1</sup>. Ἡ ἀπεριόδος σειρὰ τῶν Θετικῶν καὶ πάντων τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ἢ ἀπειρος ἐκτασίς τοῦ χόρου καὶ τοῦ χρόνου, ἀλλὰ καὶ ἡ ὁδὸς ἀπειρος νοούμενη διαφερότητης σταθερῶς ἐκτατοῦ ποσοῦ, ἀνήκουσιν εἰς τὴν ὑπερβατικήν σημασίαν τῆς τυνημονευθείσης ίδεας ταύτης. Ἐπειδὴ αἱ τυπικαὶ ίδιοτητες τῶν ἀντικειμένων, αἵτινες ἐκδηλοῦνται διὰ τῶν ἐννοιῶν τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ χρόνου καὶ τοῦ χώρου, γενικῶς ἴσχύουσιν, οὕτως ὡστε ἀντικείμενα, ἀπεριόδυτα τῶν ίδιοτήτων τούτων, νὰ μὴ εἴναι εἰς ἡμῖνας νοητά, ἢ ἀπεριόριστος ἐπέκτασίς τῶν ἐν τοῖς ἐμπειρικοῖς ἀντικειμένοις

1. Θεωρούμεν σχεδὸν περιττὸν νὰ τονίσωμεν ἀντανθό, ὅτι ἡ περὶ τῆς πρόκειται φιλοσοφικὴ ἐννοια τῶν ὑπερβατικῶν ίδεῶν δέον νὰ διαχρίνεται ἀπὸ τὴν τὸ αὐτὸ δόγμα φέρουσαν μαθηματικὴν ἐννοιαν. Ἀπὸ ιστορικῆς ἀπόφεως ἡ ὀρχὴ τῆς τελευταῖς ἐννοίας ταύτης προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι, κατὰ τὸ παράδειγμα τοῦ Λεΐβνιτσου, ἐκάλουν «ὑπερβατικά» τὰς ποσότητας καὶ τὰς συναρτήσεις ἀκείνας, αἵτινες δὲν ἥδηναντο νὰ διατυπῶνται ὑπὸ τῶν συνήθων ἀριθμητικῶν πρότερων. Μία δημος σχέσις πρὸς τὴν φιλοσοφικὴν ἐποψιν ὑπερβατικὴ ποσότης δύναται νὰ νοηθῇ ὡς προκύπτουσα ἐξ ἀπεριόδου τινὸς ποσοῦ ἀριθμητικῶν πρότερων.

ἀποκτηθειοῦν τυπικῶν ἐννοιῶν ὑπὲρ τὰ ὅρια πάσης δεδομένης ἐμπειρίας λαμβάνει ἀμέσως πραγματικήν τινα σημασίαν. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ οἱ ὑπερβατικότης δύναται νὰ μεταβάλλεται συνεχῶς ἐν μέρει εἰς πραγματικότητα, ή δὲ ἀπειρος ἐπέκτασις τῶν τυπικῶν ἐννοιῶν λαμβάνει ὡς ἐκ τούτου γενικὸν ἄρρος, ὥστε εὑρίσκεται ἐν τῇ αὐτῇ βαθὺτερᾳ, εἰς ᾧ προσέρχεται καὶ τὸ γενικὸν ἄρρος τῶν ἡμιετέρων ἐμπειρικῶν καὶ ἀφηρημένων μορίων.

Ἄλλως δῆμος ἔχει τὸ πρᾶγμα, δισον ἀφορᾶ εἰς τὰς ὑπερβατικὰς τοῦ δευτέρου εἴδους μορφάς. Ἐνταῦθι δὲν πρόκειται πλέον περὶ ἐννοιῶν, αἵτινες ἐκτείνονται ἐν ἕπει τῇ βίᾳ τῶν τυπικῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀντικειμένων διαμορφωμένον σύνολον ἐννοιῶν ὑπὲρ τὰ ἐν πάσῃ μονομερεῖ περιπτώσκι δεδομέναις ὅραι, διατηροῦσαι τὰς εἰς αὐτὸν ἀντηκούσας κατὰ ποιὸν ἰδιότητας, ἀλλὰ περὶ τίνος τελείως νέας ἐννοίας, δοθέντος ἦτι αἱ πραγματικὰ τυπικὰ ἐννοιαὶ, εἴτε διὰ τῆς μεταβολῆς τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν, εἴτε διὰ προσθήκης νέου τοιωτῶν, μεταβιάλλονται εἰς ἐννοίας, πρὸς ἃς πλέον δὲν ἀντιπορίνονται αἱ τυπικὰ ἰδιότητες καὶ αἱ οχέσαις πραγματικῶν ἀντικειμένων. Ἐννοεῖται οὕτων, ὅτι τοιωδαὶ μεταβολαὶ δὲν πορθαίνονται εὐηγγέλη καὶ ὡς ἔτυχεν, ἀλλὰ δύνανται νὰ προέρχονται μόνον ἐκ τῶν εἰς ἐμπειρικὰ ἀντικείμενων διαμορφωμένων ἐννοιῶν. Ὅπερ χρονούσιν ἵδη μάλισται εἰς αὐτὰς ταύτας τὰς πραγματικὰς τυπικὰς ἐννοίας, κατὰ πανόντα, ὑφιστάνται τινὰ ἀλιτήρια τοπούσιαν ἐπεκτείσεων. Ἀλλ' οἱ κυρίες διαφορὰς μεταξὺ τοῦτον αὐτῆς τοῦ πρώτου εἴδους συντίτεται ἐν τούτῳ, ὅτι οἱ ἐννοιαὶ, ἐν ἐκάστῳ ἰδιαιτέρῳ αὐτῆς μόροι, δὲν εἶναι ὑπερβατικής φύσεως μόνον εἰς δισον ἀφορᾶ τὴν ὠρισμένης τινὸς ἀξίας ποιῶν ὑπερβατικούσιν ἐπέκτασιν. Τὰ πραντευτικὰ ἀριθμητικὰ συστήματα, αἱ φραντευτικαὶ ἐννοιαὶ τῶν μεταβολῶν καὶ τῶν συναρτήσεων ἀνήκουσιν εἰς τὸ εἶδος τοῦτο. Οὗτοις οἱ ἐννοιαὶ ἔτι παραδείγματι τῶν ν διαστάσεων προέρχεται καταφυγῶς ἐκ τῆς ἐννοίας τοῦ πραγματικοῦ χώρου. Οὐδεμία ὑπάρχει ἐν τῇ πρώτῃ ἐννοίᾳ κατὰ ποιὸν ἰδιότης, οἵτις νὰ μὴ προκαταντέται ἵδη ἐν τῇ δευτέρᾳ ἔνεκεν δῆμος τῆς αὐξήσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διαστάσεων, οἱ ἐννοιαὶ αὗται εἶναι ἐκ τῶν προτέρων ἀνεφύσησιοις εἰς τὰς τυπικὰς ἰδιότητας τῶν πραγματικῶν ἀντικειμένων. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον γεννήται οἱ ἐννοιαὶ τῶν φραντευτικῶν ἀριθμῶν ἐκ τῆς ἐννοίας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἴτε διὰ τῆς προστοθέσεως, ὅτι ἐκάστη ἀριθμητικὴ πρᾶξις εἶναι ἐν πάσῃ περιπτώσει ἐπεκλέσιμος, τουτέστι διὰ τῆς παραδοχῆς, ὅτι πᾶσαι τοιαύτη πρᾶξις παρέχει γίον τινὰ ἀριθμόν, ἐκεῖ ἐνθα δὲν ομιλεῖνται πράγματι τοῦτο, γιατὶ δὲν

παραδείγματι κατὰ τὴν ἐξ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ ἔξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς δύζης, εἴτε διὰ τῆς παραδοχῆς τῆς ποιοτικῆς διαφορᾶς τῶν ὅριθμητικῶν μονάδων ἀναλόγου εἶδους, καθ' ὃν τρόπον ὑπάρχει τοιαύτη μεταξὺ τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν πραγματικῶν μονάδων. Καὶ εἰς τὰς δύο αὗτὰς περιπτώσεις ἀγόμεθα εἰς μεταβολὰς ἀριθμῶν, αἵτινες δὲν ἐπιτρέπουσιν ἀμεσόν τινα ἔφαρμογὴν εἰς πραγματικὰ ἀντικείμενα. Ἐν τούτοις διδάσκει ἀκριβῶς τὸ τελευταῖον παράδειγμα, ὅτι τοιαῦται ἔφαρμογαὶ δύνανται νὰ γίνωσιν ἐκ τῶν ὑστέρων. Τοῦτο συμβαίνει κατὰ κανόνα, ὅταν εἰνε μνημονεύση, ὅπως ἡ κατὰ τὸν μνημονεύσηντα τρόπον μօρφωθεῖσα ὑπερβατικὴ ἔννοια μεταφέρεται εἰς ἀντικείμενα, ἀπερ κεῖνται ἀρχικῶς ἐκτὸς τοῦ πεδίου αὐτῆς. Οὕτως οἱ συνήθεις φανταστικοὶ ἀριθμοὶ εὑρον πραγματικὴν τινα ἐρμηνείαν, καθόσον εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς μεταβολῆς τῶν ἀριθμῶν μετηνέχθη ἡ εἰς ταύτην ἀρχικῶς ἔννοια καὶ ἐκ τῆς παραστάσεως τοῦ χώρου παρειλημμένη ἔννοια τῶν διαφόρων κατευθύνσεων. Δυνάμεθα ἦδη νὰ νοίσωμεν καλῶς, ὅτι κατὰ τὴν πρώτην διαμόρφωσιν τοιαύτης τινὸς ἔννοιας ὑπῆρχεν ἦδη ἡ πρόθετις μιᾶς τοιούτου εἶδους ἔφαρμογῆς, καθὼς τοῦτο κάλλιστα θὰ ἥδυνατο νὰ συμβῇ κατὰ τὸν δεύτερον τῶν ἀνωτέρω μνημονεύσηντων τρόπων τῆς γενέσεως φανταστικῶν ἀριθμῶν, κατὰ τὴν εἰσαγωγὴν τύπων ἐνότητος διαφόρου σημασίας ὡς πρὸς τὸ ποιόν. Ἐν τοιαύτῃ δμως περιπτώσει, ἡ οὕτω μօρφωθεῖσα ἔννοια δὲν θὰ ἥτο ὑπερβατικὴ ἐκ τῶν προτέρων. Ὅθεν δέον νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ ἐν ἀρχῇ φανταστικὴ ἔννοια μεταβάλλεται εἰς πραγματικήν, ἀφ' ἧς στιγμῆς, μολονότι φανταστικὴ κατὰ πρῶτον, ἐπιτρέπει ν' ἀνευρεθῇ πραγματική τις ἔφαρμογὴ ἐκ τῶν ὑστέρων. Ἐν τούτοις τοιαῦται ὑπερβατικαὶ ἔννοιαι, ὡς πρὸς τὰς ὅποιας ἀποκλείονται τοιούτου εἶδους πραγματικαὶ ἐρμηνεῖαι, θὰ ὑφίστανται ἵσως πάντοτε, διότι οἱ μὲν τύποι τῶν πραγματικῶν ἀντικειμένων εἰνε περιῳρισμένοι, ἡ δὲ πρόδοσ τῶν ἰδεατῶν ἡμῶν διαπλάσεων ἀπεριόριστος. Οὕτως ἀναφαίνονται ἐν τέλει πλεῖσται κατὰ ποιόν διάφοροι φανταστικαὶ μονάδες. Ή διὰ τῆς προσλήψεως δμως τῆς ἔννοιας τῆς κατευθύνσεως ἐρμηνεία δύναται νὰ γίνῃ μόνον ὡς πρὸς τὰς φανταστικὰς μονάδας τῆς πρώτης κατηγορίας.

Τὸ παράδειγμα τῶν μαθηματικῶν δεικνύει ἡμῖν **δύο** κατηγορίας ὑπερβατικῶν ἰδεῶν, οὓς δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν εἰς πραγματικὰς καὶ φανταστικὰς ὑπερβατικὰς ἰδέας. Ή πρώτη κατηγορία στηρίζεται εἰς τὸ ἀπεριόριστον τῆς προόδου τῆς ἡμετέρας διανοήσεως, καθ' ἣν ἐν τούτοις αἱ ὑπ' αὐτῆς συντελούμεναι συν-

δέσεις τηροῦσι πάντοτε τὴν αὐτὴν μορφήν, ἵνα ἔχουσιν ἐντὸς τῶν δρίων τῆς ἐμπειρικῆς προόδου. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν τῶν φανταστικῶν ὑπερβατικῶν ιδεῶν, ἢ εἰρημένη πρόδοσ οὐγεὶ τούναντίον εἰς νέας διαπλάσεις ἐννοιῶν, αἵτινες, ἔνεκεν τῶν κατὰ ποιδὺ ιδιοτήτων αὐτῶν, διαφέρουσι τῶν πρὸς αὐτὰς συγγενῶν πραγματικῶν ἐννοιῶν, ἐκ τῆς προϊούστης ἔξελιξεως τῶν ὅποιων προέρχονται αὗται. Ἐὰν κατὰ ταῦτα ἡ ἀπεριόριστος αὕτη πρόδοσ μένη ποσοτικὴ ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, μεταβάλλεται εἰς ποιοτικὴν ἐν τῇ δευτέρᾳ. Οὕτως αἱ δύο αὗται κατηγορίαι τῶν ὑπερβατικῶν ιδεῶν ἔχουσι τὰς δύο νοητὰς μορφὰς τοῦ ἀπελφου, δηλαδὴ τὴν ποσοτικὴν καὶ τὴν ποιοτικὴν αὐτοῦ μορφὴν. ΠΙ πρώτη τῶν μνημονεύθεισῶν κατηγοριῶν τούτων περιορίζεται εἰς τὴν μόρφωσιν μᾶς μὴ δεδομένης πραγματικότητος, ἢ δὲ δευτέρᾳ οὐγεὶ ἀποκλειστικῶς εἰς τινὰ ιδεατὴν αἰδανότητα.

Ἐκ τῶν προκατεθέντων συνάγονται δύο ὅροι, ἀφορῶντες εἰς τὰς ὑπερβατικὰς ιδέας. Πρῶτον δέοντας νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ αὐτοὶ θεμελιώδεις τύποι τῶν πραγματικῶν καὶ τῶν φανταστικῶν ὑπερβατικῶν ιδεῶν μὲ τὴν ἐν τῇ δημοπαντὶ αὐτῶν ὑποδηλουμένην διάφορον σημασίαν ἀπαντῶσι πανταχοῦ. Λεύτερον δὲ πρέπει νὰ λάβωμεν πρὸ δρθελμῶν, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ἐμπειρικῆς δεδομένου εἰς τι μὴ δεδομένον μετάβασις ἐμφενίζεται ὡς πρόδοσ, εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτις, συνδεομένη πρὸς τὰς μορφὰς τῆς νοήσεως καὶ πρὸς τὰς μετ' αὐτῶν σχετικούμενις ιδιαιτέρους τυπικὰς ἐννοίας. Ὅθεν εὑνόλως ἀγόμεθα εἰς τὴν προστέθεστιν ὅτι, καθ' ὃν τρόπον συμβαίνει τούτῳ ἐν τῷ μαθηματικῷ πεδίῳ, ἡ πρόδοσ αὕτη θὰ ἔχῃ πανταχοῦ μόνον τυπικὴν (εἰδολογικὴν) σημασίαν, καὶ ὅτι οὐδαμός θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ σχετίζεται πρὸς τὸ περιεχόμενον τοῦ ἐσκεμμένου.

#### 4. Γενικοὶ δροι τῶν φυσικῶν ὑπερβατικῶν ιδεῶν.

Τὸ πρῶτον τῶν εἰρημένων συμπεριφυσικῶν πρέπει νὰ δεχθῶμεν εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς ως ἀλιγθές. Ἐπειδὴ ἡ μεταξὺ τῆς ποσότητος καὶ τῆς ποιότητος ὑφισταμένη διαφορὰ διατηρεῖ τὴν θεμελιώδη σημασίαν αὐτῆς ἕπει πάντων τῶν πεδίων τῆς νοήσεως, αἱ μαθηματικαὶ ἔκειναι μορφαὶ τῶν ὑπερβατικῶν ιδεῶν εἶνε πρόδηλως μόνον παραδείγματα δύο ἐν τῇ νοήσει ἐνυπαρχουσῶν ἐμπράκτων ἀποδείξεων τῆς τάσεως πρὸς συμπλήρωσιν τῆς ἐμπειρικῶς νοουμένης πραγματικότητος. Τούτο διότι δὲν σημαίνει