ΛΟΓΙΚΗ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

ὑπὸ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ ΖΕΡΒΟΥ

Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

Ἡ ἰσότης εἶναι τὸ σπάνιον. Ἡ ἀνισότης τὸ σύνηθες.

Τῆς λογικῆς τῶν ἀνισοτήτων κάμνομεν συχνὴν χρῆσιν ἐν τῷ καθ' ἡμέραν βίῳ καὶ ἐν τῇ κοινωνίᾳ πολλάκις χωρὶς νὰ τὸ ἐννοοῦμεν.

Χρῆσις αὐτῆς γίνεται εἰς ὅλας τὰς ἐπιστήμας· εἰς τὴν Μαθηματικὴν ἰδίᾳ ἐπιστήμην, διὰ τῆς ὁποίας προάγεται ἡ τυπικὴ Λογική, εἶναι καταφανὴς ἡ ἐπίδρασίς της. (Διὰ τὴν σχέσιν τῆς Λογικῆς πρὸς τὴν Φιλοσοφίαν καὶ τὰς ἄλλας ἐπιστήμας ἰδὲ Θεοφίλου Βορέα «Ἀκαδημεικά», Τόμος Ι). Ὑπάρχουσι πολλαὶ ἔννοιαι, τῶν ὁποίων τὴν ἀντίληψιν ὀφείλομεν εἰς τὴν διαίσθησιν.

Ἡ διαίσθησις διατηρεῖ τὴν ἐπαφὴν μεταξὺ τῆς προόδου τῆς σκέψεως καὶ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων. Ἐνόσῳ ὅμως περιοριζόμεθα εἰς τὴν ἀντίληψιν αὐτήν, δὲν ἔχομεν ἀκριβῆ διατύπωσιν τῶν περιεχομένων των. Τοιαύτας ἐννοίας ἐνίοτε διασαφηνίζομεν μὲ ἀνισότητας. Οὕτω ἡ ἰδέα τῆς συνεχείας, τὴν ὁποίαν ὀφείλομεν εἰς τὴν διαίσθησιν, ἀναλύεται εἰς σύστημα ἀνισοτήτων μεταξὺ ἀκεραίων. Ἤτοι μὲ τὴν λογικὴν τῶν ἀνισοτήτων διακρίνομεν τὴν συνέχειαν, διότι τὴν διατυπώνομεν μὲ ἀνισότητας. Ἡ ἀνάγκη τῆς διατυπώσεως αὐτῆς εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὸν ζητοῦντα ἀκριβῆ κατανόησιν τῆς πορείας μιᾶς συναρτήσεως.

Μὲ ἀνισότητας διατυποῦμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ὁρίου. Οὕτω, ὅταν μία μεταβλητὴ ποσότης (θετικὴ) ἐλαττοῦται διαρκῶς, λέγομεν ὅτι ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, ὅταν εἴμεθα βέβαιοι ὅτι γίνεται μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος (θετικῆς) ὁσονδήποτε μικρᾶς.

Συχνάκις εἰς τὴν Μαθηματικὴν ἐπιστήμην ἀποδεικνύονται ἰσότητες δι' ἀνισοτήτων. Οὕτω π. χ., ἵνα ἀποδείξω ὅτι δύο ἀριθμοὶ Α καὶ Β εἶναι ἴσοι, ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξω ὅτι ἡ διαφορά των Α—Β εἶναι μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ. Πολλάκις γίνεται χρῆσις τοῦ τρόπου τούτου τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ Μαθηματικά.

Μὲ ἀνισότητας καὶ σκέψεις καὶ πράξεις ἐπ' αὐτῶν διατυποῦμεν καὶ ἀποδεικνύομεν ἀκριβῶς προτάσεις θεμελιώδεις. Μὲ τὰς ἀνισότητας διαβαίνομεν ἀπὸ τὴν ἀντίληψιν τοῦ πεπερασμένου εἰς τὸ ἄπειρον.

Ὅταν λέγωμεν ὅτι οἱ ἀκέραιοι εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος, ἐννοοῦμεν ἁπλῶς ὅτι παντὸς ἀκεραίου ὑπάρχει μεγαλύτερος.

Τὴν λογικὴν τῶν ἀνισοτήτων εὑρίσκομεν ἤδη παρὰ τοῖς γεωμέτραις τοῦ 5ου αἰῶνος, οἵτινες ἐξήγαγον δι' αὐτῆς ἀκριβῆ συμπεράσματα. Οὕτω εἰς τὸ 10ον βιβλίον τοῦ Εὐκλείδου εὑρίσκομεν τὸ θεώρημα, καθ' ὅ: «Δεδομένων δύο ἀνίσων μεγεθῶν Α καὶ Β, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν πλέον τοῦ ἡμίσεος ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου Α, ἀφαιρέσωμεν ἔπειτα πάλιν πλέον τοῦ ἡμίσεος ἀπὸ τοῦ ἀπομένοντος καὶ οὕτω καθεξῆς θὰ φθάσωμεν εἰς τμῆμα μικρότερον τοῦ Β». Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος στηρίζεται ἐπὶ θεμελιωδεστάτης ἰδιότητος ἐπεχούσης θέσιν ὁρισμοῦ, ἀναφερομένης εἰς τὸ 5ον βιβλίον τοῦ Εὐκλείδου. «Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν».

Μεθόδους διὰ τὴν διάβασιν ἀπὸ τοῦ πεπερασμένου εἰς τὸ ἄπειρον, ἤτοι μεθόδους τοῦ ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ, ἐφαρμόζων τὴν λογικὴν τῶν ἀνισοτήτων, ἐχρησιμοποίησεν ἤδη ὁ Εὔδοξος. Οὗτος, ἵνα ἀποδείξῃ ὅτι αἱ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες, αἱ ἔχουσαι βάσεις ἰσοδυνάμους ἔχουσι τὸν αὐτὸν ὄγκον, διέκρινεν ὅτι ἔδει νὰ νοήσῃ ἀνάλυσιν τοῦ ὄγκου εἰς σύνολον μὴ περατωμένον ἀπείρως λεπτῶν στρωμάτων.

Συστηματικὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἀπειροστικῶν μεθόδων διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τετραγωνισμοῦ ἢ κυβισμοῦ ἔκαμεν ὁ Ἀρχιμήδης, ὅπως τοῦτο δηλοῦται ἀπὸ ἐπιστολήν του πρὸς τὸν Ἐρατοσθένην.

Ἡ ἀδυναμία τοῦ ἀνθρώπου διὰ τὴν εὕρεσιν πλήρους ὁρισμοῦ ἐννοίας τινὸς ἀναγκάζει αὐτὸν νὰ καταφύγῃ εἰς ἀνισότητας. Οὕτω π. χ. ἐργαζόμεθα διὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀσυμμέτρων. Ζητήσωμεν ἐπὶ παραδείγματι ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ὁ 2. Ἐπειδὴ οὐδεὶς ῥητὸς τοιοῦτος ὑπάρχει, φανταζόμεθα ὅλους τοὺς ῥητοὺς χωρισμένους εἰς δύο τάξεις· εἰς τὴν μίαν τάξιν (Α) ἀνήκουν ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ 2 καὶ εἰς τὴν ἄλλην (Β) ἀνήκουν ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 2. Εἰς τὸ σύνορον τῶν δύο αὐτῶν τάξεων (Α) καὶ (Β) νοοῦμεν εὑρισκόμενον τὸν ἀσύμμετρον, ὅστις θὰ ἔχῃ ὡς τετράγωνον τὸν 2.

Εἰς τὴν σχολὴν τοῦ Πυθαγόρα εὑρίσκομεν τὸν σπόρον τῶν σημερινῶν μαθηματικῶν ἀντιλήψεων· οὕτω ἔχομεν σήμερον τὸν Νεοπυθαγορισμόν. Μὲ τὴν Λογικὴν τῶν ἀνισοτήτων ἐργαζόμεθα διαρκῶς εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων, ἥτις παρουσιάζει πολλὴν ἀναλογίαν πρὸς τὴν Λογικὴν τῶν τάξεων. Ἵνα ὁρίσωμεν ἐπὶ παραδείγματι τὸ ἀνώτερον πέρας ἑνὸς συνόλου μὲ ἄπειρα στοιχεῖα χρησιμοποιοῦμεν ἀνισότητας.

Μὲ ἀνισότητα ἐζήτησαν νὰ δηλώσουν ἐνεστωτικὸν ἄπειρον ἢ ἀριθμὸν ὑπερπεπερασμένον (transfini)· οὕτω ἔστω ἡ τάξις τῶν ἀκεραίων

1, 2, 3, . . . ν . . . Ὁ Cantor σημειώνει διὰ τοῦ ω τὸν πρῶτον ἀκέραιον, ὅστις θὰ ἤρχετο κατόπιν ὅλων τῶν ν οὕτως, ὥστε ὁ ω αὐτός, ἐὰν ὑπῆρχε, θὰ ἦτο *μεγαλύτερος* ὅλων τῶν ἀριθμῶν ν· δηλ. τὸν ω νοοῦν μετὰ τὸ τέλος καὶ οὐχὶ εἰς τὸ τέλος τῆς ἀκολουθίας 1, 2, 3, . . . ν . . . Μὲ τὰς ἀνωτέρω ἀντιλήψεις, εἰς τὰς ὁποίας προσκρούει ἐκ πρώτης ὄψεως ἡ λογική, ἐπροχώρησεν ἡ ἐπιστήμη εἰς τὴν διατύπωσιν βαθυτέρων ἐννοιῶν ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, ἡ ὁποία κατὰ τὸ μεγαλύτερον μέρος προσαρμόζεται πρὸς τὴν λογικὴν τῶν τάξεων, κατὰ δὲ τὰ λοιπὰ μέρη προσαρμόζεται πρὸς τὴν λογικὴν τῶν σχέσεων. Ἔχομεν οὕτω τὸν νεοαριστοτελισμόν.

Μὲ τὴν προσπάθειαν αὐτὴν ζητοῦν νὰ θεμελιώσουν τὴν Μαθηματικὴν ἐπιστήμην ἐπὶ βάσεων στηριζομένων μόνον ἐπὶ τῆς λογικῆς· ἐντεῦθεν προκύπτει ριζικὴ μεταβολὴ εἰς τὸν προσανατολισμὸν τῆς μαθηματικῆς φιλοσοφίας, ἥτις ἐπανέρχεται εἰς πραγματισμὸν ἀντιτιθέμενον πρὸς τὸν ὀνοματισμόν, ὅστις παρουσιάζεται ὡς ἄμεσος συνέπεια τοῦ ἀριθμητισμοῦ.

Ἐπὶ τῆς λογικῆς τῶν ἀνισοτήτων βασίζονται αἱ θεωρίαι τῶν πιθανοτήτων. Φαινόμενα, τῶν ὁποίων ἡ ὕπαρξις ἐξαρτᾶται τοὐλάχιστον ἐν μέρει ἀπὸ νέας αἰτίας, αἵτινες δὲν ἀφῆκαν ἴχνος τῆς παρελθούσης ἱστορίας των, θεωροῦμεν ὡς τυχαίας συναρτήσεις, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ μελετήσωμεν μόνον μὲ τὰς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων συγκρίνοντες αὐτὰς τὰς συναρτήσεις μὲ πλῆθος ἄλλων ὁμοίων συναρτήσεων.

Γενικώτερον ἄλλως τε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι εἰς τὰς κρίσεις μας ὁδηγούμεθα ἀπὸ συμπτώσεις κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον συχνάς, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ συνδυάζωμεν, ἵνα ἐξάγωμεν συμπεράσματα· ζητοῦμεν πάντοτε νὰ κάμωμεν ὅ,τι φαίνεται εἰς ἡμᾶς πιθανῶς τὸ ὠφελιμώτερον· ὁδηγούμεθα ἀπὸ τὸ αἴσθημα τῶν πιθανοτήτων· ζητοῦμεν ποῦ *περισσότερον* κλίνει ἡ πλάστιγξ· ἐδῶ εὑρίσκομεν καὶ τὴν βάσιν τῆς στατιστικῆς ἐπιστήμης.

Ἡ θεωρία τῶν πιθανοτήτων εἰσέρχεται κατὰ τρόπον μᾶλλον ἢ ἧττον συνειδητὸν εἰς ὅλας ἡμῶν τὰς ἀποφάσεις.

Ὅσον καὶ ἂν προοδεύσῃ ἡ ἀνθρωπότης, θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε θέσις διὰ τὴν ἄγνοιαν καὶ ἑπομένως θὰ ὑπάρχῃ θέσις διὰ τὴν τύχην καὶ τὴν πιθανότητα. Διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν πολύπλοκα φαινόμενα, ἀνατρέχομεν μέσῳ τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων εἰς ἄλλα γνωστά, τὰ ὁποῖα ὑποθέτομεν ἁπλούστερα· ἐφαρμόζομεν τὴν λογικὴν τῶν ἀνισοτήτων.