

# ΑΡΧΕΙΟΝ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ

ΚΑΙ

# ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΡΙΜΗΝΙΑΙΟΝ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ

«Τὸ γὰρ αὐτὸ νοεῖν ἐστὶν τε καὶ εἶναι»

ΠΑΡΜΕΝΙΔΗΣ

ΤΑΚΤΙΚΟΙ ΣΥΝΕΡΓΑΤΑΙ

Heinrich Rickert τακτ. καθ. τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Heidelberg.  
 — Karl Joël τακτ. καθ. τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Basel. — Ernst Hof-  
 fman τακτ. καθηγ. τοῦ Πανεπιστημίου Heidelberg. — Erich Frank,  
 τακτ. καθ. τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Marburg. — Guido Calogero τακτ.  
 καθ. τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ρώμης. — Κ. Τριανταφυλλόπουλος  
 τακτ. καθ. τοῦ Πανεπιστημίου τῶν Ἀθηνῶν. — August Faust ὑφηγ.  
 τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Heidelberg. — Μιχ. Τσαμαδός. — Χ. Τζωρτζό-  
 πουλος ὑφηγ. τοῦ Πανεπιστημίου τῶν Ἀθηνῶν. — Franz Bœhm διδά-  
 κτωρ τῆς Φιλοσοφίας. — Παν. Καλλιόπουλος ὑφηγ. Πανεπιστημίου  
 Ἀθηνῶν. — Κωνσταντῖνος Τσατσος ὑφηγ. Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν. —  
 Ἰωάν. Θεοδωρακόπουλος ὑφηγ. Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

ΔΙΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟΝ

ΥΠΟ

Ι. Ν. ΘΕΟΔΩΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΙΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ «Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΣ»

1931

ΝΕΩΤΕΡΑΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ  
ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΝ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΝ (\*)

ΥΠΟ

Π. ΖΕΡΒΟΥ

Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου.

Τί εἶναι ἀλήθεια; Τί εἶναι πραγματικότητα; Ἴδου ζητήματα τὰ ὅποια ἐπὶ πολὺ ἐβασάνισαν τὴν ἀνθρωπότητα καὶ πολλοὺς ἀκόμη ἐξακολουθοῦν νὰ βασανίζουν. Τὸ βέβαιον εἶναι ὅτι ὑπάρχουν καὶ πολλοί, οἱ ὅποιοι θὰ ἔδιδον ἀπάντησιν ἀνάλογον μὲ ἐκείνην τὴν ὁποίαν ἔδωκεν ὁ Ἅγιος Αὐγουστῖνος, ὅταν ἠρωτήθη τί εἶναι χρόνος, εἰπὼν ὅτι: «ἐὰν δὲν μὲ ἐρωτήσουν τί εἶναι χρόνος γνωρίζω τί εἶναι· ἐὰν ὅμως μὲ ἐρωτήσουν, δὲν ἠξεύρω νὰ ἀπαντήσω».

Τί εἶναι ἄπειρον; Τί εἶναι διάστημα; Τί εἶναι χρόνος; Τί εἶναι συνέχεια; Ποῖοι οἱ νόμοι τῆς φύσεως; Μήπως καὶ ἐδῶ πρέπει νὰ δώσωμεν ἀνάλογον ἀπάντησιν; Ὁχι· βέβαιον ὅμως καὶ ἐδῶ εἶναι ὅτι δὲν δυνάμεθα πάντοτε νὰ θέσωμεν τὴν ἀλήθειαν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ τὸ ψεῦδος πρὸς τὰ ἄριστερά· ἡ φύσις βλέπετε δὲν ἐνδιαφέρεται διὰ τὰς θεωρίας, τὰς ὁποίας ἡμεῖς κάμνομεν περὶ τῶν φυσικῶν φαινομένων οὔτε διὰ τὴν λογικὴν μας· ἢ μᾶλλον εἶναι ἐπιφορτισμένη διὰ τῶν φυσικῶν φαινομένων νὰ δεικνύῃ ἡμᾶς ἐνίοτε παραλογισμένους· δι' αὐτὸ τὰ ἀνωτέρω ἐρωτήματα θὰ θέσωμεν ἄλλως· ποῖαι αἱ νεώτεραι ἐπιστημονικαὶ ἀντιλήψεις περὶ ἀπείρου, περὶ συνεχοῦς κλπ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ ἐποχῆς εἰς ἐποχὴν ἀλλάσσουν ὄχι μόνον αἱ ἀντιλήψεις, ἀλλὰ καὶ αἱ ἀπορίαι· ἡ γένεσις τῶν ἀποριῶν προπαρασκευάζει τὸ ἔδαφος πρὸς σύλληψιν ἐννοιῶν· ἴδου π. χ. μία τοιαύτη ἀπορία· ἐὰν μᾶς ἐρωτήσουν ποῖος ἀκέραιος ἔρχεται μετὰ τὸν 3, δυνάμεθα ἀμέσως νὰ ἀπαντήσωμεν· ἐὰν ὅμως μᾶς ἐρω-

(\*) Διάλεξις γενομένη τὴν 8 Δεκεμβρίου 1930 εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς Νομικῆς Σχολῆς.

τήσουν ποῖος μικτὸς ἔρχεται εὐθὺς μετὰ τὸν 3; Εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀπαντήσωμεν.

Πῶς τὰ μαθηματικὰ χρησιμεύουν διὰ τὴν σύλληψιν ἐννοιῶν, φαίνεται, εἰς τὸ λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὸν συμβολισμόν αὐτῶν· ἂν καὶ ὁ συμβολισμὸς ἀκριβῶς οὕτως ἔκαμε νὰ δοθῇ καὶ ὁ ἐξῆς ὁρισμὸς. «Τὰ μαθηματικὰ εἶναι ἐπιστήμη ὅπου δὲν ἠξεύρουν περὶ τίνος ὁμιλοῦν καὶ ἀγνοοῦν πάντοτε εἰς τὸ ἐκεῖνο ποῦ λέγουν εἶναι ἀληθές».

Τὸν κόσμον γνωρίζομεν μὲ τὴν σκέψιν μας· αὕτη ἐκφράζεται μὲ λέξεις· αἱ λέξεις ἀφ' ἑτέρου εἶναι εἰκόνες αἱ ὅποια ἀρχικῶς ἐσηματίσθησαν ἀπὸ ὑλικὴν σύγκρισιν καὶ ἔπειτα διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἔλαβον διαφόρους σημασίας· διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅμως τὴν σκέψιν μας ἀνατρέχομεν καὶ εἰς ἄλλα σύμβολα· τὰ σύμβολα τῶν μαθηματικῶν. Ταῦτα ἔχουν τὸ προσὸν τῆς περιεκτικότητος καὶ συντείνουν εἰς τὴν οἰκονομίαν σκέψεως καὶ τὴν σαφήνειαν τῆς διατυπώσεως. Εἰς νέας ιδέας ἀντιστοιχοῦσι νέα μαθηματικὰ σύμβολα ἀνακαλοῦντα εἰς τὴν μνήμην μας τὰ φαινόμενα, τὰ ὅποια ἔγιναν ἀφορμὴ τῆς γενέσεως τῶν νέων ιδεῶν· ὁ ἀριθμὸς ἄλλως τε εἶναι ὁ ἐργάτης τῆς πραγματικότητος. Αἱ λέξεις εἶναι κατὰ προσέγγισιν μετάφρασις μαθηματικῶν ἐκφράσεων, αἱ ὅποια συμφωνοῦσι μὲ τὰ γεγονότα.

Τὰ μαθηματικὰ σύμβολα δίδουν ιδέαν νέων τρόπων σκέψεως· γίνονται ἀφορμὴ ἰδρύσεως νέας λογικῆς· τῆς λογικῆς τοῦ ἀπείρου. Ἡ ἱστορία τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως ὑποδεικνύει κατ' ἀρχὰς τρία εἶδη λογικῆς· τὴν λογικὴν τοῦ ἀριθμοῦ, ἥτοι γεωμετρικοαριθμητικὴν λογικὴν, ἣν ἠκολούθουν οἱ μαθηταὶ τοῦ Πυθαγόρα· τὴν λογικὴν τῶν τάξεων ἢ λογικὴν τοῦ Ἀριστοτέλους· τὴν λογικὴν τῶν σχέσεων τοῦ διαστήματος ἢ λογικὴν τοῦ Εὐκλείδου καὶ Ἀρχιμήδους. Σήμερον ἔχομεν τὸν νεοπυθαγορισμὸν καὶ τὸν νεοαριστοτελισμὸν, ὑποστηρικθέντα ὑπὸ τοῦ Russel, τοῦ Frege καὶ ἄλλων· ἔχομεν σήμερον ἄλλοθεναν λογικὴν καὶ λογιστικὴν φιλοσοφίαν. Λογικῆς τοῦ ἀπείρου γίνεται πολλὴ χρῆσις εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων, ἀναπτυχθεῖσαν κυρίως ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Cantor· ὅταν οὗτος ἀνέπτυσσε τὰς πρώτας θεωρίας του, πρὸ ἐξηκονταετίας περίπου, ἤγειρε τὴν δυσπιστίαν πολλῶν μαθηματικῶν ὅπως τοῦ Kronecker τόσον, ὥστε ἐπὶ πολὺν χρόνον νὰ μὴ γίνωνται δεκτὰ τὰ ὑπομνήματά του εἰς τὸ μαθημα-

τικόν περιοδικόν τοῦ Βερολίνου Journal de Crelle καὶ ὁμως σήμερον ἀποτελοῦν τὴν βᾶσιν τῆς νεωτέρας ἀναλύσεως.

Τὰ μαθηματικὰ σύμβολα συντείνουσιν εἰς τὸ νὰ σχηματίζωμεν ἐννοίας σαφεῖς· θεωρήσωμεν ἐπὶ παραδείγματι τὴν ἐννοιαν τῆς συνεχείας· αὕτη ὑπὸ ἐμβρυώδη μορφήν εἰς πάντα ἄνθρωπον διαισθητικῶς προκαλεῖται. Οὕτω π. γ. ὅταν λέγωμεν ὅτι ἡ γεροντικὴ ἡλικία ἀρχίζει ἀπὸ τοῦ ἑξηκοστοῦ ἔτους, τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι τὴν τελευταίαν ἡμέραν τοῦ 59ου ἔτους δὲν εἶναι τις γέρων, ἐνῶ εἶναι τοιοῦτος τὴν πρώτην τοῦ 60ου, ἢ ὅταν κατὰ τὸ δειλινὸν γίνεται ἀσθενέστερον τὸ φῶς, δὲν δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν ποτὲ ὅτι τὸ εὐρίσκομεν μίαν ὠρισμένην στιγμὴν ἀσθενέστερον ἀπὸ τὴν ἀμέσως προηγουμένην. Μᾶς χρειάζεται ἀκριβῶς χρόνος μακρότερος ἢ διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ἀσφαλῶς ὅτι ἐξησθένησε τὸ φῶς. Τὸ φαινόμενον τοῦτο γίνεται ἀφορμὴ εἰς ἡμᾶς τοῦ αἰσθήματος τῆς συνεχοῦς μεταβολῆς ἀλλὰ λίαν ἀμυδρῶς· ὁ μαθηματικὸς ὁμως διατυπώνει τὴν ἐννοιαν τῆς συνεχείας μὲ ἀνισότητος καὶ μὲ τὴν διατύπωσίν του αὐτὴν ἐγεννήθησαν ἀπορίαι δώσασαι ἀφορμὴν εἰς μελέτην προβλημάτων τοῦ ἀπείρου. Ὡς γνωστὸν δύο εἶναι αἱ γενικαὶ ἀπόψεις ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐξετάζεται ἐν τῇ φιλοσοφίᾳ τὸ ἄπειρον· ἡ ἐμπειρικὴ, ἣτις θεωρεῖ τὸ ἄπειρον ἀναχωροῦσα ἐκ τοῦ πεπερασμένου «τὸ δυναμικὸν ἄπειρον» καὶ ἡ ἰδεαλιστικὴ, ἣτις θεωρεῖ τὸ ἄπειρον ὡς προϋπάρχον, ὡς ὀφειλόμενον, οὕτως εἶπεῖν, εἰς τὴν διαίσθησιν, ὡς προϋπάρχον τοῦ πεπερασμένου καὶ οὐχὶ ὡς δημιουργούμενον ὑπὸ τοῦ γεωμέτρου, «τὸ ἐνεστωτικὸν ἄπειρον».

Κατὰ τοὺς ἐμπειρικοὺς ἐπιτρέπεται νὰ νοῶμεν μόνον τὸ δυναμικὸν ἄπειρον· τοῦτέστι μεταβλητὴν ποσότητα, ἡ ὁποία μεταβάλλεται οὕτως ὥστε νὰ δύναται νὰ ὑπερβῇ πᾶν ὄριον καὶ οὐχὶ ποσότητα, ἣτις ἔχει ἤδη ὑπερβῇ πᾶν ὄριον· οὕτως ἔχομεν ἄπειρον μηδέποτε δυνάμενον νὰ συγκροτηθῇ. Κατὰ τοὺς ἰδεαλιστὰς δυνάμεθα νὰ εἰσαγάγωμεν εἰς τὴν ἐπιστήμην καὶ τὸ ἐνεστωτικὸν ἄπειρον τὸ καλούμενον ὑπὸ τῶν ἀρχαίων ἐν ἐνεργείᾳ ἄπειρον· τοῦτέστι δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὅτι ὑπάρχει τι τῶρα ἔχον ἤδη ὑπερβῇ πᾶν ὄριον· οὕτω προκειμένου περὶ ἀριθμῶν, πλὴν τῶν πεπερασμένων τιμῶν ἅς δύνανται νὰ λάβῃ μία μεταβλητὴ, θέτουν ὡς ὑπάρχουσαν καὶ τιμὴν μεί-

ζωνα πασῶν τῶν τιμῶν, ἤτοι τὴν ἀντίθετον τοῦ μηδενός· ὁ Ἀριστοτέλης παρεδέχετο μόνον τὸ δυναμικὸν ἄπειρον· ὁ Πυθαγόρας ἐθεώρει ὅτι τὸ ἄπειρον ἐπαναστατεῖ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀριθμοῦ.

Σήμερον εἰς τὰ μαθηματικὰ θεωροῦσι τὸ ἄπειρον ἐμμέσως. Ἡ ἔννοια τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου· ὅταν λέγωμεν ὅτι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος ἐννοοῦμεν τὸ ἐξῆς· ὅτι παντὸς ἀκεραίου ὑπάρχει μεγαλύτερος ἀκέραιος, ἢ καὶ ὅτι παντὸς ἀκεραίου ὑπάρχει ἐπόμενος· πρέπει ἐνταῦθα νὰ διακρίνωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς τάξεως ἀπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ συλλογῆς μονάδων. Π. χ. μὲ τὴν ἀποψιν ἔννοιᾶς τάξεως λέγομεν ὅτι ὁ 15 εἶναι ἐπόμενος τοῦ 13· μὲ τὴν ἀποψιν ἀριθμοῦ συλλογῆς λέγομεν ὅτι ὁ 15 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 13· ἡ ἔννοια τῆς τάξεως ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς ἀντιστοιχίας.

Μὲ στοιχειώδη παραδείγματα δύναται τις νὰ δείξῃ ὅτι ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστοιχίας ὁδηγεῖ ἐνίοτε εἰς συμπεράσματα ἐντελῶς διάφορα ἐκείνων, εἰς τὰ ὁποῖα θὰ ὠδηγεῖτο ἄνευ αὐτῆς. Ἐὰν ἐρωτήσουν π. χ. ποῖοι εἶναι περισσότεροι τὸ πλῆθος ἀριθμοί; οἱ ἀκέραιοι ὅλοι ἢ οἱ ἄρτιοι; Ἀπάντησις λογικὴ θὰ ἐφαίνετο ὅτι οἱ ἀκέραιοι εἶναι περισσότεροι, διότι παραλείπομεν ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους τοὺς περιττοὺς καὶ ἀπομένουν οἱ ἄρτιοι· καὶ ὅμως αὐτὸ δὲν εἶναι ἀκριβές· διότι εἰς ἕκαστον ἀκέραιον ἀντιστοιχεῖ εἰς ἄρτιος καὶ ἀντιστρόφως· π. χ. εἰς τὸν 3 ἀντιστοιχεῖ ὁ 3.2 ἢτοι ὁ 6 εἰς τὸν 4 ὁ 4.2 ἢτοι ὁ 8 κ. ο. κ. καὶ ἐὰν ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὴν ἀντίληψιν τὴν ὁποίαν ἔχομεν ὅταν μεταχειριζώμεθα πεπερασμένους ἀριθμοὺς παραδεχθῶμεν ὅτι δύο σύνολα εἶναι ἴσα, ὅταν εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχῆ ἓν στοιχεῖον τοῦ ἄλλου καὶ ἀντιστρόφως, θὰ ἔχωμεν ὅτι ὅσοι εἶναι οἱ ἀκέραιοι τόσοι εἶναι καὶ οἱ ἄρτιοι· ἐπίσης ὅτι ὅσοι οἱ ἀκέραιοι τόσοι καὶ οἱ περιττοί, ἂν καὶ ἄρτιοι καὶ περιττοὶ ὁμοῦ ἀποτελοῦσιν ὅλους τοὺς ἀκεραίους καὶ θὰ ἔχωμεν οὕτω ὅτι δὲν ἰσχύει τὸ ἀξίωμα ὅτι τὸ ὅλον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέρους. Αὐτὸ εἶναι ἀληθές διὰ πεπερασμένον πλῆθος ἀριθμῶν, ἐνῶ ἀπεναντίας προκειμένου περὶ συνόλου ἀπείρου δὲν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ μέρος εἶναι μικρότερον τοῦ ὅλου· ἂν θέλετε μάλιστα αὐτὸ εἶναι μία χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τοῦ ἀπείρου.

Σήμερον ἔχει γίνῃ μεγάλη διευκρίνησις ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου· ἐπὶ τῆς ἐννοίας αὐτῆς στηρίζεται ἡ νεωτέρα Μαθηματικὴ ἀνάλυσις, ἡ ὁποία ἔδωκεν ἑξαγόμενα χρησιμώτατα εἰς τὰς ἐφαρμογὰς, εἰς τὴν Γεωμετρίαν, τὴν Μηχανικὴν καὶ τὴν Φυσικὴν.

Ἡ νεωτέρα Φυσικὴ στηριζομένη ἐπὶ τῶν μοριακῶν θεωριῶν καὶ τῆς ἀσυνεχείας δίδει ὅλον ἐν νεῶν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν στηριζομένην ἐπὶ τῶν θεωρητικῶν ἐρευνῶν ὡς πρὸς τὴν Φυσικὴν τοῦ μὴ συνεχοῦς· ἔδῳ πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι δυνατόν ἐν σύνολον ἀριθμῶν νὰ μὴ εἶναι συνεχῆς καὶ ὅμως νὰ περιέχῃ ἀπείρους ἀριθμούς· π.χ. οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀπείροι τὸ πλῆθος καὶ ὅμως τὸ σύνολον αὐτῶν δὲν ἔχει τὴν δύναμιν τοῦ συνεχοῦς· εἶναι ἀριθμήσιμον· καὶ μάλιστα εἶναι ἀπὸ τὰ ἀριθμήσιμα σύνολα ἐκεῖνο ποὺ λαμβάνομεν ὡς μέτρον οὕτως εἶπεν διὰ νὰ διακρίνωμεν τὰ ἄλλα ἀριθμήσιμα σύνολα· π.χ. τὸ σύνολον τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν δηλ. ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ὁμοῦ εἶναι ἀριθμήσιμον διότι δύνανται νὰ γραφοῦν ὅλοι οἱ ῥητοὶ ἀριθμοὶ εἰς μίαν σειρὰν ὅπως οἱ ἀκέραιοι 1, 2, 3, . . . ἴσως αὐτὸ νὰ διησθάνετο ὁ Πλάτων περὶ τοῦ ὁποίου διηγοῦνται τὸ ἑξῆς ἀνέκδοτον· εἶχεν ἀναγγεῖλει ὅτι θὰ ὠμίλει περὶ τοῦ καλοῦ· ἔσπευσαν πολλοὶ νὰ τὸν ἀκούσουν νομίζοντες ὅτι θὰ ὠμίλει περὶ τοῦ τί εἶναι καλὸν διὰ τοὺς ἀνθρώπους, τί εἶναι ὑγεία, τί εἶναι δύναμις, μὲ μίαν λέξιν τί εἶναι εὐτυχία· ἀντὶ τούτων ἡ ἀγόρευσις περιστράφη εἰς τὰ μαθηματικά, εἰς τοὺς ἀριθμούς, εἰς τὴν γεωμετρίαν, εἰς τὴν ἀστρονομίαν καὶ κατέληξεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ καλὸν εἶναι ἡ μονάς· ἐννοεῖται ὅτι πρὶν φθάσῃ εἰς τὸ συμπέρασμα τὸ ἀκροατήριον εἶχε πολὺ ἀραιωθῆ.

Ὅπως ἔχομεν Μαθηματικὴν φιλοσοφίαν ἐπὶ τῶν συνόλων ἔχομεν καὶ μαθηματικὴν φιλοσοφίαν ἐπὶ τῶν ομάδων· ἡ ἐννοία τῆς ομάδος εἶναι ἀλληλένδετος μὲ τὴν ἐννοίαν τοῦ μετασχηματισμοῦ· ἡ εἰσαγωγὴ τῆς ἐννοίας τῆς ομάδος μετασχηματισμῶν ἐσημείωσε μέγαν σταθμὸν εἰς τὴν πρόοδον τῆς ἐπιστήμης καὶ τοῦτο, διότι ἡ σημερινὴ ἐρευνα διαφέρει τῆς παλαιᾶς κατὰ τὸν τρόπον καθ' ὃν μετασχηματίζει τὰ ζητήματα ἢ τὰ προβλήματα· εἰς ὅλας τὰς ἐπιστήμας ἡ ἰδέα τοῦ μετασχηματισμοῦ προβλήματος ἔχει σπουδαίαν σημασίαν· ἀπὸ ἐποχῆς εἰς ἐποχὴν πρόβλημά τι μετασχηματίζεται, ἔξε-

λίσσεται, λαμβάνει νέαν διατύπωσιν· πολλάκις δὲ συμβαίνει μετασχηματισμός τις νὰ συσχετίζη τοῦτο πρὸς ἄλλα τὰ ὅποια προηγουμένως ἐφαίνοντο ἐντελῶς διάφορα· εἰς τὰ Μαθηματικά σήμερον, ὅταν λέγωμεν ομάδας μετασχηματισμῶν, ἐννοοῦμεν ὅλους τοὺς μετασχηματισμοὺς τοὺς ὁποίους δίδει εἰς ἡμᾶς ὁ αὐτὸς τύπος· τύπος ὅμως ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι τυχαῖος, ἀλλ' ἔχει ὠρισμένην ιδιότητα. Ἡ ὁμάς δὲν φανερώνει σχέσιν μεταξὺ αὐτῶν τούτων τῶν ἀντικειμένων, φανερώνει σχέσιν μεταξὺ σχέσεων.

Αἱ θεωρίαι τῶν ομάδων ἐφάνησαν εἰς τὰ Μαθηματικά λίαν ἀφηρημέναι, κατόπιν ὅμως ἀπεδείχθη ὅτι ἔχουσιν ἄμεσον ἐφαρμογὴν ἢ μᾶλλον μεταφράζονται ἀκριβῶς εἰς τὴν Γεωμετρίαν, εἰς τὴν Μηχανικὴν, εἰς τὴν Φυσικὴν. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν διὰ καταλλήλων μετασχηματισμῶν ἀπὸ ἓν θεώρημα δυνάμεθα νὰ ἐξάγωμεν πολλὰ ἄλλα. Ὑπάρχουν μετασχηματισμοὶ διὰ τῶν ὁποίων ἀπὸ σημείων μεταβαίνομεν εἰς ἄλλα σημεῖα καὶ ἔπομένως ἀπὸ ἓν σχῆμα μεταβαίνομεν εἰς ἄλλο σχῆμα· εἶναι, οὕτως εἰπεῖν, ὁ μετασχηματισμὸς κάτοπτρον τὸ ὁποῖον μεταμορφώνει τὰ σχήματα κατὰ τινὰ νόμον ἐξαρτώμενον ἀπὸ τὸν μετασχηματισμὸν. Ἀπὸ τὰς ιδιότητας τῆς εἰκόνης ἐξάγομεν συμπέρασμα διὰ τὰς ιδιότητας τοῦ πραγματικοῦ σχήματος καὶ τανάπαλιν. Ὑπάρχουν ἐπίσης μετασχηματισμοὶ δι' ὧν μεταβαίνομεν ἀπὸ σημείων εἰς εὐθείας, εἰς κύκλους, εἰς ἐπίπεδα, ἐννοοῦντες δι' αὐτῶν ὅτι μετατρέπεται πρόβλημα σημείων εἰς πρόβλημα εὐθειῶν, κύκλων, ἐπιπέδων καὶ τανάπαλιν.

Ἄξιον προσοχῆς εἶναι τὸ ἐξῆς· «Κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν προβλήματος παρατηροῦμεν ὅτι μένει κάτι τι ἀναλλοίωτον· ὅλοι οἱ μετασχηματισμοί, ὅσοι ἐφαρμοζόμενοι εἰς πρόβλημά τι διατηροῦσι κάτι τι ἀναλλοίωτον, ἀποτελοῦν συνήθως μίαν ομάδα· δηλαδή με ὁποιονδήποτε μετασχηματισμὸν αὐτῆς τῆς ομάδος καὶ ἂν ἐργασθῶμεν διὰ τὸ πρόβλημα, θὰ μένη κάτι τι χαρακτηρίζον τὴν δυσκολίαν τοῦ προβλήματος. Αὐτὸ τὸ ἀναλλοίωτον, ὅπως καὶ τὸ εἶδος τῆς ομάδος τῆς διατηρούσης τὸ ἀναλλοίωτον, δεικνύει, οὕτως εἰπεῖν, εἰς ἡμᾶς τὴν καθαρὰν οὐσίαν τοῦ προβλήματος. Αἱ νεώτεραι περὶ σχετικότητος θεωρίαι προέκυψαν ἀκριβῶς ἀπὸ προβλήματα εἰς τὰ ὅποια ζητεῖται νὰ μείνουν οἱ νόμοι ἢ μᾶλλον αἱ ἐξισώσεις αἱ

ἐκφράζουσαι τοὺς νόμους ἀναλλοίωτοι, ὅταν ἐφαρμοσθῶσιν ὄρισμένου εἴδους μετασχηματισμοί.

Εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν ομάδων συνέτεινε πολὺ καὶ ἡ γεωμετρικὴ ἀντίληψις· καὶ ἀντιστρόφως ἡ γεωμετρία ἔλαβε νέαν μορφήν μετὰ τὴν θεωρίαν τῶν ομάδων.

Σήμερον ἔχομεν δύο γεωμετρίας πολὺ διαφόρους ἀλλήλων· τὴν ἀφηρημένην γεωμετρίαν καὶ τὴν πειραματικὴν γεωμετρίαν:

Πᾶν ζήτημα τῆς ἀφηρημένης Γεωμετρίας ἀνάγεται εἰς ζήτημα Ἐυκλείδους. Μετὰ τοιαύτην ἔννοιαν Γεωμετρίας τὸ νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ Εὐκλείδεια Γεωμετρία εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδὴς δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν· κάλλιστα οἱ τύποι οἱ ἀλγεβρικοὶ οἱ ἀφορῶντες τὴν Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν δηλ. τὸ διάστημα τῶν τριῶν διαστάσεων ἐπεκτείνονται μετὰ τὰς ἀναγκαίας τροποποιήσεις καὶ εἰς τὸ διάστημα 4 διαστάσεων 5, 6 καὶ ἐν γένει  $n$  διαστάσεων. Μετὰ τὴν τοιαύτην γεωμετρικὴν ἀντίληψιν ἡ λέξις ἀλήθεια φεύγει ἀπὸ τὸ ἐπιστημονικὸν λεξικὸν καὶ ἀντικαθίσταται μετὰ τοὺς ὅρους «συμφωνία» «ἄνεσις»· διότι τὰ ἀξιώματα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀναχωροῦμεν θεωροῦνται πλέον ὡς συμφωνία· καὶ ἐὰν προτιμῶμεν τὸ διάστημα τῶν τριῶν διαστάσεων, τὸ προτιμῶμεν ὡς μᾶλλον ἄνετον διὰ τὴν σκέψιν μας, διὰ τὸν ὀργανισμόν μας.

Διαφέρει ὅμως τὸ πρᾶγμα ὅταν ὁμιλοῦμεν περὶ Γεωμετρίας ὡς πειραματικῆς ἐπιστήμης, ὅπως τὴν ἐξετάζουν σήμερον, ὅποτε μεταχειρίζονται τὰς ιδιότητες τοῦ φωτός, ἵνα μετρήσουν μεγίστας καὶ ἐλαχίστας ἀποστάσεις μετὰ μεγίστην ἀκρίβειαν· ἡ γεωμετρία αὕτη εἶναι ἀλληλένδετος μετὰ τὴν ὀπτικήν.

Ἄλλο ἦννούν ἄλλοτε ὅταν ἔλεγον ὅτι ἐφαρμόζουν τὰ Μαθηματικὰ εἰς τὴν Φυσικὴν καὶ ἄλλο σήμερον· ἄλλοτε παρελάμβανον τὰ δεδομένα τοῦ πειράματος· ἔφευγον ἀπ' αὐτό· ἐχρησιμοποιοῦν μαθηματικὰ σύμβολα· εἰργάζοντο μετὰ ἀφηρημένα μαθηματικὰ μετὰ ἀφηρημένην Γεωμετρίαν· ἐξῆγον τύπους· ἀπεμακρύνοντο ὅμως οὕτω τῆς πραγματικότητος· σήμερον ὑπάρχει περισσότερος σύνδεσμος μετὰ τὴν θεωρίαν καὶ πραγματικότητος· μετὰ τὸν λόγον καὶ πειράματος. Πείραμα καὶ λόγος δὲν ἀπομακρύνονται· ἀλλὰ συμβιοῦν· λύεται οὕτω μίᾳ ἀντινομία τοῦ Kant· ἐβοήθησεν εἰς τοῦτο ἡ ἀντίληψις τοῦ Minkow-



ski περί τῆς γεωμετρίας τῶν 4 διαστάσεων, ἣτις δίδει πλέον τὴν ἱστορίαν ἐνὸς φυσικοῦ φαινομένου· δὲν ζητοῦμεν πλέον· νὰ ἀντιληφθῶμεν χωριστὰ τὸ διάστημα, χωριστὰ τὸν χρόνον· μία μόνον ἔνωση τῶν δύο ἀντιλήψεων εἶναι δυνατή.

Ἡ ἀνωτέρω ἀντίληψις χρησιμεύει διὰ τὴν κατανόησιν τῆς νέας θεωρίας τῆς σχετικότητος, ἣτις τόσον προὔξενησε θόρυβον· ἂν ὅμως ὁ πολὺς κόσμος ἐνδισφέρθῃ διὰ τὴν σχετικότητα αἰτία εἶναι ὄχι ἡ πραγματικὴ ἐπιστημονικὴ ἀξία τῆς, ἀλλ' αἱ παράδοξοι ἐρμηνεῖαι αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν εἰς αὐτήν· οὕτω μερικοὶ ἐνόμισαν ὅτι αὕτη ἐπιβεβαιοῖ τὴν σχετικότητα τῶν γεγονότων καὶ ὅτι στερεῖ τὴν ἐπιστήμην πάσης βεβαιότητος· μερικοὶ τὴν ἐσύγχισαν μὲ τὴν σχετικότητα τὴν πρὸ πολλοῦ θεωρηθεῖσαν εἰς τὴν κλασικὴν Μηχανικὴν. Καὶ ὅμως ἡ σχετικότης δὲν εἶναι οὔτε ἐρμηνεία, οὔτε ἐξήγησις, εἶναι εἰκῶν, εἶναι ἀναπαράστασις τῆς φυσικῆς πραγματικότητος μὲ προσέγγισιν μεγαλυτέραν τῆς διδομένης ἀπὸ τὴν κλασικὴν μηχανικὴν. Ζητήσωμεν εἰς τί ὀφείλει τὴν γένεσίν τῆς. (Ἄς μοῦ ἐπιτραπῆ ἐδῶ νὰ μεταχειρισθῶ ἰδίαν ἔκφρασιν)· ὀφείλεται κυρίως αὕτη εἰς τὴν φιλοσοφίαν τοῦ μέτρου καὶ τὴν φιλοσοφίαν τῆς προσεγγίσεως.

Ἐὰν ἀκολουθήσωμεν τὴν παλαιότεραν ἀντίληψιν, θὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ τάδε φυσικὸν φαινόμενον παράγεται εἰς τὴν τάδε θέσιν τὸν τάδε χρόνον· φαντάζομαι τουτέστι διάστημα καὶ χρόνον ἀνεξάρτητα ἀπ' ἀλλήλων· διὰ νὰ προσδιορίσω δηλ. τὴν θέσιν φαντάζομαι ὅτι ἔχω τρεῖς ἄξονας ἀκινήτους, ὡς πρὸς τοὺς ὁποίους ἀναφέρω τὴν θέσιν καὶ ὅτι μετρῶ μὲ μονάδα τινὰ τρία μήκη καλούμενα συντεταγμένας· ὅπως ἐπίσης διὰ νὰ μετρήσω τὸν χρόνον μεταχειρίζομαι μονάδα χρόνου· κάμνω οὕτω τὰς παρατηρήσεις μου λαμβάνων ὑπ' ὄψει καὶ τὰ σφάλματα τὰ ὁποῖα θὰ ἔχω ἀπὸ τὴν ἀτέλειαν τῶν ὀργάνων καὶ ἀπὸ τὴν ἰδικὴν μου ἀτέλειαν ὡς παρατηρητοῦ, τὴν προσωπικὴν τουτέστιν ἐξίσωσιν· ἐξακολουθῶ τὰς παρατηρήσεις μου κάμνων συγκρίσεις αὐτῶν πρὸς ἐξαγωγήν νόμου μὲ τὸν ὁποῖον ζητῶ κατόπιν νὰ προῖδω φαινόμενα· π. χ. κινήσεις τῶν ἀστέρων, ὅποτε φαντάζομαι σταθερὸν σύστημα ἄξόνων συντεταγμένων, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρω τὰς κινήσεις, τουτέστι φαντάζομαι σύστημα ἄξόνων οὕτως εἰπεῖν προνομιούχον· κἄτι τι πού ἀμέσως προσκρούει εἰς τὴν

ἔννοιαν τοῦ ἀναλλοιώτου τῶν νόμων· ἀλλὰ πλὴν αὐτοῦ ὑπέθετα κατὰ τὰς μετρήσεις μου ὅτι ἐμέτρησα μήκη καὶ χρόνον μὲ μονάδα σταθεράν. Ποῖαι εἶναι ὁμῶς αἱ λαμβανόμεναι μονάδες; π. χ. τὸν χρόνον μετροῦμεν μὲ τὸ ὥρολόγιον· ἀλλὰ πῶς γίνεται ἐπὶ παραδείγματι ὁ κανονισμὸς τοῦ ὥρολογίου αὐτοῦ; ἢ καὶ πῶς γίνεται ἡ συμφωνία μεταξὺ τῆς μεσημβρίας <sup>(1)</sup> δύο ὥρολογίων κειμένων εἰς διάφορα σημεῖα; Ἐὰν ἦτο δυνατόν νὰ ὀρίσωμεν ἀπόλυτον οὕτως εἶπειν ὥρολόγιον, τὸ ὁποῖον νὰ βαδίζῃ μὲ τελείαν κανονικότητα παρ' ὅλας τὰς μετατοπίσεις <sup>(2)</sup>, θὰ ἦτο εὐκόλον νὰ φαντασθῶμεν πῶς θὰ ἐκανονίζομεν ὅλα τὰ ὥρολόγια τοῦ σύμπαντος. Θὰ ἤρκει νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον τοῦ σύμπαντος ἐννοεῖται πάντοτε μὲ τὸ ρολοῖ εἰς τὴν τσέπην. Ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ἀκατόρθωτον, μᾶς ἀπομένει ὡς μέσον μετρήσεως νὰ χρησιμοποιήσωμεν φωτεινὰ σημεῖα· ἀλλὰ τότε προκύπτουν ἄλλαι δυσκολίαι· πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι τὸ φῶς δὲν μεταδίδεται ἀκαριαίως· ἔχει καὶ αὐτὸ τὴν ταχύτητά του· ἀληθῶς αὕτη θεωρεῖται μεγαλυτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς δυνατὰς ταχύτητας· εἶναι ὁμῶς μία ταχύτης <sup>(3)</sup>· ἀμέσως προκύπτει τὸ πρόβλημα τοῦ συγχρονισμοῦ· π. χ. ἔστω ὅτι συνέβησαν δύο φαινόμενα, τὰ ὁποῖα εἶναι σύγχρονα διὰ δύο κατοίκους τῆς Γῆς καὶ ἔστω ὅτι παρατηρητὴς τις εἰς τὸν αἰθέρα παρατηρεῖ τὰ ἴδια φαινόμενα. Κατὰ τὴν κοινῶς παραδεδεγμένην ἀντίληψιν ταῦτα θὰ εἶναι σύγχρονα καὶ διὰ τὸν ἐπὶ τοῦ αἰθέρος παρατηρητήν. Κατὰ τὰς σημερινὰς ἀντιλήψεις δὲν ἔπεται κατ' ἀνάγκην ὅτι τὰ ἴδια φαινόμενα τὰ ὁποῖα εἶναι σύγχρονα διὰ τοὺς ἐπὶ τῆς γῆς θὰ εἶναι σύγχρονα διὰ τὸν ἐπὶ τοῦ αἰθέρος παρατηρητήν <sup>(4)</sup>. Ἡ ἔννοια τοῦ συγχρονισμοῦ πολὺ σαφὴς διὰ συμβάντα ἐγγύτατα ἀλλήλων γίνεται σκοτεινὴ, ὅταν πρόκειται περὶ συμβάντων λίαν ἀπομακρυσμένων εἰς τὸ διάστημα. Ἐπίσης μεγάλας δυσκολίας ἔχομεν καὶ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν μηκῶν· ὁ Einstein κατώρθωσε νὰ

(1) ἢ καὶ τοῦ χρόνου 12.

(2) μὴ ἐπηρεαζόμενον ὑπὸ τοῦ πεδίου βαρύτητός κλπ.

(3) καὶ μάλιστα πρόκειται περὶ ταχύτητος τοῦ φωτός διὰ σώματα ἐν κινήσει πρὸς ἀλλήλα.

(4) ἰδὲ διάλεξίν μου γενομένην εἰς τὴν Ἱατρικὴν Ἑταιρείαν (Πρακτικὰ Ἱατρικῆς Ἑταιρείας καὶ περιοδικὸν «Κλινικὴ» Μάϊος, Ἰούλιος 1926).

προσανατολίση τὸ μέτρον πρὸς τὴν πραγματικότητα τῆς μετρήσεως. Κατὰ τὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος δὲν ὑπάρχουσιν ἄξονες προνομιοῦχοι, δηλαδή εἴτε ἀναφέρομεν τὰ φαινόμενα ὡς πρὸς ἄξονας ἐν ἠρεμίᾳ εἴτε ὡς πρὸς ἄξονας ἐν κινήσει, θὰ ἔχωμεν τὸ αὐτὸ ἔξαγομένον. Τὸ διάστημα εἶναι σχετικὸν ὡς πρὸς τὸν παρατηρητήν. Ἐπίσης δὲν ὑπάρχει χρόνος ἀπόλυτος ἀλλὰ χρόνος τοπικός, ἐξαρτώμενος ἀπὸ τοὺς παρατηρητὰς ἐκάστου συστήματος· ἔχομεν δ' ὅτι ἡ σχετικὴ κίνησις ἀλλοιώνει τὰ μέτρα τοῦ διαστήματος καὶ τοῦ χρόνου. Παρατηροῦμεν συναφῶς ὅτι εἰς τὰς λαμβανομένας προσεγγίσεις οὐσιῶδες εἶναι νὰ ἔχωμεν προσέγγισιν καὶ τοῦ παραλειπομένου ἢ καὶ νὰ ἔχωμεν ἀνώτερον ὄριον τοῦ παραλειπομένου· ἢ ἀκριβέστερον ἀκόμη νὰ γνωρίζωμεν ὅτι τὸ λάθος ποὺ κάμνομεν δὲν ὑπερβαίνει κάποιον ἀριθμὸν, ὅσο τὸ δυνατόν μικρότερον. Τοῦτο κατ' ἐπιφάνειαν φαίνεται εὐκόλον καὶ ὅμως συνήθως εἶναι δύσκολον· γνώσεις τοιαῦται μᾶς ὀδηγοῦσιν ἐνίοτε εἰς μεγάλας προσεγγίσεις. Πρέπει ἄλλως τε νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι συμβαίνει ἐνίοτε ἐν μικρὸν λάθος νὰ ἔχη βαθειὰν ρίζαν καὶ ὀλίγον τι μεγαλυτέρα προσέγγισις νὰ γίνεται ἀφορμὴ μεγάλων ἀνακαλύψεων. Τὸ παραλειπόμενον ἀφήνει ἐνίοτε νὰ διαφύγουν πολλά. Τὸ νὰ προσδιορίσωμεν ποσότητος ἐλαχίστας, τὰς ὁποίας θὰ ἑθεώρει τις παραμελητέας, ἔχει ἐνίοτε σπουδαίαν σημασίαν· ὑπάρχουν παραδείγματα δεικνύοντα τὸ μέγεθος τῆς πρακτικῆς σημασίας παρατηρήσεων ἐπὶ ποσοτήτων φαινομενικῶς παραμελητέων. Πολλὰ μεγάλα ἀστρονομικὰ ἀνακαλύψεις ἐκεῖ ὀφείλονται, π. γ. ἡ εὕρεσις τῆς διαφορᾶς μεταξὺ ἐλλειπτικῶν τροχιῶν τῶν πλανητῶν καὶ κυκλικῶν τοιούτων ἀπῆται κατὰ τοὺς χρόνους τοῦ Κεπλέρου παρατηρήσεις μεγίστης ἀκριβείας λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν μέσων τῆς τότε ἐποχῆς· οἱ νόμοι δὲ τῆς ἐλλειπτικῆς κινήσεως εἶναι οἱ ἐπιτρέψαντες εἰς τὸν Νεύτωνα νὰ εὕρη τὴν παγκόσμιον ἔλξιν. Ὅπως ἐπίσης ἀπὸ τὰς ἀνωμαλίας τῆς κινήσεως τοῦ Οὐρανοῦ ὠδηγήθη ὁ Leverier εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ Ποσειδῶνος.

Τὸ οὐσιῶδες εἰς τὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος τοῦ Einstein εἶναι ἡ παραδοχὴ τοῦ ὅτι δὲν ὑπάρχει λόγος νὰ ὑποθέσωμεν *a priori* ὅτι τὸ διάστημα καὶ ὁ χρόνος εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπ' ἀλλήλων· ἡ θεωρία τοῦ Einstein ἰδρύει ἐπίσης σύνδεσμον μεταξὺ τῆς πυκνότητος

τῆς ὕλης καὶ τῆς καμπυλότητος τοῦ σύμπαντος· διδάσκει καὶ αὐτὴν ἐπίσης ὅτι ἡ μᾶζα αὐξάνει μὲ τὴν ταχύτητα. Πῶς ὅμως ὁ νόμος τοῦ Νεύτωνος καὶ ἡ κλασικὴ Μηχανικὴ ἔδωκαν τόσον ἄφθονα ἐξαγόμενα τόσα ὥστε ἀπὸ πρακτικῆς τοῦλάχιστον ἀπόψεως νὰ μὴν ὑπάρχη βία νὰ ἀλλάξῃ; τοῦτο διότι αὐταὶ ἀποτελοῦν ἰκανὴν προσέγγισιν ἀνωτέραν τῆς ἀπαιτουμένης· λέγομεν ἰκανήν, διότι βεβαίως ἐὰν μᾶς εἶπη τις ὅτι ὁ ἥλιος εἶναι μεγαλύτερος τῆς Πελοποννήσου, δίδει προσέγγισιν τὴν ὁποίαν ὅμως ἴσως δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν καὶ ἀπομάκρυνσιν.

Ἐπὶ τὸ γενικώτερον δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οἱ παλαιότεροι ἐζήτουν νόμους ἐν τῇ φύσει ἐκφραζομένους κατὰ τὸν ἀπλούστερον δυνατὸν τρόπον, ἀπομεμονωμένους οὕτως εἶπεῖν εἰς τὴν ἀντικληψίν μας καὶ τῶν ὁποίων ἕκαστος χωριστὰ ἐπαληθεύεται ἀπὸ μέτρα, τὰ ὁποῖα ἐνόμιζαν πραγματικά· ἐζήτουν δὲ καὶ προσεγγίσεις τοιούτων νόμων· καὶ ἐθεώρουν οὕτως εἶπεῖν ὅτι εἰς τὸν νόμον ἀντιστοιχεῖ κάποις μαθηματικὸς τύπος γνωστὸς ἢ ἄγνωστος, ἀδιάφορον, καὶ μὲ πειραματικὰ δεδομένα ἐζήτουν νὰ προσδιορίσουν κατὰ προσέγγισιν τὸ ἀληθές τοῦ τύπου αὐτοῦ ἢ τὸν τύπον αὐτὸν τοῦτον, ὅπως π.χ. εἰς τὸν τύπον τῆς βαρύτητος, εἰς τὸν τύπον τοῦ νόμου τοῦ Μαριόττου.

Ἡ σημερινὴ ἐπιστήμη θεωρεῖ δίκτυον μαθηματικῶν σχέσεων προωρισμένον νὰ περιλαμβάνῃ ὅλα τὰ δεδομένα ὅσα δίδει ἡ πειραματικὴ ἐπιστήμη. Τὸ σύνολον τῶν μαθηματικῶν αὐτῶν σχέσεων τοῦ δικτύου αὐτοῦ ζητεῖ ὁ ἐπιστήμων νὰ συνταυτίσῃ μὲ τὸ σύνολον τῶν δεδομένων· ἐννοεῖται ὅτι ἡ συνταύτισις αὕτη ποτὲ δὲν θὰ γίνῃ ἐφόσον οὔτε ἡ μαθηματικὴ ἀνάλυσις ἢ συνιστώσα τὸ δίκτυον, οὔτε τὸ πείραμα εἶπε τὴν τελευταίαν λέξιν. Ἡ προσέγγισις τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν οὕτω δὲν καταρρίπτει τὸν ἀντίστοιχον ἀπλοῦν νόμον, τροποποιεῖ ὅμως αὐτὸν καλύτερον· γίνεται οὕτως εἶπεῖν ἀναθεώρησις. Παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι ὁ φυσικὸς διὰ νὰ ἔγῃ ὄριον ἀκριβείας τῶν παρατηρήσεών του καταφεύγει εἰς τὴν θεωρίαν τῶν σφαλμάτων, στηρίζεται δὲ ἐπὶ τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων διὰ νὰ ἐκτιμήσῃ τὴν ἀξίαν τῆς τοιαύτης ἢ τοιαύτης μαθηματικῆς σχέσεως· ἔρχεται οὕτω συνεπίκουρος ὁ λογισμὸς τῶν πιθανοτήτων.

νοτήτων ἔχομεν πιθανότητα διὰ τὴν προσέγγισιν τῆς παρατηρήσεως, ἔχομεν πιθανότητα διὰ τὸ ἀκριβές τῆς διατυπώσεως τοῦ ἔξαγομένου τῆς παρατηρήσεως καὶ πιθανότητα διὰ τὴν ἑρμηνείαν αὐτοῦ τοῦ ἔξαγομένου. Ἡ θεωρία τῶν πιθανοτήτων ἀποτελεῖ ἐν ἑκ τῶν ὑψηλοτέρων καὶ λεπτοτέρων ἐπιστημονικῶν θεμάτων· ὁ λογισμὸς τῶν πιθανοτήτων εἶναι ἀπὸ ἐκείνους εἰς τοὺς ὁποίους δυσκόλως θὰ ἔδιδέ τις ἐμπιστοσύνην, ἂν δὲν ἐγνώριζε πόσον ἐβοήθησαν εἰς τὴν ἐπιστήμην καὶ κοινωνίαν ἐν γένει. Παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὴν κινήτικὴν θεωρίαν τὴν ὁποίαν ἴδρυσαν κατ' ἀρχὰς ὁ Bernouilli καὶ ὁ Maxwell καὶ ἀνέπτυξαν κατόπιν ὁ Boltzmann καὶ ἄλλοι, τὰ αἲρια σύγκεινται ἀπὸ πάμπολλα μόρια κινούμενα ἐλευθέρως καὶ κατὰ τύχην καὶ καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις. Χάρις εἰς τὴν συνεργασίαν τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων καὶ τῆς παρατηρήσεως ἡ νέα θεωρία ἀνεκάλυψε πολλὰ μυστήρια· ἐδῶ ἔχομεν τὴν ὑπόθεσιν τοῦ Maxwell καθ' ἣν ὅλαι αἱ διευθύνσεις εἶναι ἐξ ἴσου πιθαναί· ἐφηρμόσθη δὲ ἐνταῦθα ἡ θεωρία τῶν πιθανοτήτων· ὁ Maxwell ὠθούμενος ἀπὸ τὸ αἶσθημα τῆς συμμετρίας ἔλαβε τὸν λογισμὸν τῶν πιθανοτήτων ὑπ' ὄψει του καὶ ἔκαμε τὰς περιφήμους θεωρίας του, ἐφαρμόσας εἰς τὴν θεωρίαν τῶν μορισκῶν κινήσεων στατιστικὴν μέθοδον. Ὁ Poincaré θέλων νὰ ἐκφράσῃ τὴν δύναμιν τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων χιουμοριστικῶς εἶπε: «Μοῦ ζητεῖτε νὰ σᾶς προείπω τὰ φαινόμενα τὰ ὁποῖα θὰ παραχθῶσιν. Ἐὰν κατὰ δυστυχίαν ἐγνώριζα τοὺς νόμους τῶν φαινομένων τούτων, δὲν θὰ ἠδύναμην νὰ φθάσω εἰς συμπέρασμα εἰμὴ κατόπιν ἀπεράντων ὑπολογισμῶν· διὸ καὶ θὰ ἠρνούμην νὰ σᾶς ἀπαντήσω· ἐπειδὴ ὅμως ἔχω τὴν τύχην νὰ ἀγνοῶ τοὺς νόμους αὐτούς, θὰ σᾶς ἀπαντήσω ἀμέσως καὶ τὸ περίεργον εἶναι ὅτι ἡ ἀπάντησίς μου θὰ εἶναι ὀρθή.

Ὡς πρὸς τὴν στοιχειώδη ιδέαν τὴν χρησιμεύουσαν διὰ τὸν λογισμὸν τῶν πιθανοτήτων παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:

Ὅταν λέγωμεν ὅτι ὑπάρχει πιθανότης νὰ παραχθῇ ὑπὸ τὰς τάδε περιστάσεις τὸ τάδε φαινόμενον καὶ τοῦτο χωρὶς νὰ γνωρίζωμεν τὴν αἰτίαν τῆς παραγωγῆς τοῦ φαινομένου, ἀγόμεθα ἀπλῶς καὶ ὡς ἐξ ἐνστίκτου εἰς ἔκφρασιν τῆς γνώμης αὐτῆς, διότι παρατηρήσαμεν ὅτι παρήχθη πλειστάκις ὑπὸ ἀναλόγους περιστάσεις τὸ

αὐτὸ φαινόμενον. Εἰς τὸν λογισμὸν τῶν πιθανοτήτων ἔχομεν τοὺς νόμους τῶν μεγάλων ἀριθμῶν δηλ. νόμους, οἱ ὅποιοι προσεγγίζουν τόσον περισσότερο πρὸς τὴν ἀλήθειαν ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δοκιμῶν. Θεώρημα στηριζόμενον ἐπὶ ἐμπειρικῆς βάσεως προκαλέσαν δὲ πολλὰς παρατηρήσεις καὶ ἀντιρρήσεις εἶναι τὸ θεώρημα τοῦ Bernouilli. Διὰ τὴν δόσιν τις στοιχειώδη καὶ κατὰ προσέγγισιν ἰδέαν τοῦ νόμου τοῦ Bernouilli δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς: Ὅταν ὑπάρχῃ πιθανότης τις νὰ παραχθῇ φαινόμενον καὶ δοκιμάσωμεν πολλάκις ἂν παράγεται, θὰ ἴδωμεν ὅτι θὰ παραχθῇ σχεδὸν ἀναλόγως πρὸς τὴν πιθανότητα αὐτοῦ. Π. γ. ἐὰν ἡ πιθανότης παραγωγῆς ἑνὸς φαινομένου εἶναι 25 % δηλ.  $\frac{1}{4}$  τότε, ἐὰν γίνουν 4 χιλιάδες δοκιμαί, θὰ παραχθῇ περίπου 1000 φορές τὸ φαινόμενον. Ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς ἐστηρίχθη ὁ Bernouilli διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματός του δηλ. ὑπέθεσεν ὅτι τὰ συμβάντα παράγονται κατ' ἀριθμὸν ἀνάλογον πρὸς τὴν πιθανότητα αὐτῶν καὶ ὅτι τὸ γινόμενον σφάλμα ἐπὶ τοσοῦτον ἐλαττοῦται ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν δοκιμῶν αὐξάνει δηλ. ἐστηρίχθη ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῆς ἀδιαφορίας τῶν αἰτίων. Τὸ θεώρημα τοῦ Bernouilli παρ' ὅλην τὴν ἐπ' αὐτοῦ κριτικὴν ἔδωκε πάμπολλα συμπεράσματα καὶ ἐχρησίμευσεν ὡς βᾶσις εἰς τὴν στατικὴν ἐπιστήμην.

Ἡ ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὰ αἷτια καὶ ἡ παραδοχὴ ὅτι συμμετρία τις ὑπάρχει ὡς πρὸς αὐτὰ εἶναι ἡ θεμελιώδης ἰδέα διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων, διὰ τὴν ὁποίαν χρησιμεύουν τὰ δεδομένα τῆς διαισθήσεως, τὰ ὅποια ἔχουσι τὰς ρίζας των εἰς τὴν προγονικὴν πείραν.

Εἰς τὴν ἐπιστημονικὴν φιλοσοφίαν ἔχομεν καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ αὐθαίρετου—ἐννοῶ δι' αὐτοῦ τὰ ἑξῆς: Εἰς τὸν αἰσθητὸν κόσμον ὑπάρχει τόση ποικιλία φαινομένων καὶ ὅμως προσπαθοῦμεν σειρὰν ποικίλων φαινομένων νὰ περικλείσωμεν εἰς τινὰς τύπους μαθηματικούς· τοῦτο εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς φαίνεται παράδοξον. Πῶς εἶναι δυνατόν ἀπειρία φαινομένων νὰ περιέχεται εἰς ἕνα τύπον μὲ ὀλίγους συντελεστὰς ἢ μὲ ὀλίγας παραμέτρους· ἐδῶ πρέπει νὰ προσέξωμεν καὶ εἰς τὸ ὅτι εἰς τὸν τύπον περιέχονται αὐθαίρετοι συντελεσταὶ ἢ αὐθαίρετοι παράμετροι καὶ ὅτι ἕκαστος μερικὸς προσδιορισμὸς αὐτῶν δίδει καὶ

ένα τύπον· δηλ. ένας τύπος περιέχει άπειρίαν άλλων μερικῶν. Ἄλλα καὶ ἀπὸ άλλων σπουδαίων ἀπόψεων θὰ ἠδύνατό τις νὰ φιλοσοφήσῃ ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ αὐθαιρέτου· τοῦτο ἴσως ἀναπτύξω προσεχῶς.

Καὶ ἤδη ἐν συμπεράσματι παρατηροῦμεν ὅτι αἱ νεώτεραι ἐπιστημονικαὶ ἀντιλήψεις ὀδηγοῦσιν εἰς τὸ νὰ συγκρίνωμεν τὰ μαθηματικὰ συμπεράσματα μιᾶς θεωρίας μὲ ὅσον τὸ δυνατόν ἀκριβέστερα ἐξαγόμενα τοῦ πειράματος, νὰ λαμβάνωμεν πολὺ ὑπ' ὄψει τὰ σφάλματα παρατηρήσεως, νὰ διορθώνωμεν τοὺς τύπους μας προσδιορίζοντες ἔστω καὶ ἐν δεκαδικὸν ψηφίον ἐπὶ πλέον τῆς δοθείσης προσεγγίσεως, νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψει τὸν συντελεστὴν πιθανότητος τὸν ὁποῖον δίδουν οἱ ὄροι τοῦ προβλήματος, νὰ ἀνακαλύπτωμεν ἰδιαζούσας περιπτώσεις, ἀνωμαλίας καὶ ἐξαιρέσεις, αἱ ὁποῖαι καταρρίπτουν ἰδέας, τὰς ὁποίας πολὺ εὐκόλως εἶχομεν δεχθῆ καὶ μᾶς ἀναγκάζουν νὰ ἀναθεωρήσωμεν τὰς θεμελιώδεις ἀρχάς· νὰ προβαίνωμεν εἰς γενικοποίησιν, ἀλλὰ μὲ μεγάλην προσοχὴν διότι εἶναι ἐνίοτε τοῦτο ἐπικίνδυνον· πάντως ὁ ἡμισκεπτικισμὸς εἶναι διὰ τὸν ἐπιστήμονα ἡ ἀρχὴ τῆς σοφίας.

Ἡ γενίκευσις τῶν νέων θεωριῶν ὀδηγεῖ εἰς τὴν ἀντίληψιν ὅτι ἡ βαρύτης εἶναι γεωμετρικὴ ἰδιότης τοῦ σύμπαντος· ἡ ὁποία εἰς τὴν γεωμετρίαν τῶν τεσσάρων διαστάσεων ἀποτελεῖ γενίκευσιν ἐκείνου τὸ ὁποῖον καλοῦμεν καμπυλότητα εἰς τὴν Εὐκλείδειον γεωμετρίαν· οὕτω κατὰ τὰς παλαιότερας ἀντιλήψεις ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος ἐθεωροῦντο ὡς ἡ σκηνὴ εἰς τὸ θέατρον τοῦ κόσμου, ἐνῶ κατὰ τὰς σημερινὰς ἀντιλήψεις θεωροῦμεν ὅτι ὄχι μόνον τὴν σκηνὴν ἀποτελοῦσιν ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος, ἀλλὰ καὶ ὅτι παίζουσι κύριον ρόλον εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου. Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι ὅτι αἱ νέα θεωρία ἐγίναν ἀφορμὴ νὰ λεχθῆ ὅτι οἱ σημερινοὶ ἐπιστήμονες κάμνουν Μεταφυσικὴν ἀπὸ φόβον τῆς Μηχανικῆς, ἀφοῦ εἶχον προσπαθήσῃ νὰ θεμελιώσουν ὅλα ἐπὶ τῆς Μηχανικῆς ἀπὸ φόβον τῆς Μεταφυσικῆς. Ἡ Μεταφυσικὴ ὅμως ἡ σημερινὴ ἔχασε τὴν παλαιάν της σημασίαν. Ὅπωςδὴποτε μὲ τὰς θεωρίας τῶν Quanta, μὲ τὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος κλπ. ἡ ἐπιστήμη δὲν σταματᾷ· εὐρισκόμεθα ἀκόμη εἰς τὸν πρόλογον· ὄχι βέβαια τὸν ἰδικόν μου· ἐγὼ εἶπα διὰ σήμερον σχετικῶς πολλὰ καὶ ἀναγκάζομαι νὰ σταματήσω.