

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΚΟΙΝΗ ΧΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΝΔΕΤΟΥ ΜΕΘΟΔΟΥ, ΕΙΤΟΝ ΤΗΣ ΑΛΤΣΟΥ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

§. 312.

Αὕτη ἡ Μέθοδος, ἥτις διὰ τὴν ἀλληλένδετον συνέχειαν τῶν ὕψων αὐτῆς ὠνομάσθη Ἄλυσος (α), δὲν ἔχει διωρισμένους ὄρους, ὡπερ αἱ λοιπαί, εἴτουν ἡ μέθοδος τῶν τριῶν, τῶν πέντε, καὶ αἱ ἐφεξῆς, ἐπειδὴ αὐτὴ περιλαμβάνει ὅλας αὐτάς ἐν ἑαυτῇ, καὶ ἐκ τούτου προκύπτουσιν ἐν τῇ καταστροφῇ αὐτῆς ποτὲ μὲν τρεῖς, ἄλλοτε δὲ πέντε, καὶ ἄλλοτε ἑπτὰ, ἐννέα, καὶ ἔτι πλείονες ἀδιόριστοι ὄροι, δῆλονότι τόσοι, ὅσοι περικλείονται εἰς τὸ διδόμενον πρόβλημα, καὶ αὐτοὶ αἰετοτε μοναδικοὶ· ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι δι' αὐτοῦ τοῦ εὐμεθοδοῦ τρόπου ἐπιλύονται τὰ πολυσύνθετα προβλήματα εὐκόλως καὶ ταχέως, ἐπειδὴ ἡ πράξις αὐτῶν ἐκτελεῖται ἐφάπαξ, ἐν ᾧ πρὸς ἐπίλυσιν τῶν τοιούτων προβλημάτων πρέπει νὰ γίνωσι περισσότεραι πράξεις, ποτὲ μὲν διὰ μιᾶς, ἄλλοτε δὲ δι' ἄλλης τῶν ῥηθέντων μεθόδων (μεθ' ὧν

(α) Ἄλυσος ἐκλεθῆ παρα τῷ Εὐρείτῳ αὐτῆς ἑλλάδοῦ, ῥεῖς καλουμένου.

συναριθμούνται και αἱ ἀντίστροφαι αὐτῶν), τὸ ἐπιτόν προξενεῖ οὐ μόνον δυσκολίαν, ἀλλὰ πολλάκις και σφάλματα· ἄρα ἡ Μέθοδος τῆς Ἀλύσου εἶναι προτιμότερα αὐτῶν, διότι ὁ εὐτακτος τρόπος, δὲ εὖ καταστρώνονται οἱ ὄροι αὐτῆς, ἐν προξενεῖ τοιαῦτα, ἐξ ἐναντίας παρέχει εὐκολίαν και ἄπταισον πράξιν, ἐν ταύτῳ δὲ ἀποδεικνύει καί τινας κανόνας, και μάλιστα τοὺς τῶν ἀνωτέρω μεθόδων, με τοὺς ὁποίους εἶναι ἐπιφορτισμένη ἡ ἀριθμητικὴ, πάντῃ περιττοῦς, και τοῖ ἐνομιζέτο κοινῶς, ὅτι τὰ προβλήματα αὐτῶν ἐν δύνανται νὰ ἐπιλυθῶσι δι' ἄλλης μεθόδου.

Ἄλλ' ὅμως ἡ πείρα ἀπέδειξε σαφῶς, ὅτι και ταῦτα ἐπιλύονται πάνυ εὐχερῶς και ταχέως διὰ τῆς Ἀλύσου (α), ἀρκεῖ μόνον ν' ἀναμνησθῶμεν τὰ, ὅσα προείπομεν περὶ αὐτῆς, εἰς τὰ ὅποια, ἐν δόσωμεν τὴν προσήκουσαν προσοχὴν, ἄς εἴμεθα βέβαιοι, ὅτι ποτὲ ἐν θέλει δοκιμάσωμεν δυσκολίαν τοῦ νὰ λύσωμεν δι' αὐτῆς τὰ τε ἀπλά, και ἀντίστροφα, ἔτι δὲ και τὰ πολυσύνθετα προβλήματα· ποῖα δὲ εἰσὶ ταῦτα, εἰς τὰ ὅποια πρέπει νὰ προσέχωμεν, ἰδοὺ ἐπαναλαμβάνομεν αὐτὰ συνοπτικῶς και ἐνταῦθα.

Α'. Ἐν τῷ τέλει τοῦ §. 302, εἶπομεν, ὅτι ἡ βᾶσις τῆς Ἀλύσου θεμελιούται εἰς τὸ, νὰ εὐρωμεν τὸν Ἐρωτηματικὸν Ἀριθμὸν τοῦ δοθέντος προβλήματος, διὸ λέγομεν πάλιν, ὅτι αὐτὸς ὁ ἐρωτηματικὸς ἀριθμὸς πρέπει νὰ διωρισθῆ μετὰ πάσης ἀκριβείας, τοῦτ' ἔστι, νὰ εὐρωμεν τὸν ἀληθῆ.

Β'. Νὰ μὴν ἀφεθῆ οὐδεὶς ὑποθετικὸς τοῦ προβλήματος ὄρος, ὅστις ἐπιζητεῖται εἰς τὴν λύσιν αὐτοῦ τοῦ ἰδίου προβλήματος, και τελευταῖον

(α) Εἰς τὰ ἀκόλουθα τρία κεφάλαια παριστάνεται διὰ διαφόρων ὑποδειγμάτων, ἔτι ἡ ἀντίστροφος μέθοδος τῶν τριῶν, ἡ εὐθεία τε και ἀντίστροφος τῶν πέντε, και ἕτεραι τοιαῦται, εἰςὶ πάντα πᾶσι περιτταί.

Γ'. Νὰ ταχθῶσιν ἐν τῇ κατασρώσει ὅλοι οἱ τοῦ προβλήματος δοθέντες ὅροι (ἀρχομένου τοῦ ἐρωτηματικοῦ ἀριθμοῦ) οὕτως ἐπ' ἀκριβῆς καὶ ἀλληλεπιδέτως, ὥστε ἕκαστος ὅρος τῆς ἀρισερᾶς σήλης νὰ εἶναι κατὰ πάντα, καὶ ἀνευ τινὸς ἀμφιβολίας πάντοτε ὁμογενῆς τοῦ πλησίον αὐτοῦ δεξιῶς προηγμένου ὅρου (ὡς §. §. §. 277. 310. 311.).

Ναὶ λέγομεν καθ' ὅλους τοὺς ὀρθοὺς λόγους, προσέτι δὲ καὶ καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν τῆς ἐννοίας τοῦ δοθέντος προβλήματος, πρέπει νὰ εἶναι ὁμογενεῖς οἱ ἀρισεροὶ ὅροι μὲ τοὺς δεξιούς, ἐπειδὴ ὑπάρχουσιν οὐκ ὀλίγαι πτώσεις, ὅπου ἀπαρτᾶται τις, καὶ ἐκλαμβάνει δι' ὁμογενεῖς ἐκείνους τοὺς ἀριθμούς, οἳ τινες οὐκ εἰσὶ τῷ ὄντι. Εἰς αὐτὸ τὸ σφάλμα περιέπετον τινὲς ἀριθμητικοί, οἱ ὅποιοι καὶ ἐκφώνησαν, ὅτι ἡ "Αλύτος δὲν εἶναι χρήσιμος εἰς πάμπολα ἀριθμητικὰ προβλήματα, πρὸς ἀναίρεσιν ὁμῶς τούτου προτίνει ὁ Γκούντζ (α) ἐν τοιοῦτον πρόβλημα ἐνὸς ἄλλου, οἷον εἰς τὸ ἐπόμενον.

Πραγματευτῆς τις ἔχει 145 ὀκδ. πρᾶγμα, οὗ ἢ ὀκτ' τιμᾶται παράδες 13½, τὸ ὅποιον θέλει ν' ἀλλάξῃ, καὶ νὰ λάβῃ ἀντ' αὐτοῦ ἄλλο καλλήτερον, τοῦ ὁποίου ἢ ὀκτ' τιμᾶται παράδες 25, ἄρα πόσας ὀκάδας λήψεται ἀπὸ τοῦ καλλητέρου πράγματος διὰ τὰς ἀνωτέρω 145 ὀκάδας;

Περὶ τῆς κατασρώσεως αὐτοῦ τοῦ προβλήματος λέγουσιν οἱ ῥηθέντες ταῦτα: Κατὰ τὸν κανόνα τῆς Ἀλύτου δὲν δύναται νὰ γίνῃ ἄλλως ἢ κατάσρωσις αὐτοῦ τοῦ προβλήματος, εἰμὴ στοιουτοτρόπως,

; ὀκδ. ἐξ ἐκείνων ἀνὰ 25 παρδ.
ἐὰν ἀνὰ παρδ. 13½ ὑπάρχωσιν 145 ὀκδ.

(α) Ὅρα εἰς τῇ Ἀριθμητικῇ τοῦ Σ. Γκούντζ, ἐκδοθεῖσαν τετρακιστὴ ἐν Πράγῃ τῷ 1640 ἔτι. Σελ. 301. Τόμ. Α'.

ἢ ἡ ὁποία, εἰς λογαριασθῆ κατα τὸν κανόνα τῆς Ἀλύσου, προκύπτει προφανῶς ψευδὲς πηλίκον· διότι πολλαπλασιαζόμενα 145 με 25 , καὶ διαιρούμενον τὸ κεφάλαιον αὐτῶν διὰ τῶν $13\frac{1}{2}$, προκύπτει μεγαλύτερος ἀριθμὸς τῶν 145 ὁκάδων, ἐν ᾧ ἀπὸ τοῦ καλητέρου πράγματος ἀνὰ παρδ. 25 ἔπρεπε νὰ προκύψῃ μικρότερος τῶν 145 ὁκάδων. Αὐτὸ λοιπὸν, καὶ ἕτερα παρόμοια ὑποδείγματα δεικνύουσιν, ὅτι ἡ Ἀλυσος εἶναι κοινῶς χρήσιμος.

Ἄλλ' ὅμως αὕτη ἡ ἀτέλεια, τὴν ὁποίαν βούλονται νὰ προσάψωσι τῇ ἀλληλενδέτῳ Μεθόδῳ, προέρχεται ἐκ τῆς ἐπιπολαίως παρατηρήσεως τῶν κανόνων αὐτῆς. Διότι· πῶς δύναται ἐκ τῆς προβληθείσης κατασρῶσεως.

; ὁκδ. . ἀνὰ παρδ. 25 .

εἰς παρδ. $13\frac{1}{2}$. εἰδῶσιν ὁκδ. 145 .

νὰ προκύψῃ ὀρθὸν πηλίκον, ἐν ᾧ οὔτε ἀπ' ἀκριβείας ἐτάχθη, ἀλλ' οὔτε εἶναι ἐντελής; Πρῶτον οἱ παρδ. 25 εἶναι ὁ ἀληθῆς Ἐρωτηματικὸς Ἀριθμὸς, ἐπειδὴ ἡ ἐρώτησις εἶναι γίνεται διὰ τὴν ποσότητα, ἢ διὰ τὴν τίμησιν αὐτῶν τῶν 25 παράδων, ἀλλὰ διὰ τὴν τίμησιν τῶν 145 ὁκάδων, πόσαι ὁκάδες λεφθῆσονται δι' αὐτὰς ἀνὰ παρδ. 25 , δι' ἣν αἰτίαν ὁ δεξιὸς τελευταῖος ὅρος ἔπρεπε νὰ φανερώσῃ τοιαύτας ὁκάδας, οὐχὶ δὲ, ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω κατάσρῳσιν ὁκδ. 145 , αἱ ὁποῖαι εἰσὶ τοιαῦται ὁκάδες, ἐξ ὧν ἡ 1 τιμᾶται παρδ. $13\frac{1}{2}$. Δεύτερον οἱ τῆς συνθήκης ὅροι παρδ. $13\frac{1}{2}$ καὶ ὁκδ. 145 εἶναι ἀκριβεῖς· διότι οἱ παρδ. $13\frac{1}{2}$ εἶναι ἡ ἀξία ὁκδ. 145 , ἀλλὰ μόνον 1 ὁκάδος, διὰ τοῦτο ὅλη ἡ ῥηθεῖσα κατάσρῳσις εἶναι μηδαμῶς ἀλληλένδετος, ἀλλὰ καθόλου ἐσφαλμένη.

Ἐν τούτῳ ὅμως δύναται νὰ εἰπῆ τις. Πῶς εἶναι δυνατόν νὰ γίνῃ δι' αὐτὸ τὸ πρόβλημα ἕτερα ἀλληλένδετος κατάσρῳσις, ἐν ᾧ εἶναι ἐδόθησαν ἄλλοι ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ ἐκτὸς τῶν

παρδ. 25 καὶ παρδ. $13\frac{1}{3}$; Ἐὰν ὑποθέσωμεν δι' ἐρωτηματικὸν ἀριθμὸν τὰς ὁκδ. 145, δὲν ἔχομεν ἕτερον ὁμώνυμον ὄρον διὰ νὰ βάλλωμεν ἀρισερῶς· εἰάν δὲ ὑποθέσωμεν ὡς ἐρωτηματικὸν ἀριθμὸν τοὺς παρδ. $13\frac{1}{3}$, εἶναι πάντῃ ἐνάντιον τοῦ προβλήματος, ἐπειδὴ περὶ αὐτῶν δὲν ἔγινε καμμία ἐρώτησις· ὅθεν ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ἄλλη, τοῦλάχισον δοκοῦσα ἀλληλένδετος κατάσρῳσις, ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω (ἐξ ἧς ὁμως ὡς δέδεικται, ἔσω ἐξ ὁποιωνδήποτε αἰτιῶν, προκύπτει ψευδὲς πηλίκον), δῆλον ἐστίν, ὅτι διὰ τοιαῦτα προβλήματα, ὧν οἱ ὄροι ἔχουσιν ἀντίστροφον λόγον, δὲν εἶναι χρήσιμος ἡ ἀλληλένδετος κατάσρῳσις.

Ἄλλ' ὁμως ταῦτα πάντα εἰσὶ κενά· ἡ ἀψευδὴς καὶ ἀκριβοῦς ἀλληλένδετος κατάσρῳσις τοῦ ῥηθέντος προβλήματος, πόσαι ὁκάδες ἀνὰ παρδ. 25 ληφθήσονται δι' ὁκδ. 145 ἀνὰ παρδ. $13\frac{1}{3}$, γὰρτετα ὡς κατωτέρω.

ἡ ὁκδ. (ἀνὰ παρδ. 25), διὰ 145 ὁκδ.

ἐξ ὧν ὁκά 1 . . . τιμᾶται $13\frac{1}{3}$ παρδ.
καὶ διὰ παρδ. 25. . . ληφθήσεται 1 ὁκά (ἀνὰ παρδ. 25)

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐτάχθησαν ὅ,τε ἐρωτηματικὸς ἀριθμὸς, καὶ οἱ λοιποὶ ὄροι οὕτως ἀλληλενδέτως, ὡς προέκυψεν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν μὲ παρδ. $13\frac{1}{3}$, καὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τῶν παρδ. 25, καὶ οὕτω προκύπτει τὸ ζητούμενον ὁκδ. $77\frac{1}{3}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ὀρθόν· διότι ὁκδ. $77\frac{1}{3}$ ἀνὰ παρδ. 25 ποιοῦσι τόσα, ὅσα αἱ ὁκδ. 145 ἀνὰ παρδ. $13\frac{1}{3}$, εἴτουν Γρ. 48, $13\frac{1}{3}$ παρδ.

§. 313.

Ὅλον τὸ σφάλμα, ὡς φαίνεται, προέρχεται ἐκ τούτου, δηλονότι, ἢ δὲν παρατηροῦσι πρυτάπασι τὸν κεκρυμένον ὄρον τῶν τοιούτων προβλημάτων, ἢ οὐκ οἶδασιν πῶς νὰ εἰσαῶξωσιν αὐτὸν εἰς τὴν κατάσρῳσιν, καὶ ἀναμύνουσιν ἀπόκρισιν ἀπὸ τῆς κατασρῳσεως τριῶν ὄρων, τὴν ὁποῖαν μόνον ἡ περισσο-

τέρων ὄρων κατὰστροφίς δύναται νὰ δώσῃ. Διότι ἐρωτῶντες, πόσαι ὀκάδες ληφθήσονται ἀνὰ παρδ. 25 δι' ὀκδ. 145 ἀνὰ παρδ. 13½ ζῆτε, ὅτι ἡ χρηματικὴ ποσότης τοῦ ληφθησομένου καλλιτέρου πράγματος, νὰ εἶναι ὁμοία τοῦ δεδομένου κατωτέρου πράγματος· ἄρα αὐτὸς ὁ ὄρος ἀναγκαίως πρέπει νὰ εἰσαχθῆ εἰς τὴν κατὰστροφίαν, καὶ οὕτω νὰ προκύψῃ ἀνάλογος ἀπὸκρίσις αὐτῆς τῆς συνθήκης.

§ 314.

Πρὸς μεγαλητέραν ἀπόδειξιν ἔπεται ἕτερον ὑπόδειγμα, δι' οὗ σαφηνισθήσονται πληρέστερον τ' ἀνωτέρω λεχθέντα.

Πρόβλημα. Ἐάν 5 ἄνθρωποι τελειώσιν ἐν ὅποιονδήποτε ἔργον ἐν διαστήματι 4 ἡμερῶν, ἄρα εἰς πόσας ἡμέρας δύναται νὰ ἐκτελέσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον 10 ἄνθρωποι;

Ἐπειδὴ ἡ τοῦ παρόντος προβλήματος ἐρώτησις ἀποβλέπει εἰς τὸ διάστημα τοῦ καιροῦ τῶν 10 ἀνθρώπων, θεωρούμενη ἐπιπολαιῶς, ἤθελε νομισθῆ, ὅτι εἰ 10 ἄνθρωποι εἶναι ὁ ἐρωτηματικὸς ἀριθμὸς, καὶ ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ἕτερος ὁμῶνυμος ὄρος, εἴμῃ εἰ 5 ἄνθρωποι, διὰ τοῦτο δὲν δύναται νὰ γίνῃ κἀμμία ἄλλη ἀλληλένδετος κατὰστροφίς, ἐκτὸς τῆς κατωτέρω. Οἶον.

ἡμέρας οἱ . 10 ἄνθρωποι,

ἐάν ἄνθρωποι 5.

. 4 ἡμέρας.

ἡ ὁποία ὁμῶς ἐτέχθη τοιοῦτοτρόπως, ὥσπερ νὰ ἐπροβῆλλετο, πόσα πληρωθήσονται δι' ὀκδ. 10, ἐάν δι' ὀκδ. 5 ἐπληρώθησαν Γρ. 4· ἀλλ' ἐάν ἀπεργασθῆ κατὰ τὸν κανόνα, εἴτουν πολλαπλασιασθῶσι 10 μὲ 4, καὶ διαιρεθῆ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριστέρως κειμένου ὄρου 5, προκύπτουσι 8 ἡμέραι, ὅ ἐστὶ ψευδὲς πηλίκον· διότι 10 ἄνθρωποι δὲν χρειάζονται διπλάσιον διάστημα καιροῦ, ἀλλὰ τὸ ἡμισυ μόνον, ὅσον ἐχρημάσθησαν οἱ 5 ἄνθρωποι, ὅθεν καὶ ἀπεφασίζετο, ὅτι εἰς τοι-

αὐτὰ προβλήματα δὲν δύναται νὰ διατηρηθῇ ὁ κανὼν τῆς ἀλληλενδέτου Μεθόδου.

Πλὴν ἀφ' οὗ ὀλίγον σκεφθῶμεν, βλέπομεν εὐθὺς, ὅτι ἡ ἀπέναντι κατάσρῳσις διὰ περισσότερα αἷτια ἐτάχθη ἐσφαλμένως, διὸ καὶ ἀτελής, ἐξ ἧς κατ' οὐδένα τρόπον δὲν δύναται νὰ προκύψῃ ὀρθὸν πηλίκον. Ἀτελής, ἐπειδὴ ὁ κεφαλαϊώδης ὅρος, ὅτι οἱ 10 ἄνθρωποι δὲν μέλλει νὰ ἐκτελέσωσι μεγαλύτερον ἔργον, ἀλλ' ἐκεῖνο τὸ ἴδιον, τὸ ὁποῖον παρέλαβον οἱ 5 ἄνθρωποι, δὲν ἐτέθη ἐν τῇ κατασρῳσί, οὐ ἔνεκα προέκυψε ψευδὲς πηλίκον 8 ἡμέραι, ἐπειδὴ τὸ μεγαλύτερον τοῦ ἔργου πρέπει νὰ εἶναι ὁμοιον· ὅτε ὁμοῦ αὐτὸς ὁ ὑποθετικὸς ὅρος δὲν εἰσῆχθη εἰς τὸν λογαριασμὸν, δὲν δύναται νὰ προκύψῃ ἀνάλογος ἀπόκρισις αὐτῆς τῆς συνθήκης. Ἐκ τούτου λοιπὸν, ἦτοι διὰ τὴν ἔλλειψιν αὐτοῦ τοῦ ὅρου, ἐτάχθησαν καὶ οἱ ὅροι ἐσφαλμένως, ἐπειδὴ 10 ἐργάζεται καὶ 5 ἐργάζεται, ὡς ἀριθμοὶ ἀνομοειδῶν μονάδων, δὲν δύναται νὰ τεθῶτιν ἀμέσως εἰς μετὰ τὸν ἕτερον· διότι ἐρωτῶν τις, πόσον χρόνον δουλεύουσι 10 ἄνθρωποι, καὶ ἐφεξῆς, τοῦτο δηλοῖ, πόσον χρόνον θέλει δουλεύσει ἕκαστος αὐτῶν τῶν 10. Ἐὰν ἡ ἐρώτησις δὲν ἀπέβλεπε κατ' ἰδίαν ἐπὶ μίαν ἐκάστην μονάδα, ἀλλ' ἐφ' ὅλας ὁμοῦ, τότε δὲν ἦτο ἀριθμητικὸν αὐτὸ τὸ πρόβλημα, ἐπειδὴ 10 ἄνθρωποι, οἵτινες δουλεύουσιν ἀνωμάλως, δύναται νὰ διαπανήσωσιν ἐπ' αὐτὸ τὸ ἴδιον ἔργον περισσότερον ἀπροσδιώριστον καιρὸν, ἢ οἱ 5 ἄνθρωποι, ἐξ ὧν εἰς ἕκαστος δουλεύει ὁμοίως καὶ ἀδιαπαύσως. Ὅθεν ἐπειδὴ ἐκ τοῦ διαστήματος τοῦ καιροῦ ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἔργου, μέλλει νὰ κρίνωμεν ἐπὶ τὸν περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ ὑποτεθῇ, ὅτι εἰς ἕκαστος ἐργάτης, ἔσωσαν πολλοὶ ἢ ὀλίγοι, μέλλει νὰ δουλεύσῃ ἐξ ἴσου καὶ ἀδιαπαύσως ἕως τῆς τελειώσεως τοῦ ἔργου. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ 10 ἐργάζεται, κατὰ τὴν πρώτην

συνθήκην, δὲν μέλλει νὰ ἐκτελέσῃσι μεγαλύτερον ἔργον, ἀλλ' ἐκεῖνο τὸ ἴδιον, τὸ ὁποῖον παρέλαβον οἱ 5 ἐργάται, ἐκ τούτου δὴλον, ὅτι εἰς ἕκαστος τῶν 10 ἐργατῶν δὲν θέλει δουλεύσει τόσον διάστημα καιροῦ, ὅσον εἰς ἕκαστος τῶν 5 ἐργατῶν, ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ ἔργον διεδόθη εἰς περισσοτέρους ἐργάτας· ἄρα οἱ ἔροι 10 καὶ 5 εἰσὶν ἀριθμοὶ ἀνομοειδῶν μονάδων, δι' ἧν αἰτίαν δὲν δύνανται νὰ τεθῶσιν ἀμέσως εἰς μετὰ τὸν ἕτερον ὡς ἀλληλένδετοι ἔροι, καθὼς ἐτάχθησαν ἐν τῇ προηγηθείσῃ κατάσρῳσι.

Ἄλλως ἔχει, ἐάν, φέρ' εἰπεῖν, ἐρωτήσῃ τις, πόσα ἐκτιμηθήσονται ὀκτ. 10, ἐάν ὀκτ. 5 τιμῶνται Γρ'. 4, ὧν ἡ κατάσρῳσις τάττεται οὕτως.

; Γρ'. . . . 10 ὀκτ.

ἐάν ὀκτ. 5 τιμῶνται 4 Γρ'.

ἡ ὁποία εἶναι κατ' ἕλα ἐντελής, ἐπειδὴ πρῶτον ἐνταῦθα δὲν ὑπάρχει οὐδεμία συνθήκη, ὅτι αἱ ὀκτ. 10 νὰ μὴ ἐκτιμηθῶσι περισσότερο τῶν 5 ὀκτῶν. Δεύτερον δὲν ἀναφέρεται μήτε τὸ, ὅτι μία ἐκάστη αὐτῶν τῶν 5 ὀκτῶν τιμᾶται Γρ'. 4, ἀλλ' ἔλαί αἱ 5 ὁμοῦ, διὸ καὶ ἡ ἐρώτησις γίνεται δι' ἕλας τὰς 10 ὀκτῶν· ἄρα ἡ κατάσρῳσις εἶναι ὀρθὴ καὶ ἐντελής, ἐξ ἧς προκύπτει καὶ ὀρθὸν πηλίκον· πλὴν οὐχ' οὕτω καὶ εἰς τοὺς ἀνθρώπους, διότι ἐκεῖ πρέπει νὰ ὑποτεθῆ, ὅτι εἰς ἕκαστος τῶν 5 ἀνθρώπων δουλεύει 4 ἡμέρας, καθὼς ἤδη ἀπεδείχθη.

Ὅθεν ἡ πρὸς λύσιν τοῦ ρηθέντος προβλήματος ἀλληλένδετος κατάσρῳσις, πόσον διάστημα καιροῦ μέλλει νὰ δουλεύσῃσι 10 ἄνθρωποι ἐφ' ἓν ἔργον, τὸ ὁποῖον δύνανται νὰ τελειώσῃσι 5 ἄνθρωποι εἰς 4 ἡμέρας, τάττεται ὡς ἀκολούθως.

; ἡμ'. δουλεύει 1 ἄνθρ. (τῶν 10)

ἐάν ἄνθρ. 10 δουλεύσῃσι τόσον, ὅσον . 5 ἄνθρ.

ἐξ ὧν ἄνθρ. 1 δουλεύει 4 ἡμέρας·

έννοείται δὲ οὕτω. Πόσας ἡμέρας θίλει δουλεύσει εἰς ἕκαστος ἄνθρωπος τῶν 10, τῶν ὁποίων τὸ ἔργον δύνανται νὰ ἐκτελέσωσι 5 ἄνθρωποι ἀπαράλλάκτως, δουλεύων εἰς ἕκαστος αὐτῶν 4 ἡμέρας. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐτάχθησαν οἱ ὄροι ἐπ' ἀκριβῆς καὶ ἀλληλενδέτως, δὲν ἀφίθη οὐδεὶς ὑποθετικὸς ὅρος ἐκτὸς τῆς κατασρώσεως, ἡ ὁποία ἀπεργαζομένη κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα, εἶπουν πολλαπλασιαζόμενοι οἱ δεξιῶς κείμενοι ὄροι μετ' ἀλλήλων, καὶ διαιρούμενον τὸ κεφάλαιον αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριστερῶς κειμένου ὄρου, προκύπτει τῷ ὄντι τὸ ὄρθον πηλίκον 2 ἡμέραι.

Τὸ ἐπόμενον κεφάλαιον περιέχει περισσότερα τοιαῦτα ὑποδείγματα.

~~~~~

## Κ Ε Φ Α'

### Περὶ τῆς ἀντιστροφῆς Μεθόδου τῶν τριῶν.

§. 315.

Καίπερ κατὰ τὴν ἐν τῷ §. 312. προηγηθεῖσαν εἰσαγωγὴν ἡ ἀντίστροφος μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι πάντῃ περιττή, καὶ δὲν ἔχει ποτὲ χώραν, μ' ὅλον τοῦτο ἄς κοινοποιήσωμεν συντόμως καὶ ἐνταῦθα τὰ οὐσιώδεις αὐτῆς, ἵνα γνωρίσῃ ἕκαστος πληρέστερον, ὅτι ὅσοι δέχονται αὐτὴν ὡς ἀναγκαίαν, προσπατοῦσι κατὰ τῶν πρώτων ἰδεῶν τῆς ἀλληλενδέτου Μεθόδου.

Ἡ ἀντίστροφος μέθοδος τῶν τριῶν θεμελιούται εἰς μόνον τὸν κανόνα, τοῦ νὰ γίνηται ἡ τῆς κατασρώσεως πράξις ἀντιστροφῶς, ἐπλονότι νὰ πολλαπλασιάζωμεν μὲ τὸν ἀριστερῶς κείμενον ὄρον, καὶ νὰ διαιρῶμεν διὰ τοῦ Ἐρωτηματικοῦ Ἀριθ-

μοῦ. Διὰ τοῦτο συνεθίζουσι, καὶ διαιροῦσιν αὐτὴν ὡς πρὸς τὴν ἐργασίαν (οὐχὲ κατὰ τὴν κατάσρωσιν, ἥτις εἰς ἀμφοτέραις τὰς πτώσεις τάττεται παρομοίως), εἰς εὐθείαν καὶ ἀντίστροφον μέθοδον. Εὐθείαν ὀνομάζουσιν αὐτὴν, ὅταν ὁ τοῦ διαιρέτου ὄρος ἐμφανισθῇ ἀριστερῶς, καὶ γίνῃ ἡ πράξις κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα· ἀντίστροφον δὲ, ὅταν πρέπη νὰ πολλαπλασιάσωμεν μετὰ τὸν ἀριστερῶς κείμενον ὄρον, καὶ νὰ διαφείσωμεν διὰ τοῦ ἐρωτηματικοῦ ἀριθμοῦ, διὰ νὰ προκύψῃ ὀρθὸν πηλίκον.

**Π. χ.** Τυπογράφος τις ἐτύπωσε ποτε οἰονδήποτε βιβλίον, τὸ ὁποῖον περιείχε σελίδας 340, ἐξ ὧν ἐκάστη περιείχε 36 σίχους· μετὰ καιρὸν ὁμως ἐτυπώθη αὐτίς τὸ αὐτὸ βιβλίον, καὶ εἰσήχθησαν ἐν ἐκάσῃ σελίδι 40 σίχοι, ἄρα πόσας σελίδας περιέχει τὸ νεοτυπωθὲν βιβλίον; Αὐτοῦ τοῦ προβλήματος ἡ κατάσρωσις τάττεται, καθὼς συνεθίζουσι κοινῶς, τοιοῦτοτρόπως·

; σελίδες ἀνὰ . . . . 40 σίχους,

εἰάν σίχοι 36 περιέχωνται εἰς μίαν σελίδα τῶν 340 σελίδων· ἡ ὁποία ἀπεργαζομένη κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα, εἴτουν πολλαπλασιαζόμενα 340 μετὰ 40, καὶ διαιρούμενον τὸ κεφάλαιον αὐτῶν διὰ τῶν 36, προκύπτει πηλίκον σελίδες  $377\frac{7}{9}$ , ὅπερ προφανῶς ψευδὲς ἐστὶ· διότι εἰσαχθέντων περισσοτέρων σίχων ἐν ἐκάσῃ σελίδι τοῦ νεοτυπωθέντος βιβλίου, ἀναγκαίως πρέπει νὰ περιέχῃ ὀλιγωτέρας σελίδας τῶν 340 τοῦ πρώτου. Ἀλλ' ὁμως, εἰάν λογαριασθῇ ἀντίστροφως, εἴτουν πολλαπλασιασθῶσι 340 μετὰ τὸν ἀριστερὸν ὄρον 36, καὶ διαιρεθῇ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν διὰ τοῦ ἐρωτηματικοῦ ἀριθμοῦ 40, τότε προκύπτει πηλίκον σελίδες 306, τὸ ὁποῖον εἶναι ὀρθόν, ἐπειδὴ 306 σελίδες ἀνὰ 40 σίχους, καὶ 340 σελίδες ἀνὰ 36 σίχους, ποιοῦσιν ἐπίσης 12240 σίχους.