ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΘΕΣΕΩΣ ΤΡΙΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

ΚΕΦ. Α'.

Περὶ τριῶν Ἀριθμῶν, εἴτουν περὶ τῆς τῶν τριῶν Μεθόδου.

§. 273.

Ἡ Μέθοδος τῶν τριῶν, ἡ ὁποία διὰ τὴν μεγάλην αὐτῆς χρῆσιν ὠνομάσθη παρὰ τῶν παλαιῶν χρυσῆ, εἶναι ὁ κανὼν καὶ ἡ βάσις ὅλης τῆς Ἀριθμητικῆς, τὴν ὁποίαν διὰ νὰ μεταχειριζώμεθα πανταχοῦ ὀρθῶς, εἶναι πάντως ἀναγκαῖον νὰ πληροφορηθῶμεν πρότερον τὰς θεμελιώδεις αὐτῆς ἰδέας, τὰς ὁποίας ἰδοὺ προλέγομεν.

Εἰς τὸν §. 29. ἐξηγήθημεν μερικῶς, τίνα ἰδέαν πρέπει νὰ ἔχῃ τις περὶ τοῦ λογαριάζειν, καὶ ἐν γένει περὶ τῆς ἀριθμητικῆς, καὶ ἐπειδὴ ἐπὶ τούτου θεμελιοῦται πᾶσα ἡ τῆς ἀριθμητικῆς ἐμπειρία, διὰ τοῦτο κρίνομεν ἀναγκαῖον, ἵνα ἐνταῦθα ὁμιλήσωμεν ἀκριβέστερον καὶ σαφέστερον περὶ τούτου.

Ὑπὸ τοῦ λογαριάζειν ἐννοοῦμεν τὸ, νὰ κρίνωμεν ἀπὸ τῆς γνώσεως Τιμῆς, Ἀξίας, ἢ ἀπὸ τοῦ Μήκους, Βάρους, Χρόνου κ. τ. λ. ἑνὸς ὁποιουδήποτε πράγματος διὰ τὴν Τιμὴν, Ἀξίαν, κ. τ. λ. περισσοτέρων ἢ ὀλιγωτέρων αὐτῶν τῶν πραγμάτων. Ἡ τέχνη λοιπὸν, ἢ ὁ τρόπος, καθ' ὃν διὰ τῆς τοιαύτης σκέψεως προκύπτει τῷ ὄντι τὸ ζητούμενον, εἶναι ἡ τέχνη τοῦ λογαριάζειν, ἤτοι ἡ ἀριθμητικὴ τέχνη. Ἐὰν τὶς ἐρωτήσῃ ἁπλῶς, φέρ' εἰπεῖν, πόσα πληρωθήσονται δι' 8 πήχαις μεταξωτόν; αὐτὸ δὲν εἶναι ἀριθμητικὸν πρόβλημα, καὶ ἑπομένως διὰ τῆς ἀριθμητικῆς τέχνης δὲν δύναται νὰ δοθῇ οὐδεμία ἀπόκρισις, ἐπειδὴ αἱ ῥηθεῖσαι 8 πῆχαι ἐνδεχόμενον νὰ ἠγοράσθησαν διὰ 12, 25 ἢ διὰ περισσότερα, ἢ ὀλιγώτερα Γρόσια ἢ Φλωρία, ἢ δι' ὅ,τι ἄλλο, καὶ δι' ὅσα. Ἐὰν ὅμως ὁρισθῇ ἡ ἀξία μιᾶς ἐξ αὐτῶν τῶν πηχῶν, φέρ' εἰπεῖν, διὰ Γρόσια 3, ἢ δι' ὅ,τι ἄλλο, τότε καὶ ἡ ἀξία τῶν 8, ἢ περισσοτέρων τοιούτων πηχῶν, δὲν εἶναι πλέον ἑκούσιος, ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ κρίνωμεν ἀκριβῶς, ὅτι τὸ κεφάλαιον αὐτῶν πρέπει νὰ φέρῃ τοσάκις 3 Γρόσια, ὅσαι πρόκεινται πῆχαι· εἴτουν 8 πῆχαι, 8κις 3 Γρόσια, 15 πῆχαι, 15κις 3 Γρόσια, καὶ ἐφεξῆς, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀριθμητικὸν πρόβλημα. Ἐὰν λοιπὸν γινώσκωμεν τὴν τέχνην τοῦ νὰ εὕρωμεν, πόσα φέρουσιν 8κις 3 Γρόσια κ. τ. λ., ἰδοὺ ἐλύθη τὸ πρόβλημα ἡμῶν διὰ τῆς ἀριθμητικῆς τέχνης.

§. 274.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων γίνεται δῆλον, ὅτι εἰς κάθε ἀριθμητικὸν πρόβλημα ἐπιζητοῦνται τοὐλάχιστον τρεῖς γνωστοὶ ἢ δοθέντες Ἀριθμοί· οἷον.

Α'. Ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις συνίσταται ἐξ ἑνὸς πράγματος, διὰ τὴν ὁλικὴν ποσότητα τῆς τιμήσεως τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ ἐρώτησις.

Β'. δὲ ὁ Φύσει καὶ ὀνομασίᾳ ὅμοιος τοῦ ἀνωτέρω, καὶ τοῦ ὁποίου ὡρίσθη ἡ ἀξία, ἵνα ἐξ αὐτῆς δυνηθῶμεν νὰ κρίνωμεν διὰ τὴν τίμησιν τοῦ πρώτου· καὶ τελευταῖον

Γ΄. Ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις φανερώνει ταύτην τὴν γνῶσιν, ἢ δοθεῖσαν ἀξίαν τοῦ δευτέρου.

Εἰς τὸ προλεχθὲν ὑπόδειγμα, ὅπου διὰ τῆς ὁρισθείσης ἀξίας μιᾶς πήχης ἀνὰ 3 Γρόσια, πρέπει νὰ λογαριάσωμεν τὴν χρηματικὴν ποσότητα τῶν πηχῶν, οἱ τρεῖς δοθέντες Ἀριθμοὶ εἰσὶν αἱ 8 πῆχαι, ἡ 1 πήχη, καὶ τὰ 3 Γρόσια, δι' ὧν αἰτίαν ὁ κανὼν, ἢ ὁ τρόπος, δι' οὗ ἐπιλύονται τὰ τοιαῦτα ἀριθμητικὰ προβλήματα, Μέθοδος τῶν τριῶν καλεῖται.

§. 275.

Διὰ τοῦτο λοιπὸν αὐτοὶ οἱ τρεῖς ἐπιζητούμενοι ἀριθμοὶ ὀνομάζονται Μέλη, ἤτοι Ὅροι τῆς Μεθόδου, οἵτινες κατὰ τὴν φύσιν των, ἵστανται εἰς τὴν ἀκόλουθον τάξιν. Ὁ ἀριθμὸς, διὰ τὴν τίμησιν τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ ἐρώτησις, καὶ ὅστις εἶναι ἡ αἰτιολογία τοῦ λογαριασμοῦ, λέγεται ἐρωτηματικὸς ἀριθμὸς, καὶ εἶναι τὸ πρῶτον Μέλος· ὁ ἀριθμὸς, ἀπὸ τῆς γνώσεως ἀξίας τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ κρίνωμεν διὰ τὴν τίμησιν τοῦ ἐρωτηματικοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι τὸ δεύτερον Μέλος· καὶ τελευταῖον ὁ ἀριθμὸς, ὅστις δεικνύει τὴν ἀξίαν αὐτοῦ τοῦ δευτέρου μέλους, εἶναι τὸ τρίτον Μέλος. Ὅθεν ἐρωτῶντες, πόσα τιμῶνται 8 πῆχαις μεταξωτὸν, ἐξ ὧν ἡ πήχη τιμᾶται διὰ 3 Γρόσια, τότε αἱ 8 πῆχαι, ὡς αἰτιολογία τοῦ προβλήματος, εἶναι ὁ ἐρωτηματικὸς ἀριθμὸς, εἴτουν τὸ πρῶτον μέλος· ἡ δὲ 1 πήχη, ἀπὸ τὴν ἀξίαν τῆς ὁποίας πρέπει νὰ κρίνωμεν διὰ τὴν τίμησιν τῶν 8 πηχῶν, εἶναι τὸ δεύτερον μέλος, καὶ τὰ 3 Γρόσια, ὡς ἡ ἀξία αὐτοῦ τοῦ δευτέρου μέλους, εἶναι τὸ τρίτον μέλος, τὸ ὁποῖον μετὰ τῶν ἀνωτέρω δύο συνιστῶσι τὴν θέσιν τοῦ προβλήματος.

§. 276.

Τὰ δύο τελευταῖα μέλη ὀνομάζονται κοινῶς Συνθήκης· μέλη, ἐπειδὴ αὐτὰ φανερώνουσι τὴν Συνθήκην, ἀπὸ τῆς ὁποίας δοθήσεται ἡ τοῦ προβλήματος ἀπόκρισις. Εἰς τὸ πρὸ ὀλίγου δοθὲν πρόβλημα, ἡ 1 πήχη, καὶ τὰ 3 Γρόσια εἰσὶ τὰ τῆς συνθήκης μέλη, ἐπειδὴ ἡ τίμησις τῶν 8 πηχῶν θέλει προκύψει μόνον ὑπὸ τῆς Συνθήκης, ὅτι ἑκάςη πήχη αὐτῶν τιμᾶται διὰ 3 Γρόσια.

§. 277.

Ἐξ ὧν ἄνωθεν εἴπομεν, δύναται ἕκαςος ἀφ' ἑαυτοῦ νὰ νοήσῃ, ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος (ἀπὸ τῆς ἀξίας τοῦ ὁποίου θέλει κρίνωμεν διὰ τὴν τίμησιν τοῦ ἐρωτηματικοῦ ἀριθμοῦ), πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεὶς καὶ ὁμώνυμος τοῦ ἐρωτηματικοῦ ἀριθμοῦ, τοῦτ' ἔςιν, ἑκάςη μονὰς τοῦ δευτέρου ὅρου πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδὴς καὶ ὁμώνυμος, καὶ νὰ χαρακτηρίζῃ, κατάτε φύσιν καὶ ὀνομασίαν τὸ αὐτὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον δεικνύει ἑκάςη μονὰς τοῦ ἐρωτηματικοῦ ἀριθμοῦ, ἐπειδὴ μεσολαβούσης τῆς ἐλαχίςης διαφορᾶς μεταξὺ τῶν ῥηθέντων εἰδῶν, δὲν δυνάμεθα νὰ κρίνωμεν ἀπὸ τῆς ἀξίας τοῦ ἑνὸς διὰ τὴν τίμησιν τοῦ ἑτέρου. Διότι ποῖος δὲν ἐννοεῖ, ὅτι ἀπὸ τῆς ἀξίας μιᾶς Ὀκάδος δὲν δύναταί τις νὰ κρίνῃ διὰ τὴν ἀξίαν μιᾶς Πήχης; Καθ' αὐτὸ καὶ ἀπὸ πήχης ἐπὶ πήχην, ἢ ἀπὸ ὀκάδος ἐπὶ ὀκάδαν δὲν δυνάμεθα νὰ κρίνωμεν, ἐὰν ὦσι διαφορετικοῦ εἴδους, εἴτουν ἀνομοίου μήκους ἢ βάρους κ. τ. λ. Π. χ. ἡ πήχη τῆς Κωνςαντινουπόλεως εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ Παρισίου, λοιπὸν ἀπὸ τῆς ἀξίας τῆς πήχης Κωνςαντινουπόλεως δὲν δυνάμεθα νὰ κρίνωμεν διὰ τὴν ἀξίαν τῆς πήχης Παρισίου· καὶ τ' ἀνάπαλιν. Ἐὰν φέρ' εἰπεῖν, θελήσωμεν νὰ λογαριάσωμεν ἀπὸ τῆς ἀξίας μιᾶς πήχης ῥούχου τὴν τίμησιν 15 πηχῶν ῥούχου, πρέπει νὰ εἶναι τόσου αἱ 15 πῆχαι τοῦ αὐτοῦ μήκους, ὅσον καὶ τὸ ἴδιον ῥοῦχον, καθὼς ἐκεῖνο τῆς 1 πήχης, ἐπειδὴ μεσολαβούσης ὁποιασδήποτε διαφορᾶς (φέρ' εἰπεῖν ἡ 1 πήχη εἶναι ῥοῦχον, καὶ αἱ 15 πῆχαι πανίου, ἢ ἐὰν ὦσιν ἀμφότερα ῥοῦχον ἢ πανίον, εἴτε ὅτι ἄλλο πρᾶγμα, καὶ ἡ 1 πήχη αὐτοῦ τοῦ πράγματος εἶναι πλατυτέρου ἢ ϛενωτέρου μήκους τῆς 1 πήχης τῶν 15 πηχῶν κ. τ. λ.) δὲν δυνάμεθα νὰ κρίνωμεν ἀπὸ τῆς ἀξίας τοῦ ἑνὸς διὰ τὴν τίμησιν τοῦ ἑτέρου (α).

§. 278.

Ὅθεν ἀφ' οὗ δοθῶσι καὶ ταχθῶσιν ὀρθῶς καὶ προσηκόντως οἱ ὅροι τοῦ ἀριθμητικοῦ προβλήματος, τότε ἐκτελεῖται ἀφ' ἑαυτῆς ἡ τοῦ λογαριασμοῦ πρᾶξις, ἐπειδὴ πολλαπλασιάζομεν τὸν πρῶτον ὅρον (δηλ. τὸν ἐρωτηματικὸν ἀριθμὸν) μὲ τὸν τρίτον ὅρον (ἤγουν μὲ τὴν ἀξίαν τοῦ δευτέρου ὅρου), καὶ διαιροῦμεν τὸ παραγόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ δευτέρου ὅρου, καὶ οὕτω προκύπτει ἡ ζητηθεῖσα τίμησις τοῦ ἐρωτηματικοῦ ἀριθμοῦ· Π. χ. μᾶς ἐδόθη νὰ λογαριάσωμεν, πόσα πληρωθήσονται διὰ 450 ὀκάδας ὁποιουδήποτε πράγματος, ἐξ ὧν 15 ὀκάδες τιμῶνται διὰ 12 Γρόσια· λοιπὸν ἐπειδὴ κατὰ τὸν §. 275. αἱ ὀκδ. 450 εἰσὶν ὁ πρῶτος, ἡ 1 πήχη ὁ δεύτερος, καὶ τὰ 12 Γρόσια ὁ τρίτος ὅρος, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰς ὀκδ. 450 μὲ τὰ 12 Γρόσια, καὶ φέρουσι Γρ'. 5400., ἅτινα διὰ τῶν 15 διαιρεθέντα, δίδουσι Γρ'. 360., εἴτουν τὴν ζητηθεῖσαν τίμησιν τῶν 450 Ὀκάδων (β).

(α) Αἱ ἀνωτέρω ἰδέαι εἰσὶ τὰ θεμέλια ὅλης τῆς ἀριθμητικῆς τέχνης, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ δόσωμεν κάθε δυνατὴν προσοχὴν, ἐπειδὴ καίτοι εἰσὶ τοσοῦτον σαφεῖς, μ' ὅλον τοῦτο εἴς τινας πτώσεις ἐνδεχόμενον νὰ σφάλῃ ὁ κάλιϛος ἀριθμητικὸς, καθὼς ἑπομένως ἀποδειχθήσεται.

(β) Καὶ ἐνταῦθα (πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως ὅμως), μεταχειριζόμεθα τότε ἐξαλείφειν καὶ σμικρύνειν, καὶ ἐν γένει, κατὰ τὰς περιϛάσεις, πᾶσαν συντομίαν· διότι ἡ Θέσις διδάσκει μόνον, μὲ ποίους ἐκ τῶν ὅρων αὐτῆς μέλλει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν· ὁ τρόπος ὅμως, καθ' ὃν δεῖ πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν, σαφηνισθήσεται ἀκολούθως κατὰ τοὺς οἰκείους κανόνας αὐτῶν τῶν ἀριθμητικῶν εἰδῶν, τὸ ὁποῖον διατηρηθήσεται καὶ εἰς ὅλας τὰς ἀκολούθους Θέσεις.

Δεῖξις. Ἐπειδὴ ἡ τοῦ ὄπισθεν προβλήματος πρᾶξις χρησιμεύει καὶ εἰς ὅλα τ' ἄλλα προβλήματα, διὰ τοῦτο μένοντες εἰς τὸ ῥηθὲν, λέγομεν. Ἡ τίμησις τῶν ὀκδ. 450 δύναται ἄνευ δυσκολίας νὰ ὁρισθῇ, ἐὰν εἶναι γνωςὴ ἡ ἀξία μιᾶς ἐξ αὐτῶν τῶν Ὀκάδων, ἡ ὁποία λαμβανομένη 450κις, εἴτουν πολλαπλασιαζόμεναι αἱ Ὀκδ. 450 μὲ τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς πήχης, δίδουσι τὸ Ζητούμενον. Λοιπὸν ἐπειδὴ ἐνταῦθα μᾶς εἶναι ἤδη γνωςὸν, ὅτι αἱ 15 πῆχαι τιμῶνται διὰ Γρ'. 12, ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς πήχης, τὴν ὁποίαν καὶ εὑρίσκομεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ Γρ'. 12 εἰς 15 ὅμοια μέρη, τοῦτ' ἔςι, διαιροῦντες διὰ τῶν 15· ἀλλ ὅμως διαιροῦντες διὰ τῶν 15 τὰ Γρ'. 12, προκύπτουσι $\frac{12}{15}$ (ὡς §. 175.), ἄρα ἡ ἀξία μιᾶς πήχης εἶναι $\frac{12}{15}$, ἤτοι $\frac{4}{5}$ Γροσίου, δηλ. 450κις $\frac{4}{5}$ Γροσίου· διὸ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ $\frac{4}{5}$ Γροσίου μὲ 450, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖται, ὡς γνωςὸν, ἀφ' οὗ πολλαπλασιασθῶσι τὰ 450 μὲ τὸν ἀριθμητὴν 4, καὶ διαιρεθῇ τὸ παραγόμενον διὰ τοῦ παρονομαςοῦ 5 (ὡς §. 227.)· ἀπαραλλάκτως κατὰ τὸν κανόνα, εἴτουν, ὁ ἐρωτηματικὸς ἀριθμὸς νὰ πολλαπλασιασθῇ μετὰ τοῦ τρίτου ὅρου, καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ δευτέρου ὅρου.

§. 279.

Διὰ νὰ ἐπιτυγχάνωμεν ὅμως εἰς τὴν λύσιν ἑκάςου ἀριθμητικοῦ προβλήματος, χωρίς τινος σκέψεως, καὶ ἄνευ δυσκολίας, τοὺς καθ' αὐτὸ ὅρους τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως, παρατηροῦμεν ἐν τῇ καταςρώσει (α) αὐτῶν τὸν κανόνα τῆς καλουμένης Ἀλύσου, κατὰ τὸν ὁποῖον οἱ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅροι (ὧν τὸ κεφάλαιον δίδουσι τὸν διαιρέ-

---

(α) Οὕτως ὀνομασθήσεται εἰς τὸ ἑξῆς ἡ Θέσις τῆς τῶν τριῶν Μεθόδου, καὶ τῆς Ἀλύσου.

την), τίθενται ἀριστερῶς, καθὼς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον ἀκριβῶς ἐξηγεῖται.

ΚΕΦ. Β'.

Κοινὸς Κανὼν περὶ τῆς καταστρώσεως καὶ πράξεως τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν, ἐν διαφόροις προβλήμασι σὺν κλάσμασι καὶ ἄνευ κλασμάτων.

§. 280.

Ἡ κατάστρωσις ἄρχεται δεξιῶς μὲ τὴν κατάθεσιν τοῦ ἐρωτηματικοῦ ἀριθμοῦ, εἶτα ἀριστερῶς (εἰς ὀλίγοντι διάστημα βαθυτέρως), τίθεται ἐκ τοῦ προβλήματος ἐκεῖνος ὁ ἀριθμὸς, ὅστις σύγκειται ἀπὸ τοιούτων ὁμοειδῶν μονάδων, ἐξ ὧν συνίσταται καὶ ὁ πρὸ ὀλίγου δεξιῶς τεθεὶς ἐρωτηματικὸς ἀριθμὸς, καὶ τελευταῖον ἡ ἀξία τοῦ ἤδη τεθέντος ὅρου, τίθεται κατ' εὐθεῖαν δεξιῶς ὑπὸ τὸν ἐρωτηματικὸν ἀριθμόν.

Π. χ. Ἐπρόβαλέ τις· πόσα πληρωθήσονται διὰ Ὀκδ. 450, ἐξ ὧν 15 τιμῶνται διὰ Γρ'.12; Ἐνταῦθα πρόδηλον ἐστιν, ὅτι αἱ ὀκδ. 450 εἶναι ὁ ἐρωτηματικὸς ἀριθμὸς, ἐπειδὴ αὗται εἶναι ἡ αἰτιολογία τοῦ προβλήματος· αἱ δ' Ὀκδ. 15 εἰσὶ καθ' ὅλα ὅμοιαι τοῦ ἐρωτηματικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ τὰ Γρ'. 12 εἶναι ἡ ἀξία τῶν 15 ὀκάδων, ὅθεν ἡ κατάστρωσις αὐτοῦ τοῦ προβλήματος τάττεται, κατὰ τὸν κανόνα, ὡς ἀκολούθως.

(α) ; Πόσα Γρόσια πληρωθήσονται διὰ 450 Ὀκδ.
ἐὰν Ὀκδ. 15 τιμῶνται διὰ . . 12 Γρόσια.

(α) Αἱ ἐν ἀρχῇ τῆς ἀνωτέρω Καταστρώσεως ἀριστερῶς ἱστάμεναι λέξεις,

§. 281.

Καταςρωθέντες λοιπὸν οἱ ὅροι κατὰ τὸν ὄπισθεν κανόνα (ὅπου μόλις δύναταί τις νὰ σφάλῃ), προκύπτουσιν οἱ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθησόμενοι ὅροι, ἄνευ παρεκτροπῆς, δεξιῶς, καὶ ὁ διαιρῶν ὅρος ἀριςερῶς, εἶτα πολλαπλασιάζονται οἱ δεξιῶς ἱςάμενοι ὅροι μετ' ἀλλήλων, τὸ δὲ κεφάλαιον αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριςερῶς κειμένου ὅρου. Ἐν τῇ προτεθήσει καταςρώσει προέκυψαν δεξιῶς 450 καὶ 12, ὧν τὸ κεφάλαιον φέρει 5400, τὸ ὁποῖον διαιρούμενον διὰ τῶν ἀριςερῶς κειμένων 15, προκύπτει τὸ ζητούμενον Γρόσια 360.

§. 282.

Ἐπειδὴ ἡ ἐξάλειψις καὶ ἐλάττωσις τῶν ἐν τῇ καταςρώσει προκυπτομένων ὅρων, προξενοῦσιν εὐκολίαν καὶ συντομίαν εἰς τὴν πρᾶξιν τῶν λογαριασμῶν, διὰ τοῦτο ἂς σημειώσωμεν καλῶς τὰ ἀκόλουθα.

Α΄. Ὅσοι ἰσάριθμοι ὅροι, εἴτουν ἀριθμοὶ, προκύψουσιν ἐν τῇ καταςρώσει δεξιῶς καὶ ἀριςερῶς, ἐξαλείφονται πρὸς ἀλλήλους ὁλοτελῶς.

Β΄. Ἐὰν εἷς τῶν δεξιῶς κειμένων ὅρων περιέχεται ἐπίσης εἰς ἕτερον κείμενον ἀριςερῶς, ἢ εἷς τῶν ἀριςερῶς κειμένων περιέχεται ἴσα εἰς ἄλλον κείμενον δεξιῶς, ἐξαλείφονται παντάπασιν οἱ περιεχόμενοι ὅροι, οἱ δὲ περιέξαντες αὐτοὺς σβένονται διὰ γραμμῆς, καὶ τίθενται ἀντ' αὐτῶν ἐκεῖνοι οἱ Ἀριθμοὶ, οἵτινες προκύπτουσιν ἐν ᾧ διαιροῦνται οἱ μεγαλήτεροι ὅροι διὰ τῶν μικροτέρων.

Πόσα Γρόσια πληρωθήσονται, φανερώνονται συντομώτερον ἁπλῶς διὰ τοῦ ἐρωτηματικοῦ σημείου, οὕτωσί. ; Γρ. ; ἐκδ. κ. τ. λ., τὸ ὁποῖον διατηρηθήσεται εἰς ἑκάςην Κατάςρωσιν, διὰ τὰς αἰτίας, ἃς ἀκολούθως θέλει φανερώσωμεν.

Γ΄. Ἐὰν εἷς τῶν δεξιῶς, καὶ ἕτερος τῶν ἀριστερῶς κειμένων ὅρων ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην, διαιρεθήτωσαν δι' αὐτοῦ ἀμφότεροι, εἶτα ἐξαλειφόμενοι διὰ γραμμῆς, ἂς τεθῇ πλησίον αὐτῶν τὸ, ὁσάκις περιέχεται ἐν αὐτοῖς ὁ κοινὸς αὐτῶν διαιρέτης.

Δ΄. Ἐὰν σὺν τοῖς ἀριθμοῖς παρευρεθῶσι δεξιῶς καὶ ἀριστερῶς 0 (μηδενικά), ἐξαλείφονται τόσα εἰς τὸ ἓν, ὅσα καὶ εἰς τὸ ἄλλο μέρος· δηλ. ἓν δεξιῶς, καὶ ἓν ἀριστερῶς, δύο, καὶ δύο, τρία, καὶ τρία, καὶ ἐφεξῆς.

Αὐτὸν τὸν τρόπον ἀκολουθοῦμεν εἰς ὅλας τὰς ἐφεξῆς καταστρώσεις, ἐπειδὴ εὐκολύνεται, καὶ συντέμνεται πολὺ ἡ πρᾶξις, ἐνίοτε δὲ συμβαίνει καὶ ἐκλείπει δι' ὅλου ὁ διαιρέτης, μένοντες μόνον οἱ τοῦ διαιρετέου ὅροι, οἱ ὁποῖοι μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιαζόμενοι, προκύπτει τὸ ζητούμενον, χωρὶς νὰ διαιρέσωμεν ποσῶς.

§. 283.

Σχόλιον. Ὅταν συμβῇ καὶ ἐκλείψει δι' ὅλου ὁ διαιρέτης, πρέπει τὰ μείνῃ ἀντ' αὐτοῦ τὸ 1, καίτοι αὐτὸ μηδὲν διαιρεῖ, ὡς πολλάκις ἐλέχθη, διότι διαιροῦντες διὰ τοῦ 1, προκύπτει διὰ πηλίκον ὁλόκληρος ὁ διαιρετέος, ἐπειδὴ ἕκαστος ἀριθμὸς περιέχει ἐν ἑαυτῷ τόσα 1, ὅσα ἐπαριθμεῖ τὸ ποσὸν αὐτοῦ· μ' ὅλον τοῦτο διὰ νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις κανονικῶς, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ εἷς διαιρέτης, ἔσω καὶ τὸ 1. Εἰς τὸ προῤῥηθὲν ὑπόδειγμα· ; Γρ΄. διὰ . . . 450 ὀκδ.

ἐὰν ὀκδ. 15 τιμῶνται διὰ 12 Γρ΄.

τὰ ἀριστερῶς κείμενα 15 διαιροῦσιν ἐπίσης τὰ δεξιῶς ἱστάμενα 450, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττώσεως ἐκλείπει ὁλοτελῶς ὁ διαιρέτης 15· ἀντ' αὐτοῦ ὅμως τίθεται τὸ 1, ὡς ἄνωθεν ἐλέχθη, καὶ μάλιστα διὰ τοῦτο, ἐπειδὴ ἕκαστος ἀριθμὸς περιέχεται ἐν ἑαυτῷ ἅπαξ (ὡς §. 250.)· εἶτα ἀντὶ τῶν 450, θέττομεν τὰ μείναντα 30, τὰ ὁποῖα μὲ τὰ 12 πολλαπλασιαζόμενα, προκύπτει τὸ ζητούμενον, χωρὶς νὰ διαιρέσωμεν τελείως, καθὼς ἡ κατωτέρω ἐλαττωθεῖσα καὶ ἀπεργασθεῖσα κατάςρωσις δεικνύει.

Ἰδοὺ ἡ Κατάςρωσις.

	$\frac{1}{2}$ Γρ΄. . . .	450 ὀκδ. 30	
1.	ἐὰν ὀκδ. 15 . . .	12 Γρ΄.	

Ποιοῦσι Γρ΄. 360.

Δεῖξις. Ἡ βάσις τῆς ἄνωθεν ἐλαττώσεως εἶναι εὐκατάληπτος, ἐξαρκεῖ νὰ ςοχασθῶμεν, ὅτι ὁ διαιρέτης καὶ διαιρετέος λογίζονται ὡς παρονομαςὴς καὶ ἀριθμητὴς κλάσματός τινος, οἵτινες, ὡς ἦν γνωςὸν, δύνανται νὰ σμικρυνθῶσι πρὸς ἀλλήλους. Ὅθεν, ἐπειδὴ οἱ δεξιῶς κείμενοι ὅροι εἰσὶν οἱ παράγοντες τοῦ ἐσομένου διαιρετέου, καὶ οἱ ἀριςερῶς κείμενοι ὅροι εἰσὶν οἱ παράγοντες τοῦ ἐσομένου διαιρέτου, διὰ τοῦτο δύνανται καὶ νὰ σμικρυνθῶσι πρὸς ἀλλήλους, καθ᾽ ὅτι εἰσὶν ἀμοιβαῖοι παράγοντες (ὡς §. 263.)

§. 284.

Σημείωσις. Κατὰ τὸν §. 278. καὶ κατὰ τὰ προλεχθέντα, ὀνομάζεται διὰ τοῦτο ἡ ἀνωτέρω κατάςρωσις Ἅλυσος, ἐπειδὴ οἱ ὅροι αὐτῆς συνέχονται, ὡς ἡ Ἅλυσος, ἀλληλενδέτως, περὶ οὗ θέλει ἐξηγηθῶμεν πληρέςερον εἰς τὰς ἐφεξῆς καταςρώσεις τῶν περισσοτέρων ὅρων· διὸ καὶ ἀναβάλλομεν τὴν ἑρμηνείαν, ἥτις ἕπεται ἐν τῷ οἰκείῳ τόπῳ.

§. 285.

Πρόβλημα. Ἐὰν πῆχαι 72 πράγματός τινος τιμῶνται διὰ Γρόσια 15, πόσα ἄρα αἱ πῆχαι 40 ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;