ΕΠΙΤΟΜΗ

Ἀριθμητικῆς

πρὸς

Παράδοσιν τῶν πρωτο-
πείρων

ὑπὸ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΣΤΑΓΕΙΡΙΤΟΥ.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ ΤΗΣ ΑΟΥΣΤΡΙΑΣ
ΕΝ ΤΗ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΩΤΟΥ.

2820.

Τοῖς ἀναγινώσκουσι.

Πᾶν τὲ πιτομον φασὶν ἀτελές· ναὶ, αὐτὸ μὲν καθ' ἑαυτὸ ἐς:ν ἀτελὲς, ἀλλ' ἐςι σύντομος ϗ ἡδεῖα πρὸς τὴν ἐντέλειαν διάβασις, κεκαθαρμένη πάντων τῶν ὀχληρῶν ϗ ἀπέχθειαν προξενούντων ἀναμασισμῶν.

Η' ἐν τοῖς δυσνοήτοις προβλήμασι ϗ ἀπεράντοις κανόσι κακῶς ἐννοουμένη ἐντέλεια, δὲν πρέπει νὰ ζητῆται εἰς τὰ βιβλία τῆς παραδόσεως· ἐπειδὴ ὁ μαθητὴς ποτὲ δὲν γίνεται ἐντελὴς παραδιδόμενος εἰς τὸ σχολεῖον, ἀλλ' ὅταν ἀσκηθῇ διὰ πράξεως ϗ μελέτης, εἰς ὅποιον μέρος τῆς μαθήσεως λάβῃ κλίσιν ἢ χρείαν.

Ὅθεν ἡ παράδοσις πρέπει νὰ γίνηται σύντομος, εὐμέθοδος, εὔληπτος ϗ ποικίλη, ἵνα ἔχωσιν καιρὸν οἱ μαθηταὶ νὰ λάβωσι πολλῶν μαθήσεων ἰδέας, ϗ εἰς ὅποιαν κλίνῃ ἕκαςος ἢ ἐκ προαιρέσεως ἢ χρείας, ἂς τὴν ἐξακολουθῇ, ϗ ἂς ζητῇ τὴν ὅσον δυνατὸν ἐντέλειαν αὐτῆς.

Ὅταν ὁ μαθητῆς παραδοθῇ ἐν ὀλίγῳ, τὴν παρῦσαν π. χ. σύντομον πραγματείαν, δὲν δυσκολεύηται ἀναμφιβόλως νὰ μελετήσῃ ἔπειτα, ἄνευ βοηθείας διδασκάλου, ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς τοῦ κόσμου, ἐκτὸς τῶν ἐπισημονικῶν· μ' ὅλον ὅτι καὶ εἰς αὐτὰς, δὲν θέλει φανῇ τόσον μεγάλη ἡ δυσκολία· τοῦτο τὸ ἐδοκίμασα ἐμπράκτως ἐν τῷ Ἑλληνικῷ σχολείῳ τῆς Πέσης, ἔνθα ἠναγκάσθην νὰ συνάψω καὶ νὰ παραδώσω αὐτὴν, ὁμοίως καὶ γραμματικὴν, ἱστορίαν καὶ Γεωγραφίαν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μετ' εὐτυχοῦς ἐκβάσεως, μὴ εὑρίσκων οὔτε τὴν ἀρχὴν οὔτε τὸ τέλος, τῶν παρ' ἡμῖν σωζομένων βιβλίων τῆς παραδόσεως.

Ἐρρώσθαι.

ΕΠΙΤΟΜΗ
Ἀριθμητικῆς.

Εἰσαγωγή.

Ἡ ἀριθμητική ἐστιν ἐπιστήμη, διδάσκουσα πῶς νὰ εὑρίσκωμεν τοὺς ἀγνώστους ἀριθμοὺς, διὰ μέσου τῶν ἐγνωσμένων.

Ὁ δὲ ἀριθμός ἐστι συνάθροισις πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων.

Μονὰς δὲ ἡ σημαίνουσα ἓν μόνον πρᾶγμα, οἷον, εἷς στρατιώτης ἐστι μία μονάς· δέκα δὲ, μία συνάθροισις δέκα μονάδων, ἡ ὁποία λέγεται ἀριθμός.

Οἱ δὲ χαρακτῆρας δι' ὧν σημειοῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰσι δέκα· οἷον, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, καὶ τὸ 0 μηδενικὸν λεγόμενον.

Ἡ δύναμις δὲ τῶν χαρακτήρων γνωρίζεται ἐκ τῆς θέσεως αὐτῶν· οἷον, 78, 672, 859, 341,

507, 345, ὁ μὲν α΄. δεξιόθεν σημαίνει τὰς μονάδας, ὁ β΄. τὰς δεκάδας, ὁ γ΄. τὰς ἑκατοντάδας· ὁ δὲ δ΄. τὰς μονάδας, ὁ ε΄, τὰς δεκάδας, ὁ ς΄. τὰς ἑκατοντάδας τῶν χιλιάδων· ὁ δὲ ζ΄. τὰς μονάδας, ὁ η΄. τὰς δεκάδας, ὁ θ΄. τὰς ἑκατοντάδας τῶν μιλιονίων· ὁ ι΄. τὰς μοναδικὰς, ὁ ια΄. τὰς δεκαδικὰς, ὁ ιβ΄. τὰς ἑκατονταδικὰς χιλιάδας τῶν μιλιονίων· ὁμοίως καὶ τῶν διλιονίων, τριλιονίων, κ. τ. λ. οἷον,

5 μονὰς,
4 δεκὰς,
3 ἑκατοντάς.
7 μονὰς χιλιάδος,
6 δεκὰς χιλιάδος,
5 ἑκατοντὰς χιλιάδος.
1 μονὰς μιλιονίου,
4 δεκὰς μιλιονίου,
3 ἑκατοντὰς μιλιονίου.
9 μονὰς χιλιάδος μιλιονίου,
8 δεκὰς χιλιάδος μιλιονίου,
7 ἑκατοντὰς χιλιάδος μιλιονίου.
2 μονὰς διλιονίου,
1 δεκὰς διλιονίου,
6 ἑκατοντὰς διλιονίου.
8 μονὰς χιλιάδος διλιονίου,
7 δεκὰς χιλιάδος μιλιονίου.

Περιέχουσι λοιπὸν οἱ προτεταγμένοι χαρακτῆρες 78 χιλιάδας καὶ 972 δισμύρια, 859 χιλιάδας καὶ 341 μυριόνια, 567 χιλιάδας καὶ 345.

Ὅθεν πρέπει νὰ τίθωνται οἱ ἀριθμοὶ κατὰ τὴν τάξιν τῆς δυνάμεως αὐτῶν· οἷον, αἱ μονάδες ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν μονάδων, αἱ δεκάδες ὑπὸ τὴν τῶν δεκάδων, αἱ χιλιάδες ὑπὸ τὴν τῶν χιλιάδων, κ. τ. λ. ἕτως

5673
2382
145
13

Ὅτε δὲ οὐκ ἔχομεν ἢ μονάδος, ἢ δεκάδος, ἢ ἑκατοντάδος, ἢ ἄλλης τάξεως ἀριθμὸν, ἀναπληροῦμεν τὸν τόπον αὐτῶν διὰ τῶν μηδενικῶν· οἷον

5473
6070
8203

Διαιρεῖται δὲ ἡ ἀριθμητικὴ εἰς τέσσαρα μέρη, εἰς σύναψιν, ἀφέρεσιν, πολλαπλασίασιν καὶ διαίρεσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ συνάψεως.

Ἡ μὲν σύναψις ἐστὶν ἀριθμῶν διδομένων ἄθροισμα, ὅπερ ἐστὶν ὁ ζητούμενος ἄγνωστος, καὶ λέγεται κεφάλαιον.

Σημεῖα δὲ, τῆς μὲν συνάψεως τὸ +, τῆς δὲ ἰσότητος τὸ =· οἷον, 5 + 3 = 8· ἤτοι 5 σὺν 3 ἴσον 8· ἢ 5 καὶ 3 γίνονται 8.

Γράφομεν ὧν τὰς διδομένας ἀριθμὰς εἰς τὴν τάξιν αὐτῶν ὅτως

Συνάπτομεν δὲ αὐτὰς ἐκ τῶν μονάδων ἀρχόμενοι

5864	διδόμενοι.
4693	
10557	κεφάλαιον.

λέγοντες, 3 + 4 = 7 γράφομεν τὸν 7 ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν μονάδων· ἔπειτα, 9 + 6 = 15· γράφομεν τὰ 5 μόνον ὑπὸ τὰς δεκάδας, τὰ δὲ 10 προσθέτομεν εἰς τὰς ἑκατοντάδας, ἐπειδὴ ἔγινεν ἑκατοντὰς, λέγοντες, 6 + 8 = 14 καὶ ἡ ἀνὰ χεῖρας μονὰς = 15. γράφομεν πάλιν τὰ 5 ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδως, τὰ δὲ δέκα προσθέτομεν εἰς τὰς χιλιάδας, λέγοντες, 4 + 5 = 9 καὶ ἡ ἀνὰ χεῖρας, = 10· γράφομεν ὧν τὸν 10 εἰς τὴν τάξιν αὐτῶ.

Ἐνταῦθα λέγομεν 4 + 5 = 9· ἐπειδὴ τὰ μειδενικὰ πανταχῦ μένουσιν ἄφωνα· ἔπειτα, 9 καὶ 2, γίνονται 11, καὶ 5, 16, καὶ 8, 24· γράφομεν τὰ 4· τὰς

6785
850
3420
7894
18949

δὲ δύο δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὰς ἑκατοντάδας, ὡς εἴρηται· ἕτως συνάπτομεν καὶ τὰς λοιπάς.

Τῶν δὲ ἑτεροειδῶν ἡ σύναψις γίνεται ἕτως· τάττομεν τὰς ἀριθμὰς εἰς τὴν τάξιν αὐτῶν οἷον,

φιορι.	κραι.	ἡμεραι.	ὧραι.	λεπ.
15	40	26	12	25
27	30	33	16	43
43	10	60	5	8

Εἰς μὲν τὰ φιορίνια, ἐπειδὴ ἓν φιορίνιον περιέχει 60 κραϊτζάρια, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν κραϊτζαρίων ὑπερέβη τὰ 60, γράφομεν μόνον τὰ περιττὰ εἰς τὴν ταξιν τῶν κραϊτζαρίων, τὰ δὲ 60, τὰ ὁποῖα εἶναι ἓν φιορίνιον, προσθέτομεν εἰς τὰ φιορίνια· καθὼς τὰ 3 καὶ 4 γίνονται 7· γράφομεν μόνον τὸ 1, τὰ δὲ 60, εἰς τὰ φιορίνια.

Εἰς δὲ τὰς ἡμέρας, ἐπειδὴ ἡ ἡμέρα περιέχει 24 ὥρας, ἡ δὲ ὥρα 60 λεπτὰ, καὶ ἐπειδὴ τὰ 25 καὶ 43 γίνονται 68, γράφομεν μόνον τὰ 8 εἰς τὰ λεπτὰ, τὰς δὲ 60, τὰ ὁποῖα εἶναι μιὰ ὥρα, προσθέτομεν εἰς τὰς ὥρας· αἱ δὲ ὧραι, ἐπειδὴ 16 καὶ 12 γίνονται 28, γράφομεν μόνον τὰς 4 εἰς τὰς ὥρας· τὰς δὲ 24, αἱ ὁποῖαι εἶναι μία ἡμέρα, προσθέτομεν εἰς τὰς ἡμέρας· ἕτω ποιοῦμεν καὶ ἐπὶ παντὸς εἴδους ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν, γνωρίζοντες τὰς συγατικὰς μονάδας αὐτῶν.

Περὶ ἀφαιρέσεως.

Ἡ δὲ ἀφαίρεσις εἶναι ὁ τρόπος τοῦ εὑρίσκειν τὴν μεταξὺ δύο ἀνίσων ἀριθμῶν διαφοράν· ὧν ὁ μὲν μεγαλήτερος λέγεται ἀφαιρετέος, ὁ δὲ μικρότερος ἀφαιρούμενος, ὁ δὲ ζητούμενος, ἄγνωστος, διαφορά.

Σημεῖον δὲ τῆς ἀφαιρέσεως τὸ — · οἷον, 8 — 3 = 5. ἤτοι, 8 ἐκτὸς 3 ἴσον 5.

Τάττομεν οὖν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς οὕτως, εἶτα ἀφαιροῦμεν τὸν 2 ἀπὸ τοῦ 4 λέγοντες, 4 — 2 = 2· γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν τὸν 2· ἔπειτα, 2 — 1 = 1· καὶ 7 — 3 = 4, καὶ 6 — 2 = 4· γράφομεν ὅλους εἰς τὴν τάξιν αὐτῶν.

6724	ἀφαιρετέος.
2312	ἀφαιρούμενος.
4412	ἡ διαφορά.

Ἐνταῦθα δὲ, ἐπειδὴ ὁ 4 εἶναι μεγαλήτερος τοῦ 3, λαμβάνομεν μιὰν δεκάδα ἐκ τῆς τάξεως τῶν δεκάδων, οἷον, ἐκ τοῦ 4, καὶ σημειοῦμεν ἐκεῖ μίαν στιγμὴν, ἵνα ἐνθυμώμεθα ὅτι ὁ 4 ἔμεινε 3· τὴν δὲ ληφθεῖσαν δεκάδα προσθέτομεν εἰς τὸν 3 καὶ γίνεται 13· καὶ οὕτως ἀφαιροῦμεν τὸν 4 ἀπὸ τοῦ 13· τὰ αὐτὰ ποιοῦμεν καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

26543
23624
2919

Ἡ τῶν τοιούτων ἀφαίρεσις γίνεται εὐκολωτέρως, ἐὰν προσθέτωμεν μίαν δεκάδα, εἰς τὸν ἀφαιρετέον, ὅταν εἶναι μικρότερος τοῦ ἀφαιρουμένου, χωρὶς νὰ τὴν λάβωμεν παρ' ἄλλου, ἤτε νὰ σίζωμεν, καὶ νὰ συγχίζωμεν τὸν πλησίον· ἔπειτα νὰ προσθέτωμεν μίαν μονάδα εἰς τὸν ἑπόμενον ἀφαιρουμένον· οἷον, προσθέτο-

μεν εἰς τὸν 3 μίαν δεκάδα, ϗ γίνεται 13· ἀφαιρῦμεν ὖν τὸν 4 ἀπὸ τῦ 13 ἔπειτα προϑέτομεν εἰς τὸν ἑπόμενον 2 μίαν μονάδα, ϗ γίνεται 3· εἶτα ἀφαιρῦμεν τὸν 3 ἀπὸ τῦ 4· ϗ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως.

Ἐνταῦϑα δὲ, ἐπειδὴ οἱ ἀριϑμοὶ δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεϑῶσιν ἀπὸ τῶν μηδενικῶν, ποιῦμεν τὰ μηδενικὰ δεκάδας, προσϑέτοντες εἰς τὺς ἑπομένυς ἀφαιρυμένυς μίαν μονάδα, ὡς εἴρηται.

40007
12246
27661

Ἐνταῦϑα δὲ ἐπειδὴ τὰ μηδενικὰ εἰσιν ἄφωνα, γράφομεν τὺς ἀριϑμὺς τῦ ἀφαιρετέυ, ὁλοκλήρυς ὑπὸ τὰ μηδενικὰ τῦ ἀφαιρυμένυ.

56843
40000
16843

φιορι.	κραϊτ.	ἡμέραι.	ὧραι.	λεπτά.
32	53	27·	12·	35
21	32	16	15	43
11	21	10	20	52

Ἐπειδὴ τὰ 43 λεπτὰ εἶναι περισσότερα τῶν 35, λαμβάνομεν μίαν ὥραν ἐκ τῶν 12 ϗ τὴν ἀναλύομεν εἰς 60 λεπτά· τὰ ὁποῖα προϑέτομεν εἰς τὰ 35 ϗ γίνονται 95· ἔπειτα ἀφαιρῦμεν τὸν 43 ἀπὸ τῦ 95· ὁμοίως εἰς τὰς 11 ὥρας προϑέτομεν μίαν ἡμέραν ἀναλυομένην εἰς 24 ὥρας, λαμβάνοντες αὐτὴν ἀπὸ τὰς ἡμέρας.

Ταῦτα δὲ δυνάμεθα νὰ τὰ διατάξωμεν ᾧ ἔτως,

ἡμερ.	ὧραι.	λεπτ.
23	35	95
16	15	43
10	20	52

Ἡ δὲ δοκιμὴ, τῆς μὲν συνάψεως ἀκριβὴς ἡ κατὰ ἀνάπαλιν ἐπανάληψις· ἐπειδὴ ἡ διὰ τῆς ἀποβολῆς τοῦ 9 γίνεται πολλάκις ἐπισφαλής.

Τῆς δ' ἀφαιρέσεως γίνεται διὰ τῆς συνάψεως τοῦ ἀφαιρουμένου μετὰ τῆς διαφορᾶς, ᾧ ἐὰν προκύψῃ ὁ ἀφαιρετέος, ὀρθῶς ἔγινεν ἡ πρᾶξις.

26543
23624
2919
26543

Περὶ πολλαπλασιάσεως.

Ἡ δὲ πολλαπλασίασις ἐστὶ τρόπος σύντομος τῆς συνάψεως· ἐπειδὴ ὁ 4 πολλαπλασιαζόμενος διὰ τοῦ 5, παράγει τὸν 20· ἐὰν ὅμως γράψωμεν τὸν 5 τετράκις, ἢ τὸν 4 πεντάκις, ᾧ συνάψομεν αὐτοὺς, ἕκαστος παράγει τὸν 20· ᾧ ὁ μὲν μεγαλήτερος λέγετε πολλαπλασιαστέος, ὁ δὲ μικρότερος πολλαπλασιαστής.

Σημεῖον δὲ τῆς πολλαπλάσεως τὸ χ, ἢ τὸ . οἷον ὁ 5 . 4 = 20· ἤτοι, ὁ 5 πολλαπλασιαζόμενος διὰ τοῦ 4 ἴσον 20.

Πρέπει ὅμως νὰ μάθωμεν τὸν παρόντα πίνακα, ὁ ὁποῖος εἶναι ἀναγκαῖος εἰς τὰς πράξεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

1	1	1
2	2	4
2	3	6
2	4	8
2	5	10
2	6	12
2	7	14
2	8	16
2	9	18
2	10	20
3	3	9
3	4	12
3	5	15
3	6	18
3	7	21
3	8	24
3	9	27
3	10	30
4	4	16
4	5	20
4	6	24
4	7	28
4	8	32
4	9	36
4	10	40

5	5	25
5	6	30
5	7	35
5	8	40
5	9	45
5	10	50
6	6	36
6	7	42
6	8	48
6	9	54
6	10	60
7	7	49
7	8	56
7	9	63
7	10	70
8	8	64
8	9	72
8	10	80
9	9	81
9	10	90
10	10	100
10	100	1000

Τάττομεν δὲ, τὸν μὲν πολλαπλασιαςέον ἄνωθεν, τὸν δὲ πολλαπλασιαςὴν ὑπ' αὐτὸν δεξιόθεν ἀρχόμενοι, ὅτως;

Εἶτα πολλαπλασιάζομεν τὸν 3 διὰ τȣ̃ 3 λέγοντες, 3 . 3 = 9· γράφομεν αὐτὸν ὑπὸ τὰς μονάδας· ἔπειτα τὸν 2 διὰ τȣ̃ 3· οἷον, 3 . 2 = 6 γράφομεν ȣ̃ αὐτὸν ὑπὸ τὰς δεκάδας· εἶτα τὸν 1 διὰ τȣ̃ 3, ȣ̃ μένει πάλιν 3· ἐπειδὴ ἡ μονὰς ὅτε πολλαπλασιάζει, ὅτε διαιρεῖ, ὅτε ἄλλην τινὰ μεταβολὴν ποιεῖ.

123	πολλαπλασιαςέος.
3	πολλαπλασιαςής.
369	γινόμενον.

Ὅταν δὲ ὁ πολλαπλασιαςὴς ἔχῃ δύο, ἢ τρεῖς, ἢ περισσοτέρȣς ἀριθμȣ̀ς, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ὅλȣς τȣ̀ς ἀριθμȣ̀ς τȣ̃ πολλαπλασιαςέȣ, διὰ τȣ̃ πρώτȣ ἀριθμȣ̃ τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃· οἷον τὸν 7 διὰ τȣ̃ 4· λέγοντες, 7 . 4 = 28· γράφομεν μόνον τὸν 8 ὑπὸ τὰς μονάδας, τὰς δὲ δύο δεκάδας, προσθέτομεν εἰς τὰς δεκάδας· οἷον, 3 . 4 = 12, ȣ̃ 2 = 14· γράφομεν τὰ 4 ὑπὸ τὰς δεκάδας· τὴν δὲ ἑκατοντάδα προσθέτομεν εἰς τὰς ἑκατοντάδας· ὅτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

	5837	56783
	24	235
	23348	283915
	11674	170349
	140088	113566
		13344005

Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν διὰ τȣ̃ δευτέρȣ ἀριθμȣ̃ τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃, ὅλον τὸν πολλαπλασιαςέον· οἷον, διὰ τȣ̃ 2· ȣ̃ γράφομεν τὸ γινόμενον

ὑπὸ τὸ γινόμενον τῦ πρώτυ, ἀφήνοντες δεξιόθεν ἕνα ἀριθμόν· οἷον, γράφομεν τὰς μονάδας τῦ δευτέρυ, ὑπὸ τὰς δεκάδας τῦ πρώτυ γινομένυ· κ. τ. λ.

Ὅταν δὲ ὁ πολλαπλασιαςέος ἔχῃ πρὸς τὸ τέλος μηδενικά, (ἐπειδὴ ἂν τύχωσι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν ἡ πράξις γίνεται ὡς εἴρηται) πολλαπλασιάζομεν μόνον τὺς ἀριθμὺς, τὰ δὲ μηδενικὰ γράφομεν ἔμπροσθεν τῦ γινομένυ· οἷον,

342000	7600	687000
3	23	345
1026...	228	3435
	152	2748
	1748..	2061
		237015...

Ὅταν δὲ ἔχῃ ϗ ὁ πολλαπλασιαςέος ϗ ὁ πολλαπλασιαςὴς μηδενικὰ, ὁμοίως πολλαπλασιάζομεν μόνον τὺς ἀριθμὺς, τὰ δὲ μηδενικὰ ϗ τῦ πολλαπλασιαςέυ ϗ τῦ πολλαπλασιαςῦ, γράφομεν ἔμπροσθεν τῦ γινομένυ· οἷον,

2600	254000	345000
10	200	23000
26...	508.....	1035
		690
		7935.....

Τῶν δὲ ἑτεροειδῶν ἡ πολλαπλασίασις γίνεται ἅτως·

χρόνοι	μῆνες	εὐδομ.	ἡμερ.
450	8	16	6
1350	24	48	3 πολλαπλασιασ.
3	12	2	7 | 18 | 2
1353	12 | 36 | 3	4 | 50 | 12	14
	36	4	4
		10	
		8	
		2	

Ὁ πολλαπλασιασὴς τίθεται ὑπὸ τὸν μικρότερον ἀριθμὸν, οἷον, ὑπὸ τὰς ἡμέρας· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς ἡμέρας, καὶ προκύπτει ὁ 18· τὸν ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 7, ἤτοι, διὰ τῶν 7 ἡμερῶν τῆς εὐδομάδος, αἱ ὁποῖαι εἶναι μία εὐδομὰς, καὶ προκύπτει πηλίκον ὁ 2 καὶ λοιπὸν ὁ 4.

Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰς εὐδομάδας, καὶ προκύπτει γινόμενον ὁ 48, προσθέτομεν καὶ τὰς 2 εὐδομάδας, τὸ πηλίκον τῶν ἡμερῶν, καὶ γίνονται 50· τὸν ὁποῖον διαιροῦμεν, διὰ τοῦ 4, τουτέστιν, διὰ τῶν 4 εὐδομάδων τοῦ μηνὸς, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἕνας μῆνας, καὶ προκύπτει πηλίκον ὁ 12, καὶ λοιπὸν ὁ 2.

Μετὰ ταῦτα τοὺς μῆνας, καὶ προκύπτει ὁ 24, προσθέτομεν καὶ τοὺς 12 τὸ πηλίκον τῶν εὐδομάδων, καὶ γίνονται 36· τὸν ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 12, οἷον, διὰ τῶν 12 μηνῶν τοῦ χρόνου, καὶ προκύπτει πηλίκον ὁ 3 καὶ λοιπὸν μηδέν.

Ἔπειτα τὺς χρόνυς, ϗ προκύπτει ὁ 1350, προσθέτομεν ϗ τὸν 3 τὸ πηλίκον τῶν μηνῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι 3 χρόνοι, ϗ γίνονται 1353 χρόνοι, 2 εὐδομάδες, ϗ 4 ἡμέραι· τὰ αὐτὰ ποιῆμεν ϗ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἑτεροειδῶν.

Περὶ διαιρέσεως.

Διαίρεσις δέ ἐςιν, εὑρεῖν πισάκις εἷς ἀριθμὸς ἐμπεριέχεται εἰς τὸν ἄλλον· ϗ ὁ μὲν μεγαλήτερος, λέγεται διαιρετέος, ὁ δὲ μικρότερος, διαιρέτης· τὸ δὲ προκύπτον λέγεται πηλίκον.

Σημεῖον δὲ τῆς διαιρέσεως τὸ : οἷον, ὁ 12 διαιρούμενος διὰ τοῦ 3, γράφεται ὅτως, 12 : 3 = 4.

Γράφομεν δὲ πρῶτον τὸν διαιρετέον, ἔπειτα περικλείομεν αὐτὸν διὰ δύο γραμμῶν ὀρθῶν· ϗ ἔξω τῶν γραμμῶν ἀριςερὰ μὲν γράφομεν τὸν διαιρέτην, δεξιὰ δὲ τὸ πηλίκον, οἷον,

διαιρετέος

διαιρέ. 2 | 694 | 347 πηλίκον.
| 6 |

9
8
14
14
0

Ἔπειτα ἀριςερόθεν ἀρχόμενοι, διαιροῦμεν τὸν 6 διὰ τοῦ 2 καὶ προκύπτει ὁ 3· γράφομεν πηλίκον τὸν 3· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν διὰ τοῦ διαιρέτου, ἤτοι τοῦ 2, ϗ γίνεται ὁ 6·

γράφομεν αὐτὸν ὑπὸ τοῦ διαιρεθέντος 6, καὶ τὸν ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ· καὶ ἐπειδὴ ὁ 6 ἀπὸ τοῦ 6 ἀφαιρούμενος δὲν δίδει λοιπὸν, καταβιβάζομεν τὸν 9, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸν, καὶ προκύπτει πηλίκον ὁ 4· γράφομεν τὸν 4 πηλίκον, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν διὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ γίνεται ὁ 8· γράφομεν τὸν 8 ὑπὸ τὸν 9, ἔπειτα ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἀπὸ τοῦ 9 καὶ μένει 1· καταβιβάζομεν ἔπειτα καὶ τὸν 4 καὶ γίνονται 14, διαιροῦμεν καὶ αὐτὸν, καὶ προκύπτει ο 7· γράφομεν καὶ αὐτὸν εἰς τὸ πηλίκον· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν διὰ τοῦ διαιρετέου καὶ γίνεται ὁ 14· γράφομεν αὐτὸν ὑπὸ τὸν διαιρεθέντα 14, καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ, καὶ μένει λοιπὸν οὐδέν.

24	56·846	$236\frac{14}{24}$
	48	
	88	
	72	
	164	
	144	
	206	
	192	
	14	

214	898·8	42
	856	
	428	
	428	
	0	

Ὅταν δὲ ἔχῃ ὁ διαιρέτης δύο ἢ τρεῖς, ἢ καὶ περισσοτέρους ἀριθμοὺς, τόσους λαμβάνομεν καὶ ἐκ τοῦ διαιρετέου καὶ διαιροῦμεν, ὡς ἀνωτέρω φαίνεται· οἷον, διὰ τοῦ 24 διηρέσαμεν τὸν 56, ἐξ οὗ πηλίκον, ἰδ' 2· ἐ-

πολλαπλασιάσαμεν ἔπειτα τὸν διαιρέτην διὰ τοῦ πηλίκου καὶ ἔγινεν ὁ 48· ἀφηρέσαμεν αὐτὸν ἀπὸ τοῦ 56 καὶ ἔμεινε λοιπὸν ὁ 8· καταβιβάζομεν ἔπειτα καὶ τοὺς λοιποὺς διαδοχικῶς, καὶ διαιροῦμεν αὐτοὺς, ὡς εἴρηται· ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ τέλος μένει λοιπὸν ὁ 14, γράφομεν μίαν πλαγίαν γραμμὴν ἔμπροσθεν τοῦ πηλίκου, καὶ γράφομεν τὸν διαιρέτην ἄνωθεν, τὸ δὲ λοιπὸν κάτωθεν τῆς γραμμῆς· τὸ ὁποῖον λέγεται κλάσμα· περὶ οὗ ἐροῦμεν ἐν τῷ οἰκείῳ τόπῳ.

Ὅτε δὲ οἱ ἀριθμοὶ τοῦ διαιρετέου, π. χ. οἱ τρεῖς, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ διαιρέσωμεν, ὅταν ἔχῃ καὶ ὁ διαιρέτης τρεῖς, τύχωσι μικρότεροι τοῦ διαιρέτου,

125	1032·84 1000 328 250 784 750 34	826 $\frac{34}{125}$

λαμβάνομεν τέσσαρας, ὡς ἐνταῦθα φαίνεται· οἷον, διὰ τοῦ 125, διηρέσαμεν τὸν 1032.

Τῶν δὲ ἑτεροειδῶν ἡ διαίρεσις γίνεται οὕτως·

ἡμέραι,			ὧραι,			λεπτα.			διαιρούμενα διὰ
4	16 16 0	4	4	20 20 0	5	4	48 4 8 8 0	12	τοῦ 4 προκύπτει πηλίκον 4 ἡμέραι, 5 ὧραι καὶ 12 λεπτά.

Δοκιμάζομεν δὲ, τὴν μὲν, πολλαπλασιάσιν διαι-

ρῶντες τὸ γινόμενον διὰ τῆ πολλαπλασιαςῆ, ϗ προκύπτει ὁ πολλαπλασιαςέος.

Τὴν δὲ διαίρεσιν, πολλαπλασιάζοντες τὸ πηλίκον διὰ τῆ διαιρέτυ, ϗ προκύπτει ὁ διαιρετέος· οἷον,

358	25	89·50	358
25		75	
1790		145	
716		125	
8950		200	
		200	
		0	

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ κλασμάτων.

Κλάσματα λέγονται τὰ μέρη τῆς μονάδος· π. χ., ἐὰν διαιρέσωμεν ἓν φιορίνιον, τὸ ὁποῖον εἶναι μία μονὰς, εἰς 12, ἢ εἰς 10, ἢ εἰς ὅσα μέρη θέλομεν, ταῦτα λέγονται κλάσματα.

Γράφονται δὲ τὰ κλάσματα ὅτως· $\frac{2}{12}$, ϗ ὁ μὲν κάτωθεν τῆς γραμμῆς ἀριθμὸς ὀνομάζεται παρονομαςὴς, ἐπειδὴ ὀνομάζει τὰ μέρη εἰς πόσα διηρέθη ἡ μονάς· ὁ δ' ἄνωθεν, ἀριθμητὴς, ἐπειδὴ ἀριθμεῖ τὰ μέρη πόσα λαμβάνομεν· π. χ. ἐὰν διαιρέσωμεν ἓν φιορίνιον εἰς 2 μέρη, ϗ λάβωμεν μόνον τὸ ἓν μέρος, γράφομεν ὅτως $\frac{1}{2}$ λέγοντες ὅτι ἐλάβομεν ἓν δεύτερον, ἢ τὸ ἥμισυ· ἐὰν δὲ εἰς 3 ϗ λάβωμεν τὰ

ω, ὅτως $\frac{2}{3}$· οἷον, δύο τρίτα· ὅτω ϗ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{8}$ κ. λ. οἷον, τρία τέταρτα, πέντε ἕκτα, ἑπτὰ ὄγδοα.

Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς ϗ ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἴσοι, τότε τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα· π. χ. τὸ φιορίνιον περιέχει 60 κραϊτζάρια, ἐὰν διαιρεθῇ εἰς 12 μέρη, ἕκαστον μέρος περιέχει 5, ϗ λάβωμεν $\frac{12}{12}$, ἤτοι δώδεκα δωδέκατα, λαμβάνομεν 60 κραϊτζάρια, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μὲ τὴν μονάδα.

Ὅταν δὲ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλήτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τότε τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τῆς μονάδος· οἷον, ἐὰν λάβωμεν $\frac{12}{12}$ λαμβάνομεν 70 κραϊτζάρια.

Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσα μέρη τῆς μονάδος περιέχει τὸ κλάσμα, οἷον, τὸ $\frac{3}{4}$· πολλαπλασιάζομεν τὰ μέρη τῆς μονάδος, π. χ. τὰ 60, ἐὰν εἶναι ἡ μονὰς φιορίνιον, διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ προκύπτει ὁ 180· ἔπειτα διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ προκύπτει ὁ 45· ἐπειδὴ ἡ μονὰς διηρέθη εἰς 4 μέρη, ἕκαστον μέρος περιέχει 15· ἄρα, 3 . 15 = 45.

Ὅταν δὲ τὸ κλάσμα εἶναι μικτὸν, οἷον, ὅταν ἔχῃ ϗ ὁλοχερῆ ἀριθμὸν, ὡς, $2\frac{3}{4}$, ϗ θέλωμεν νὰ τὸ ἀναλύσωμεν εἰς κλάσμα καθαρὸν, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὴν δύναμιν αὐτοῦ, πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ὁλοχεροῦς, ϗ προκύπτει ὁ 8· ἔπειτα προσθέτομεν εἰς τὸν 8· τὸν ἀριθμητὴν,

καὶ γίνεται 11· εἶτα γράφομεν τὸν 11 ἀριθμητὴν, ἔχοντες τὸν 4 πάλιν παρονομαστὴν, οὕτως, $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$.

Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ ἀναλύσωμεν εἰς κλάσμα ἀριθμὸν ὁλοχερῆ, γράφομεν αὐτὸν ὡς ἀριθμητὴν ἔχοντες τὴν μονάδα παρονομαστὴν, οἷον, $\frac{6}{1}$· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν, αὐτοῦς δὶ ὅτινος ἀριθμοῦ θέλομεν, π. χ. διὰ τοῦ 5· καὶ προκύπτει τὸ $\frac{30}{5} = 6$.

Ὅθεν ὅταν θέλωμεν νὰ ἀναλύσωμεν τινὰ ἀριθμὸν εἰς πολλὰ μέρη, π. χ. τὸν 6 εἰς 60 μέρη, γράφομεν αὐτὸν οὕτως, $\frac{6}{1}$· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτοῦς διὰ τοῦ 60, καὶ προκύπτει ὁ $\frac{360}{60} = 6$.

Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ φέρωμεν τὸ κλάσμα εἰς ὁλοχερῆ ἀριθμὸν, οἷον, τὸ $\frac{360}{60}$· διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ προκύπτει ὁ 6. $= \frac{360}{60}$.

Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ φέρωμεν πολλὰ κλάσμα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὴν δύναμιν αὐτῶν, οἷον, τὰ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ πολλαπλασιαστὴν ἑκάστου κλάσματος, διὰ τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων· π. χ. πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ α. κλάσματος, διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ β', οἷον, τὸν 1 διὰ τοῦ 3· τὸν δὲ 3 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ γ', ἤτοι, διὰ τοῦ 5 καὶ προκύπτει ὁ 15 ἀριθμητὴς τοῦ α.

Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ α, διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ β', οἷον, τὸν 2 διὰ τοῦ 3 καὶ προκύπτει ὁ 6, τὸν δὲ 6 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ

γ', ἤτοι τȣ͂ 5 ϗ προκύπτει ὁ 30 παρονομαϛὴς τȣ͂ ά. οἷον, τȣ͂ $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$· τὰ αὐτὰ ποιȣ͂μεν ϗ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δύο, ϗ γίνονται $\frac{15}{30}$ $\frac{20}{30}$ $\frac{18}{30} = \frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$.

Περὶ συνάψεως κλάσματων.

Πρῶτον φέρομεν αὐτὰ εἰς τȣ̀ς αὐτȣ̀ς παρονομαϛὰς, ἔπειτα συνάπτομεν ὅλȣς τȣ̀ς ἀριθμητὰς εἰς ἓν κεφάλαιον, ϗ γράφομεν αὐτὸ ἀριθμητὴν, παρονομαϛὴν δὲ, μόνον τȣ͂ ἑνὸς κλάσματος· οἷον, τὰ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{2}$ $= \frac{20}{30}$ $\frac{24}{30}$ $\frac{15}{30}$ εἰς τȣ̀ς αὐτȣ̀ς παρονομαϛάς· ταῦτα συναφθέντα γίνονται $\frac{59}{30}$.

Ἐὰν δὲ τύχωσι μικτὰ, οἷον, $3\frac{2}{3}$ $4\frac{4}{5}$, πρῶτον ἀναλύωμεν αὐτὰ εἰς καθαρὰ, οἷον, εἰς τὰ $\frac{11}{3}$ $\frac{23}{5}$· ἔπειτα εἰς τȣ̀ς αὐτȣ̀ς παρονομαϛὰς, οἷον $\frac{55}{15}$ $\frac{69}{15}$· εἶτα, τὰ συνάπτομεν ϗ γίνονται $\frac{124}{15}$.

Περὶ ἀφαιρέσεως.

Πρῶτον φέρομεν αὐτὰ εἰς τȣ̀ς αὐτȣ̀ς παρονομαϛὰς, οἷον, τὰ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{4}$ εἰς $\frac{4}{12}$ $\frac{9}{12}$· ἔπειτα ἀφαιρȣ͂μεν τὸν μικρότερον ἀριθμητὴν ἀπὸ τȣ͂ μεγαλητέρȣ· οἷον, τὸν 4 ἀπὸ τȣ͂ 9, ϗ μένει $\frac{5}{12}$ ἔχοντες παρονομαϛὴν τȣ͂ ἑνὸς κλάσματος μόνον.

Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ὁλοχερȣ͂ς ἀριθμȣ͂, οἷον, τὸ $\frac{3}{4}$ ἀπὸ τȣ͂ 3, φέρομεν πρῶτον εἰς κλάσμα τὸν ὁλοχερῆ· $\frac{3}{1}$ $\frac{3}{4}$· ἔπειτα εἰς τȣ̀ς αὐτȣ̀ς παρονομαϛάς· οἷον, $\frac{12}{4}$ $\frac{3}{4}$· ἔπειτα ἀφαιρȣ͂μεν τὸν 3 ἀπὸ τὸν 12, ϗ μένει ὁ $\frac{9}{4}$.

Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν κλάσμα ἀπὸ μικτῦ, οἷον, $3\frac{2}{3}$ $5\frac{4}{5}$ ἀναλύομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς κλασματα καθαρά· οἷον, εἰς τὰ $\frac{11}{3}$ $\frac{29}{5}$· ἔπειτα εἰς τὺς αὐτὺς παρονομαςὰς, οἷον, $\frac{55}{15}$ $\frac{87}{15}$· εἶτα ἀφαιρῦμεν τὸν 55 ἀπὸ τῦ 87 ϗ μένει $\frac{32}{15}$.

Περὶ πολλαπλασιάσεως.

Πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τῶν ἀριθμητῶν, ἐὰν εἶναι πολλὰ τὰ κλάσματα, ϗ τὸν παρονομαςὴν διὰ τῶν παρονομαςῶν, καὶ τὸ ἐκ τῶν ἀριθμητῶν γενόμενον εἶναι ὁ ἀριθμητὴς, ἐκ δὲ τῶν παρονομαςῶν, ὁ παρονομαςὴς· οἷον, $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{12}{20}$ ϗ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{7} = \frac{24}{140}$.

Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ὁλοχερῆ μετὰ κλάσματος, οἷον, τὸν 4 διὰ τῦ $\frac{2}{4}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὁλοχερῆ διὰ τῦ ἀριθμητῦ τῦ κλασματος, ἔχοντες πάλιν τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν· ϗ γίνεται $\frac{8}{4}$.

Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν κλάσμα διὰ μικτῦ, οἷον, τὸ $5\frac{1}{2}$ διὰ τῦ $2\frac{2}{3}$, μεταφέρομεν αὐτὰ εἰς κλάσματα καθαρά· οἷον, εἰς τὰ $\frac{11}{2}$ $\frac{8}{3}$· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τῦ ἀριθμητῦ, ϗ τὸν παρονομαςὴν διὰ τῦ παρονομαςῦ, ϗ γίνεται τὸ $\frac{88}{6}$.

Περὶ διαιρέσεως.

Ὅταν θέλωμεν νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ

κλάσματος, οἷον, τὸ $\frac{4}{5}$ διὰ τοῦ $\frac{2}{3}$, ἀναστρέφομεν τὸν διαιρέτην, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμητὴς παρονομαστὴς, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀριθμητής· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν δὶ αὐτοῦ τὸν διαιρετέον· $\frac{8}{2} : \frac{2}{3} = \frac{24}{12}$.

Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δὶ ἀριθμοῦ ὁλοχεροῦς, οἷον, $\frac{2}{5}$ διὰ τοῦ 4· πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, διὰ τοῦ ὁλοχεροῦς, ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν πάλιον· οἷον $\frac{2}{12}$.

Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα μικτὸν διὰ μικτοῦ, οἷον, τὰ $4\frac{2}{7}$ διὰ τοῦ $3\frac{2}{4}$· μεταφέρομεν αὐτὰ εἰς κλάσματα καθαρά· οἷον, εἰς τὰ $\frac{31}{7}$ $\frac{14}{4}$· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ, ὡς εἴρηται, καὶ προκύπτει τὸ $\frac{124}{28}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ τῆς μέθοδου τῶν τριῶν.

Μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ἐπειδὴ δὶ αὐτῆς, ἔχοντες τρεῖς ἀριθμοὺς γνωστοὺς, ζητοῦμεν ἕνα τέταρτον ἄγνωστον, τὸν ὁποῖον σημειοῦμεν διὰ τοῦ χ, ἢ φ, ἢ ψ.

Γράφομεν δὲ αὐτοὺς οὕτως, $3 : 6 = 8 : \chi$· βίζοντες μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως, μεταξὺ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, καὶ μεταξὺ τοῦ τρίτου καὶ τοῦ χ, οἷον τοῦ ζητουμένου ἀγνώστου, πάλιν τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως.

Προφέρομεν δὲ αὐτὰς ὅτως· 3 πρὸς 6 ἴσον 8 πρὸς χ· γράφονται ὅμως καὶ 3 : 6 :: 8 : χ· οἷον 3 πρὸς 6 ὡς 8 πρὸς χ· ὁσάκις δηλ. περιέχει ὁ 6 τὸν 3, τοσάκις πρέπει νὰ περιέχῃ καὶ ὁ ζητούμενος τὸν 8· ἔθεν αὕτη ἡ μέθοδος λέγεται καὶ γεωμετρικὴ ἀναλογία· ἐπειδὴ, ὅσην ἀναλογίαν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 6, τόσην καὶ ὁ 8 πρὸς τὸν ζητούμενον. Διαιρεῖται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη εἰς ὀρθὴν, καὶ ἀντίστροφον.

Περὶ τῆς ὀρθῆς.

Ὀρθὴ μὲν λέγεται, ἐπειδὴ προβάλλονται ὀρθῶς οἱ ἀριθμοὶ, προβαίνοντες ἀναλόγως ἢ εἰς αὔξησιν, οἷον, 3 : 6 = 8 : 16· δηλ. ὅσον μεγαλήτερος εἶναι ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου, οἷον, ὁ 6 τοῦ 3, τόσον μεγαλήτερος εἶναι καὶ ὁ τέταρτος τοῦ τρίτου· οἷον, ὁ 16 τοῦ 8· ἢ εἰς ἐλάττωσιν· οἷον, 16 : 8 = 6 : 3· δηλ. ὅσον μικρότερος εἶναι ὁ 8 τοῦ 16, τόσον καὶ ὁ 3 τοῦ 6.

Ἵνα εὕρωμεν δὲ τὸν ἄγνωστον, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους ὅρους, ὅροι λέγονται οἱ ἀριθμοὶ τῶν μεθόδων· ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ πρώτου, καὶ προκύπτει πηλίκον ὁ ζητούμενος.

Ἔδωκα 3 φιορίνια καὶ ἀγόρασα 6 φέντια κρέας· ἀμὴ ἂν δώσω 8 πόσα φέντια πρέπει νὰ ἀγοράσω; ταχθήτωσαν ὅτως· 3 : 6 = 8 : χ· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους, οἷον, τὸν 8 διὰ τοῦ 6,

καὶ προκύπτει γινόμενον ὁ 48· τὸν ὁποῖον διαιρῶμεν διὰ τοῦ 3, καὶ προκύπτει πηλίκον ὁ 16. δηλ. τὸ χ = 16. οἷον, 3 : 6 = 8 : 16.

Ὁμοίως καὶ, ἔδωκα 16 καὶ ἀγόρασα 8, ἐὰν δώσω 6 πόσα πρέπει νὰ ἀγοράσω; οἷον, 16 : 8 = 6 : χ· πολλαπλασιάζομεν τὸν 8 διὰ τοῦ 6, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 16 καὶ προκύπτει τὸ χ = 3· οἷον, 16 : 8 = 6 : 3.

Ἔδωκα 3861 φιορ. εἰς διάφορον, πρὸς 4 τὰ 100, πόσον διάφορον πρέπει νὰ λάβω; ὅθεν λέγω, 100 : 4 = 3861 : χ. 3861 . 4 = 15444 : 100 = $154\frac{44}{100}$· ἤτοι 3861, πολλαπλασιαζόμενα διὰ τοῦ 4 γίνονται 15444, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ τοῦ 100 προκύπτει πηλίκον $154\frac{44}{100}$. τὸ χ ἄρα, ἤτοι ὁ ζητούμενος ἄγνωστος = $154\frac{44}{100}$. ὥστε 100 : 4 = 3861 : $154\frac{44}{100}$.

Ἐπώλησα 50 πηχῶν ῥοῦχον καὶ ἐκέρδησα 350 φιορι. ἐὰν ἐπώλουν 460, πόσα ἔπρεπε νὰ κερδήσω; 50 : 350 = 460 : χ. ἄρα 460 . 350 = 161000 : 50 = 3220· ὥστε 50 : 350 = 460 : 3220.

Ὅταν δὲ ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι κλάσμα, οἷον $\frac{1}{2}$: 3 = 40 : χ. τουτέστιν, ἐὰν $\frac{1}{2}$ τῆς πηχ. πωλεῖται διὰ 3 φιορ 40 πηχ. διὰ πόσων; πολλαπλασιάζομεν τὸν β΄. ὅρον 3 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος 2, ἔπειτα ἀποβάλλομεν τὸν παρονομαστὴν καὶ γίνεται 1 : 6 = 40 : χ· τὸ χ ἄρα = 240· ὥστε $\frac{1}{2}$: 3 = 40 : 240.

Ὅταν δὲ ὁ β΄. ὅρος εἶναι κλάσμα, οἷον, 7 : $\frac{3}{8}$ =

168 : χ· τουτέστι, διὰ 7 φιορ. ἀγόρασα $\frac{2}{8}$ τῆς πηχ. ἀλλ' ἐὰν ἔδιδον 168 πόσας ἔπρεπε νὰ ἀγοράσω; πολλαπλασιάζομεν τὸν ά. ὅρον 7 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος 8, καὶ ἀποβάλλομεν τὸν παρονομαστήν· ὅθεν γίνεται 56 : 3 = 168 : χ. τὸ χ. ἄρα = 9· ὥστε : $7\frac{3}{8}$ = 168 : 9.

Ὅταν δὲ ὁ γ'. ὅρος εἶναι κλάσμα, οἷον, 9 : 168 = $\frac{2}{8}$: χ. τουτέστιν, 9 πήχ. ἐτιμήθησαν 168 φιορ. $\frac{2}{8}$ τῆς πηχ. πόσα; πολλαπλασιάζομεν τὸν ά. ὅρον 9 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 8, ἀποβάλλοντες τὸν παρονομαστήν· καὶ γίνεται 72 : 168 = 3 : χ. ὥστε τὸ χ = 7· ἄρα 9 : 168 = $\frac{2}{8}$: 7.

Ὅταν δὲ ὁ ά. καὶ β'. ὅρος εἶναι κλάσματα, οἷον $\frac{3}{4}$: $\frac{5}{6}$ = 7 : χ. τουτέστιν, ἐὰν $\frac{3}{4}$ τῆς πήχ. ἐτιμήθησαν, $\frac{5}{6}$ τοῦ φιορ. 7 πήχ. πόσον; πολλαπλάσιζομεν τὸν ἀριθμητὴν 2 τοῦ ά, διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 6 τοῦ β', καὶ τὸ γινόμενον 12 λαμβάνομεν ά. ὅρον· ἔπειτα τὸν ἀριθμητὴν 5 τοῦ β', διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 4 τοῦ ά, καὶ τὸ γινόμενον λαμβάνομεν β', ὅρον· ὥστε γίνεται 12 : 20 = 7 : χ. τὸ χ = $7\frac{8}{12}$· ἄρα ^{2} : $\frac{5}{6}$ = 7 : $11\frac{8}{12}$.

Ὅταν δὲ ὁ ά. καὶ γ'. ὅρος εἶναι κλάσματα, οἷον $\frac{2}{5}$: 8 = $\frac{4}{7}$: χ. ἤγουν, $\frac{2}{5}$ τῆς πηχ. τιμῶνται 8 φιορ. $\frac{4}{7}$ πόσα; πολλαπλασιάζομεν τὸν β'. ὅρον 8 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 3 τοῦ ά. καὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ά. 2 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 7 τοῦ γ'. καὶ γίνεται 14 : 24 = 4 : χ. τὸ χ = $6\frac{12}{14}$· ἄρα, $\frac{2}{5}$: 8 = $\frac{4}{7}$: $6\frac{12}{14}$.

Ὅταν δὲ καὶ οἱ τρεῖς ὅροι εἶναι κλάσματα, οἷον, $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{6}{7} : \chi$. ἤγουν, $\frac{2}{3}$ τῆς πηχ. ἐπωλήθησαν διὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ φιορ. ἀμὴ $\frac{6}{7}$ τῆς πήχ. πόσα; πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν 2 τοῦ α', διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 5 τοῦ β', καὶ τὸ γινόμενον 10, διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τοῦ γ', καὶ γίνεται ὁ 70· ἔπειτα τὸν ἀριθμητὴν τοῦ β'. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 3 τοῦ α', καὶ γίνεται ὁ 12· οἷον, 70 : 12 : 6 : χ. τὸ $\chi = 1\frac{1}{35}$· ἄρα $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{6}{7} : 1\frac{1}{35}$.

Ὅταν δὲ τὰ κλάσματα ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς, οἷον, $\frac{2}{4} : \frac{3}{4} = 5 : \chi$. ἀποβάλλομεν τοὺς παρονομαστὰς, καὶ γίνονται $2 : 3 = 5 : \chi$. ἢ $\frac{4}{5} : 8 = \frac{3}{5} : \chi = 4 : 8 = 5 : \chi$. ἢ $\frac{1}{2} : \frac{2}{6} = \frac{4}{6} : \chi = 1 : 2 = 4 : \chi$.

Ὁμοίως καὶ ὅταν τύχωσι μικτὰ κλάσματα, ἀναλύομεν αὐτὰ εἰς καθαρὰ, ἔπειτα ζητοῦμεν τὸν ἄγνωστον κατὰ τοὺς ῥηθέντας τρόπους.

Περὶ τῆς ἀντιστρόφου.

Ἀντίστροφος λέγεται ἐπειδὴ προβάλλονται ἀντιστρόφως οἱ ὅροι· οἷον, 4 ἄνθρωποι ἔκτισαν, ἓν τεῖχος εἰς 30 ἡμέρας, 10 ἄνθρωποι ἄρα εἰς πόσας ἡμέρας ἠδύναντο νὰ κτίσωσι τὸ αὐτὸ τεῖχος;

Ἂν τάξωμεν τοὺς ὅρους, $4 : 30 = 10 : \chi$· δὲν λύεται τὸ πρόβλημα κατὰ τὸν τρόπον τῆς ὀρθῆς μεθόδου· ἐπειδὴ δὲν προβαίνουσιν οἱ ὅροι ἀναλόγως ἤτε εἰς αὔξησιν, ἤτε εἰς ἐλάττωσιν· καθότι, ὁ ζητούμενος δὲν εἶναι τόσον μεγαλότερος τοῦ 10, ὅσον εἶναι ὁ 30 τοῦ 4.

Ὅθεν πρέπει, ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο πρώτους, οἷον, τὸν 30 διὰ τοῦ 4, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ τρίτου, οἷον, τοῦ 10· ἢ νὰ ὀρθώσωμεν τὴν μέθοδον· οἷον, νὰ φέρωμεν τὸν πρῶτον εἰς τὸν τόπον τοῦ τρίτου, καὶ τὸν τρίτον εἰς τὸν τόπον τοῦ πρώτου, οὕτως, 10 : 30 = 4 : χ. καὶ οὕτω προκύπτει τὸ χ = 12.

Ὅταν δὲ τύχωσιν ἢ ὁ ἁ. ἢ β'. ἢ ὅλοι οἱ ὅροι κλάσματα, ζητοῦμεν τὸν ἄγνωστον κατὰ τὸν τρόπον τῆς ὀρθῆς, ἀφ' οὗ ὀρθώσωμεν πρῶτον καὶ αὐτήν· οἷον, $7 : \frac{3}{7} = 8 : \chi$· τουτέστιν, 7 ῥάπται ἔρραψαν ἓν φόρεμα εἰς $\frac{3}{7}$ τῆς ἡμέρας, 8 ῥάπται ἄρα εἰς πόσον διάστημα τῆς ἡμέρας, δύνανται νὰ ῥάψωσι τὸ αὐτὸ φόρεμα; ἐπειδὴ ἡ μέθοδος εἶναι ἀντίστροφος, ὀρθώνομεν αὐτὴν οὕτως, $8 : \frac{3}{7} = 7 : \chi. = 56 : 3 = 7 : \chi.$ τὸ $\chi = 2\frac{1}{3}$.

Εἰς ῥάπτης ἐχώρισεν ἓν φόρεμα, εἰς τὸ ὁποῖον, ἐχρειάσθη 8 πήχ. ῥοῦχον, τὸ δὲ πλάτος τοῦ ῥούχου εἶναι $\frac{3}{4}$ τῆς πήχ. ζητεῖ πανίον διὰ νὰ στρώσῃ ἔσωθεν τοῦ φορέματος· ἤυρε, πλὴν τὸ πλάτος τοῦ πανίου εἶναι μιᾶς πήχ. θέλει νὰ μάθῃ πόσον τὸν χρειάζεται· $8 : \frac{3}{4} = 1 : \chi.$ ὀρθώνομεν αὐτὴν, καὶ γίνεται, $1 : \frac{3}{4} = 8 : \chi = 4 : 3 = 8 : \chi.$ τὸ $\chi = 6.$ ἄρα, 6 πήχ. πανίον χρειάζεται.

Δοκιμὴ δὲ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν γίνεται ἡ ἀντιστροφὴ τῶν ὅρων· οἷον, $4 : 8 = 16 : \chi.$ τὸ $\chi = 32$

ἀντιστρόφως 32 : 16 = 8 : χ. τὸ χ = 4. ὀρθῶς ἄρα ἔγινεν ἡ πράξις.

Περὶ τῆς μεθόδου τῶν πέντε.

Μέθοδος τῶν πέντε λέγεται ἐπειδὴ δι' αὐτῆς, ἔχοντες πέντε ἐγνωσμένους ἀριθμὺς, ζητοῦμεν ἕνα ἕκτον· π. χ. 4 ἄνθρωποι εἰς 7 ἡμέρας ἔκτισαν 252 ποδῶν τεῖχος· ἄρα 10 ἄνθρωποι, εἰς 13 ἡμέρας, πόσων ποδῶν τεῖχος ἠμποροῦσι νὰ κτίσωσι; γράφομεν τοὺς ὅρους οὕτως, 4, 7, 252, 10, 13. ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν α΄. διὰ τοῦ β΄, οἷον, τοὺς 4 οἰκοδόμους, διὰ τῶν 7 ἡμερῶν· εἶτα τὸ δ΄, διὰ τοῦ ε΄, οἷον, τοὺς 10 οἰκοδόμους πάλιν διὰ τῶν 13 ἡμερῶν· καὶ διὰ τῶν γινομένων τούτων συζήνομεν τὴν μέθοδον τῶν τριῶν· οἷον, 28 : 130 = 252 : χ. τὸ χ = 1170 : 400, φιορ. εἰς 6 μῆνας ἔδωκαν διάφορον, 40, ἀμὴ 600, εἰς 8 μῆνας, πόσον; 400, 6, 40, 600, 8· ἐνταῦθα ὁ ζητούμενος προκύπτει 80.

Ἀντύχη ἀντίστροφος, ὡς καὶ ἡ τῶν τριῶν, ἀφ' οὗ φέρωμον τοὺς ὅρους εἰς τρεῖς, ὀρθώνομεν αὐτὴν ὡς εἴρηται· οἷον, 4 ἄνθρωποι εἶχον μίαν ποσότητα χρημάτων, καὶ τοὺς ἔφθασε 10 μῆνας, ἐξοδεύοντες ἕκαστος 3 φιορ. τὴν ἡμέραν, ἄρα 6 ἄνθρωποι νὰ ἐξοδεύσι πρὸς 5 τὴν ἡμέραν ἕκαστος, πόσους μῆνας δύνανται νὰ ζήσωσι διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος; 4, 3, 10, 6, 5, γενομένης δὲ τῆς πράξεως οὕτως, 12:

10 = 30 : χ. βλέπομεν ὅτι ἡ μέθοδος εἶναι ἀντίστροφος· ὅθεν ὀρθώνομεν αὐτὴν, 30 : 10 = 12 : χ. καὶ προκύπτει ὁ ζητούμενος 4.

Περὶ τῆς μεθόδου τῶν ἑπτά.

Μεθόδος τῶν ἑπτὰ λέγεται ἐπειδὴ δι' αὐτῆς, ἔχοντες ἑπτὰ ἀριθμοὺς ἐγνωσμένους, ζητοῦμεν ἕνα ὄγδοον, οἷον, 560 φιορ. πρὸς 5 τὰ ἑκατὸν, εἰς 2 χρόνους φέρουσι διάφορον 56 φιορ., ἀμὴ 2520 πρὸς 6 τὰ ἑκατὸν, εἰς 5 χρόνους πόσον; Τάττομεν τοὺς ἀριθμοὺς οὕτως, 560, 5, 2 : 56 = 2520, 6, 5 : χ· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς τρεῖς πρώτους, οἷον τὸν 2 διὰ τοῦ 5, καὶ διὰ τοῦ γινομένου τούτων 10, τὸν 560· ἔπειτα, τοὺς τρεῖς τελευταίους, οἷον, τὸν 5 διὰ τοῦ 6, καὶ διὰ τοῦ γινομένου τούτων 30, τὸν 2520, καὶ φέρομεν αὐτοὺς εἰς τρεῖς ὅρους· οἷον, 5600 : 56 = 75600 : χ καὶ οὕτω διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, προκύπτει ὁ ζητούμενος, 756.

ϛ'. ἐργάται εἰς 8 ἡμέρας, δουλεύοντες 6 ὥρας τὴν ἡμέραν ἔσκαψαν 17 ὀργυιῶν γῆν· ἄρα 12 ἐργάται εἰς 15 ἡμέρας, δουλεύοντες 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, πόσας ὀργυιὰς δύνανται νὰ σκάψωσι· οἷον, 5, 8, 6 : 17 = 12, 15, 8 : χ. ἐνταῦθα τὸ χ = 102.

Ὅταν δὲ καὶ αὕτη ἡ μέθοδος τύχῃ ἀντίστροφος, ὡς καὶ αἱ λοιπαὶ, ὀρθώνομεν αὐτὴν, ὡς εἴρηται.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς ἑταιρείας.

Τρεῖς σύντροφοι κατέβαλον, ὁ μὲν 1600, φιορ. ὁ δὲ 1450, ὁ δὲ 1500, εἰς πρᾶγμα· ἐκέρδησαν δὲ 2460, πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος; συνάπτομεν τὰ κεφάλαια ὅλων, καὶ γίνεται, ὁ 4550· ἔπειτα ζητοῦμεν πρῶτον τοῦ πρώτου, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν· οἷον, 4550 : 2460 = 1600 : χ. Εἶτα τοῦ δευτέρου· οἷον, 4550 : 2460 = 1450 : ψ. ἔπειτα τοῦ τρίτου, οἷον, 4550 : 2460 = 1500 : φ. καὶ τὸ μὲν $\chi = 865\frac{51}{91}$· τὸ δὲ $\psi = 783\frac{87}{91}$· τὸ δὲ $\varphi = 810\frac{90}{91}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεται καὶ τῆς ζημίας ἡ μέθοδος· οἷον, ἔχοντες οἱ τρεῖς σύντροφοι τὰ αὐτὰ κεφάλαι, ἐζημιώθησαν 2460 φιορ. ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀναλογίαν τῶν κεφαλαίων, πρέπει νὰ διαιρεθῇ ἡ ζημία· ἡ πράξις εἶναι ἡ αὐτή.

Περὶ τῆς Ἄλυσου.

Ἄλυσος δέ ἐστι τρόπος σύντομος εἰς λύσιν τῶν διὰ τῶν Μεθόδων ἐπιλυομένων προβλημάτων· τάττεται δὲ ὕτως.

Πρῶτον γράφεται ἡ ἀρχὴ τῆς ἐρωτήσεως δεξιόθεν τῆς γραμμῆς εἰς τὸ ἀνώτατον μέρος, τὸ δὲ τέλος εἰς τὸ κατώτατον· ὁ δὲ ζητούμενος ἄγνωστος σημειοῦται διά τινος στοιχείου, π. χ. φ ἢ χ, εἰς τὸ ἀνώτατον ἀριστερόθεν, ὅς τις εἶναι πάντοτε ὁμοειδὴς

μετὸν μὲ τὸν κατώτατον δεξιόθεν· οἱ δὲ λοιποὶ ὁμοειδεῖς, ὁ μὲν δεξιόθεν ὁ δ' ἀριστερόθεν, ὥστε νὰ εἶναι, οἱ ἀπεναντίον ὁμοειδεῖς ὁ εἷς ἕνα βαθμὸν κατώτερον τοῦ ἄλλου, ἐκτὸς τοῦ ζητουμένου καὶ τοῦ ὁμοειδοῦς αὐτοῦ, οἵτινες μένουσι πάντοτε ὁ μὲν εἰς τὸ κατώτατον μέρος δεξιόθεν, ὁ δὲ εἰς τὸ ἀνώτατον ἀριστερόθεν.

Ἔπειτα πολλαπλασιάζονται ὅλοι οἱ δεξιόθεν ὅροι πρὸς ἀλλήλους, ὁμοίως καὶ οἱ ἀριστερόθεν, καὶ διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀριστερόθεν, διαιρεῖται τὸ γινόμενον τῶν δεξιόθεν, καὶ προκύπτει πηλίκον ὁ ζητούμενος· οἷον,

Μὲ πόσα γρόσια ἀγοράζω 120 ὀκάδες τί, ὅταν ἡ ὀκὰ ἔχῃ 2 ἄσπρα, καὶ 3 ἄσπρα κάμνουν 1 παρᾶν, καὶ 40 παράδες 1 γρόσι;

χ;	120 ὀκάδες,
ὀκα. 1	2 ἄσπρα
ἄσπρα 3	1 παρᾶν
παρά. 40	1 γρόσι.
120	240 : 120 = 2 γρο. ὁ ζητουμενος.

Πωλῶν πρὸς 20 φιορ. τὴν πήχ. εἰς τὰς 100 πήχ. κερδαίνω 30 φιορ. πόσα πρέπει νὰ κερδήσω εἰς 600 πηχ. πωλῶν πρὸς 24 φιορ. τὴν πηχ.;

κερδ. χ;	600 πηχ.
πηχ. 100	24 τιμὴ
τιμὴ 20	30 κέρδ.
2000	432000 : 2000 = 216. ὁ ζητούμενος.

Συντομίας δὲ χάριν, ὅταν εὑρεθῶσι δύο ἴσοι ὅροι ὁ μὲν δεξιόθεν ὁ δ' ἀριστερόθεν, ἐξαλείφονται· ὁμοίως καὶ τὰ ἀμφοτέροθεν ἰσάριθμα μηδενικὰ, καὶ αἱ μονάδες ὅπου εὑρεθῶσιν.

Ὅταν δ' εὑρεθῶσι δύο ὅροι, ὁ μὲν δεξιόθεν, ὁ δὲ ἀριστερόθεν καὶ διαιροῦνται διά τινος κοινοῦ διαιρέτου, διαιροῦμεν αὐτούς· οἷον,

χ;	120 καδ. 3	κέρδ. χ;	600 πηχ.
ὀκ. 1	2 ἄσπρ.	πήχ. 100	24 τιμ. 12
ἄσπρ. 3	1 παρ.	τιμὴ 20	30 κερδ.
παρ. 40	1 γρ.		12.6.3=216
3	6 : 3 = 2.		

Ἐν μὲν τῷ α. προβλήματι, ἐξαλειφθέντων τῶν μηδενικῶν καὶ τῶν μονάδων, ἔμειναν δεξιόθεν μὲν 12 καὶ 2, ἀριστερόθεν δὲ, 4 καὶ 3· διαιρεθέντων δὲ καὶ τῶν 12 καὶ 4 διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου 4, ἐκ μὲν τοῦ 12 προέκυψεν ὁ 3, ἐκ δὲ τοῦ 4 μονὰς, ὅθεν, ἐξαλειφθείσης καὶ αὐτῆς, ἔμεινεν δεξιόθεν μὲν 3 καὶ 2, οἵ τινες πολλαπλασιασθέντες, διηρέθη τὸ γινόμενον αὐτῶν 6 διὰ τοῦ 3, ὅτις ἔμεινε μόνος ἀριστερόθεν.

Ἐν δὲ τῷ β΄, ἐξαλειφθέντων τῶν μηδενικῶν καὶ τῆς μονάδος, ἔμειναν δεξιόθεν μὲν 6, 24 καὶ 3· ἀριστερόθεν δὲ ὁ 2· διαιρεθέντων δὲ καὶ τῶν 24 καὶ 2 διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου 2, καὶ ἐξαλειφθέντος τοῦ προκύψαντος ἐκ τοῦ 2, μονὰς ὅσης, ἐμείναμεν ἄνευ διαιρέτου· ὅθεν ἐπολλαπλασιάμεν πρὸς ἀλλήλους τοὺς ἀναπολειφθέντας ὅρους δεξιόθεν, οἷον, τὸν 12, 6, 3 καὶ προέκυψεν ὁ ζητούμενος 216, ἄνευ διαιρέσεως.

Ὅταν δὲ τύχῃ ἡ μέθοδος ἀντίστροφος πρέπει νὰ ὁρθώνωμεν αὐτήν, ὡς εἴρηται· οἷον, 3 ὁδοιπόροι τρώγουσι 30 ὀκαδ. κρέας εἰς 12 ἡμέρας, ἄρα 180 ὀκαδ. πόσας ἡμέρ. ἀρκεῖ εἰς 9 ὁδοιπόρους;

ἡμέρ χ;	3 ὁδοιπ.
ὁδοιπ. 9	180 ὀκάδ.
ὀκάδ. 36	12 ἡμέρ.
324	6480 : 324 = 20

ἡμέρ χ;	3 ὁδοιπ.
ὁδοιπ. 9	180 ὀκάδ.
ὀκάδ. 36	12 ἡμέρ.
9	180 : 9 = 20

36 : 12 = 3· καὶ 12 : 12 = 1· ἐξαλειφθέντων καὶ τῶν 3 ἀμφοτέροθεν, μένουσιν 9 καὶ 180· ὅθεν 9 : 9 = 1· καὶ 180 : 9 = 20 ὁ ζητούμενος.

Ἐνταῦθα ἡ ἐρώτησις διὰ 9 ὁδοιπ. ὅθεν ἔπρεπε νὰ τεθῇ ὁ 9 εἰς τὸ ἀνώτατον μέρος δεξιόθεν, καὶ ὁ 3 ἀριστερόθεν· ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι ἡ μέθοδος ἀντίστροφος, ἀναστρέφονται, ἵνα ὀρθωθῇ.

Ὅταν δὲ τύχωσιν οἱ ὅροι μικτοὶ, ἀναλύομεν εἰς κλάσματα καθαρὰ, καὶ μεταθέτομεν τοὺς παρονομαστὰς, τοὺς μὲν δεξιόθεν εἰς τὸ ἀριστερὸν, τοὺς δ' ἀριστερόθεν εἰς τὸ δεξιόν· τὰ αὐτὰ ποιοῦμεν καὶ ἐπὶ παντὸς εἴδους μεθόδων, οἷον, τῶν πέντε, τῶν ἑπτὰ, τῶν ἕνδεκα, κ. τ. λ., προσέχοντες εἰς τὰ εἰρημένα.