μῆνας νὰ πηγαίνῃ ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Π, θέλει ἔχει εἰς τὸ τέλος τῦ πρώτυ μηνὸς 30° μέσην ἀνωμαλίαν, 60° εἰς τὸ τέλος τῦ δευτέρυ· ϗ ὕτως ἐφεξῆς, ἐπειδὴ ἡ ἀπόςασίς τυ αὐξάνει πάντοτε ἀναλόγως μὲ τὸν χρόνον. Α'ν ἀχθῇ μία γραμμὴ ΚΧ, διὰ νὰ σημειώσῃς τὴν μέσην ἀνωμαλίαν, καὶ ὑποτεθῇ ὅτι αὐτὴ ἡ γραμμὴ κινεῖται ὁμοειδῶς περὶ τὸ κέντρον Κ, ἡ γραμμὴ ΚΧ θέλει προχωρήσει κατ' ἀρχὰς περαιτέρω ἀπὸ τὴν ΚΒ, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ αὐξάνει βραδύτερον πρὸς τὴν ἀφηλιότητα, ὅπυ ἡ κίνησις τῦ πλανήτυ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν μέσην κίνησιν· ϗ αὐτὴ ἡ πρόοδος θέλει αὐξήσει ἐπὶ τοσῦτον, ὅσον ἡ ταχύτης τῦ πλανήτυ θέλει εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν μέσην ταχύτητά τυ· ὕςερα τὸ σημεῖον Β θέλει πλησιάσει εἰς τὸ σημεῖον Χ, ἕως ὁπῦ νὰ ἑνωθῦν εἰς τὴν περιηλιότητα Π· ἐκεῖ συμπίπτυσιν αἱ τρεῖς ἀνωμαλίαι, ϗ εἶναι ἐπίσης 180°. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀληθινῆς ἀνωμαλίας, ϗ τῆς μέσης ἀνωμαλίας δίδωσι τὴν ἐξίσωσιν τῆς τροχιᾶς, ἢ τὴν ἐξίσωσιν τῦ κέντρυ.

§. 483. Ἐπειδὴ ἡ μέση ἀνωμαλία εἶναι ἀνάλογος μὲ τὸν χρόνον, ϗ εἶναι ἕνα μέρος τῦ χρόνυ τῆς περιφορᾶς, καὶ ἠμπορεῖ κάθε μέγεθος, ὁπῦ αὔξει ὁμοειδῶς, νὰ χρησιμεύσῃ εἰς μέτρον της· ὅθεν ὄχι μόνον τὸ τόξον ΑΧ, ἡ γωνία ΑΚΧ, ϗ ὁ τομεὺς, ἢ τὸ κυκλικὸν ἐμβαδὸν ΑΚΧ, ἠμπορῦν νὰ ὀνομάζωνται μέση ἀνωμαλία, ἀλλ' ἀκόμι ϗ ὁ ἐλλειπτικὸς τομεὺς, ἢ τὸ ἐμβαδὸν ΑΗΜ τὸ γινόμενον ἀπὸ τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα ΗΜ, ἀπὸ τὸν μεγάλον ἄξονα ΗΑ καὶ ἀπὸ τὸ τόξον τῆς ἐλλείψεως ΑΜ· ἐπειδὴ τὰ ἐμβαδὰ τὰ περιγεγραμμένα ἀπὸ τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα ΗΜ, εἶναι ἀνάλογα μὲ τȣ̀ς χρόνȣς (481), ὁ τομεὺς ΑΜΗ θέλει εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τῆς ἐλλειπτικῆς ἐπιφανείας ΑΜΔΠΑ εἰς τὸ τέλος τȣ̃ πρώτȣ μηνὸς (κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τȣ̃ προηγȣμένȣ ἄρθρȣ)· θέλει εἶναι τὸ τρίτον ἑπομένως εἰς τὸ τέλος τῶν δύο μηνῶν· ϗ πάντοτε ὅτως ὁμοειδῶς, ὥςε ἡ ἐπιφάνεια, ἢ τὸ ἐλλειπτικὸν ἐμβαδὸν θέλει εἶναι τὸ μέγεθος τὸ ἀνάλογον μὲ τὸν χρόνον, ἢ ἕνα κλάσμα ἴσον μὲ τὸ κλάσμα τȣ̃ χρόνȣ, ἢ μὲ τὴν μέσην ἀνωμαλίαν· ὅθεν ἠμποροῦμεν νὰ εἰπῶμεν εἰς τὸ τέλος τȣ̃ πρώτȣ μηνὸς, ὅτι ἡ μέση ἀνωμαλία εἶναι 30°, ἢ ἐν γένει, ὅτι εἶναι ἕνα δωδέκατον· ἐπειδὴ τότε αἱ 30° εἶναι τὸ δωδέκατον μέρος τȣ̃ κύκλȣ· ϗ ὁ χρόνος ὁπȣ̃ ἐμεταχειρίσθη εἰς τὸ νὰ διατρέξῃ θέλει εἶναι τὸ δωδέκατον μέρος τȣ̃ χρόνȣ τῆς ὁλοκλήρȣ περιφορᾶς, ϗ τέλος τὸ ἐμβαδὸν ΑΜΗ θέλει εἶναι τὸ δωδέκατον μέρος τȣ̃ ὁλοκλήρȣ ἐλλειπτικȣ̃ ἐμβαδȣ̃· ὅμως ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖςον ἡμεῖς ἐκφράζομεν εἰς μοίρας τὴν μέσην ἀνωμαλίαν.

§. 484. Ἀφ' ȣ̃ ὁ Κεπλέρος εὑρῆκεν, ὅτι οἱ πλανῆται περιγράφȣν ἐλλείψεις, τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ εἶναι ἀνάλογα μὲ τὸν χρόνον, ἠμπορȣ̃σεν ἤδη νὰ εὕρῃ ἐκ τȣ́τȣ τὸν ἀληθινὸν τόπον ἑνὸς πλανήτȣ εἰς ἕνα δοθέντα χρόνον. Ὅταν ἰξεύρωμεν τὴν ςιγμὴν, ἐν ᾗ αὐτὸς διέβη εἰς τὸ σημεῖον Α, καὶ τὴν διάρκειαν τῆς περιφορᾶς, ἰξεύρομεν ϗ τὴν μέσην ἀνωμαλίαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν εἰς μοίρας, διὰ νὰ ἀκολȣθῶμεν εἰς τὸν συνειθισμένον τρόπον εἰς τȣ̀ς ἀςρονομικȣ̀ς πίνακας, ὅπȣ ὅλαι αἱ ἀνωμαλίαι, ϗ ὅλαι αἱ ἐξιστώσεις ἐκφράζονται εἰς μοίρας λεπτὰ, ϗ δεύτερα· ὡσαύτως ἔχει ϗ ἡ ἐπιφάνεια τῦ τομέως ΑΗΜ.

§. 485. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὴν ἀληθινὴν ἀνωμαλίαν, ἢ τὴν γωνίαν ΑΗΜ αὐτῦ τῦ τομέως. Ὁ Κεπλέρος ἐκατάλαβε καλὰ τὴν δυσκολίαν τέτυ τῦ προβλήματος, δοθείσης τῆς μέσης ἀνωμαλίας, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθινὴ ἀνωμαλία, ϗ εἰς ἕνα κύκλον· ἐπειδὴ ἡ δυσκολία εἶναι σχεδὸν ἡ αὐτὴ, καθὼς ϗ εἰς τὴν ἔλλειψιν· ἀλλ' εὐχαριστήθη νὰ παραθαῤῥύνῃ τὰς γεωμέτρας εἰς τὸ νὰ ζητήσυν τὴν λύσιν τέτυ, χωρὶς νὰ ἐλπίζῃ, ὅτι ἤθελεν εὑρεθῇ κατ' εὐθεῖαν, ἐπειδὴ αὐτὴ προϋποθέτει, καθὼς θέλομεν τὸ ἰδεῖ μετ' ὀλίγον, τὸν λόγον μεταξὺ τῶν τόξων, ϗ τῶν ἡμιτόνων τυς, ἢ τὸν τετραγωνισμὸν τῦ κύκλυ, ὁ ὁποῖος εἶναι γνωστὸς μόνον ὅτι ἔγγιστα, ϗ ὐχὶ ἐντελῶς.

§. 486. Διὰ νὰ κάμωμεν ἁπλέστερον ϗ εὐκολότερον τὸ ζήτημα, ἀντιστρέφομεν τὸ πρόβλημα, ϗ ὑποθέτομεν ἐγνωσμένην τὴν ἀληθινὴν ἀνωμαλίαν, διὰ νὰ εὕρωμεν ἐκ τέτυ τὴν μέσην ἀνωμαλίαν· αὕτη ἡ μέθοδος εἶναι συντομωτέρα, ϗ συχνὰ ἀκριβεστέρα, ϗ ἐπέχει πάντοτε εἰς τὴν πρᾶξιν τὸν τόπον τῆς κατ' εὐθεῖαν, ἢ κυρίας μεθόδυ. Αὐτὴν τὴν πλαγίαν μέθοδον ἐμεταχειρίσθη μὲ καλὴν ἔκβασιν ὁ Καΐλλιος, εἰς τὰς περὶ τῦ ἡλίυ ἐρεύνας τυ· ἐρείδεται δὲ εἰς τὰ δύο ἀκόλυθα θεωρήματα (490, 491) τὰ ὁποῖα θέλομεν δείξει μὲ ἕνα τρόπον πολλὰ ἁπλῦν, ἀφ' ȣ̃ διορίσωμεν λήμματα, ὁπῦ δὲν εὑρίσκονται εἰς τὰ στοιχειώδη βιβλία.

§. 487. Λῆμμα Α΄. Εἰς μίαν ἔλλειψιν ΑΜΠ, περὶ τὴν ὁποίαν περιγράφη ἕνας κύκλος ΑΒΠ, ἔςω ΚΧ ἡ γραμμὴ τῆς μέσης ἀνωμαλίας (482), Μ· ὁ ἀληθινὸς τόπος τȣ̃ πλανήτȣ, ΡΜΒ ἡ τεταγμένη, ἡ διαβαίνȣσα ἀπὸ τὸν τόπον τȣ̃ πλανήτȣ· ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΑΒΗΑ εἶναι πάντοτε ἴσος μὲ τὸν κυκλικὸν τομέα ΑΚΧ τῆς μέσης ἀνωμαλίας.

Δεῖξις. Ἔςω Γ ὁ ὁλόκληρος χρόνος τῆς περιφορᾶς τȣ̃ πλανήτȣ, ϗ γ ὁ χρόνος, ὁπȣ̃ ἐχρειάσθη εἰς τὸ νὰ κινηθῇ ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Μ· ἔςιν ἂν κατὰ τὸν κανόνα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀναλόγων μὲ τȣ̀ς χρόνȣς, γ πρὸς τὸ Γ, ὡς ὁ τομεὺς ΑΜΗ εἶναι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐλλείψεως· ὡσαύτως ἐπειδὴ ΑΚΧ εἶναι ἡ μέση ἀνωμαλία, ἔςαι γ : Γ : : ΑΚΧ : τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ κύκλȣ· ἄρα ΑΜΗ : ΑΚΧ : : ἐπιφ. ἐλλει. Θ: ἐπιφ. κυκλ. ἀλλὰ διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ἐλλείψεως, ἥτις ἀποδείκνυται εἰς ὅλα τὰ βιβλία τῶν κωνικῶν τομῶν, ΑΜΗ : ΑΒΗ : : ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐλλείψεως : τὴν τȣ̃ κύκλȣ· ἔχομεν ἄρα δύο ἀναλογίας, ὁπȣ̃ ἔχȣν τρεῖς ὅρȣς κοινȣ̀ς, δηλαδὴ τὸν ΑΜΗ, τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐλλείψεως, ϗ τὴν τȣ̃ κύκλȣ· ὁ ὅρος, ὁπȣ̃ φαίνεται διαφορετικὸς εἶναι ἄρα ἀναγκαίως ὁ αὐτός· ἄρα ΑΚΧ ϗ ΑΒΗ εἶναι ἴσα ἀλλήλοις Ο. Ε. Δ.

§. 488. Λῆμμα Β΄. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΜΡΗ (χ. 56.) ἂν ἡ γωνία ΡΗΜ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ἴσα, ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἡμισείας γωνίας ΡΗΜ ἔςαι ἴση μὲ $\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PH}+\mathrm{HM}}$· διότι ἂν ληφθῇ ΗΘ = ΗΜ, ἔςαι ἡ γωνία Θ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας Η· καὶ ἐπειδὴ ΡΘ : ΡΜ : : 1 : ἐφ. Θ, αὐτὴ ἡ ἐφ. $= \frac{\mathrm{ΡΜ}}{\mathrm{ΘΡ}} = \frac{\mathrm{ΡΜ}}{\mathrm{ΡΗ} + \mathrm{ΗΘ}} = \frac{\mathrm{ΡΜ}}{\mathrm{ΡΗ} + \mathrm{ΗΜ}}$.

§. 489. Λῆμμα Γ'. Ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς ἢ ἡμιδιάμετρος ΗΜ εἶναι ἴση μὲ $\frac{\mathrm{ΠΡ} \times \mathrm{ΗΑ}}{\mathrm{ΚΑ}} - \mathrm{ΗΡ}$· Ἄς ἐκφράσωμεν ἤδη τοῦτο ἀναλυτικῶς, κάμνοντες ΚΑ $= \alpha$, ΚΡ $= \chi$, ΚΗ $= \iota$· ἔςαι ὂν $\frac{\mathrm{ΠΡ} \times \mathrm{Η}}{\mathrm{ΚΑ}} - \mathrm{ΗΡ} = \frac{(\alpha+\chi)(\alpha+\iota) - \alpha(\iota+\chi)}{\alpha}$, ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, $\frac{\alpha^2 + \iota\chi}{\alpha}$. ὃ δειχθήσεται· Κατὰ τὴν ἐγνωσμένην ἰδιότητα τῆς ἐλλείψεως, ἔςαι ΗΜ + ΕΜ $= 2\,\alpha$· ἂς ὑποθέσωμεν ΗΜ $= \alpha + \zeta$, καὶ ΕΜ $= \alpha - \zeta$, ἐπειδὴ ΗΡ $= \iota + \chi$, καὶ ΕΡ $= \iota - \chi$, καὶ ἔχομεν $\overline{\mathrm{ΡΜ}}^2$, ἢ $\psi^2 = \overline{\mathrm{ΗΜ}}^2 - \overline{\mathrm{ΗΡ}}^2 = \alpha\alpha + 2\,\alpha\zeta + \zeta\zeta - \iota\iota - 2\,\iota\chi - \chi\chi = \overline{\mathrm{ΕΜ}}^2 - \overline{\mathrm{ΕΡ}}^2 = \alpha\alpha - 2\alpha\zeta + \zeta\zeta - \iota\iota + 2\iota\chi - \chi\chi$· ἂν θῇς ἴσας ταύτας τὰς δύο τιμὰς ἕξεις $2\,\alpha\zeta - 2\,\iota\chi = -2\,\alpha\chi + 2\,\iota\chi$· ἄρα $\zeta = \frac{\iota\chi}{\alpha}$, καὶ ΗΜ $= \alpha + \frac{\iota\chi}{\alpha}$, ἢ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ καθὼς τὸ εἴδομεν, ΜΗ $= \frac{\mathrm{ΠΡ} \times \mathrm{ΗΑ}}{\mathrm{ΚΑ}} - \mathrm{ΗΡ}$.

§. 490. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ περιηλίου ἀποςήματος εἶναι πρὸς τὴν τετραγωτὸ ΘΒ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, δι' ὃν ϗ τὸ ὁλόκληρον ἡμικύκλιον ΒΑΔ φαίνεται μόνον ὡς μία ἁπλῆ διάμετρος ΒΘΔ, ϗ δι' ὃν ἓν ὁλόκληρον ἡμισφαίριον φαίνεται ὡς ἕνας κύκλος, ἢ ἐπίπεδον, ὁποῦ χρησιμεύει εἰς αὐτὸ ὡς βάσις, ϗ ὁποῦ εἶναι ὡς προβολὴ, ἢ ἀκτὶς αὐτοῦ (669). Τὸ μερίδιον ΒΘ τῆς ὁρατῆς διαμέτρου ΒΘΚΔ εἶναι τὸ πλάγιον ἡμίτ. τοῦ τόξου ΒΑ· αὐτὸ τὸ τόξον ΒΑ, ἢ ἡ γωνία ΚΓΑ, εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΚΓΙ, ἂν ὑποτεθῇ ἡ ΚΕ παράλληλος μὲ τὴν ΚΗ· ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΚΑ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς γωνίας ΕΚΓ, διὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΚΓ· ἀλλ' ἡ γωνία ΕΚΓ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς γωνίας ΕΓΚ, διὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΕΓ. Ἄρα ἡ γωνία ΒΚΑ εἶναι τόσων μοιρῶν, ὅσων ϗ ἡ γωνία ΕΓΚ· αὐτὴ ἡ γωνία ΕΓΚ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐκμήκυνσιν τῆς Σελήνης, ἢ μὲ τὸ ἀπόστημα τῆς Σελήνης ἀπὸ τὸν ἥλιον, ἐπειδὴ ὁ Ἥλιος ὑποθέτεται ἐπάνω εἰς τὴν γραμμὴν ΓΕ, καθὼς ϗ ἐπάνω εἰς τὴν γραμμὴν ΚΗ, διὰ τὸ ἀπόστημα τοῦ ἡλίου, ὁποῦ εἶναι 400 φοραῖς μεγαλήτερον ἀπὸ τὴν ΚΓ, ϗ ὁποῦ κάμνει νὰ ἦναι αἱ γραμμαὶ ΚΗ καὶ ΓΕΛ αἰσθητῶς παράλληλοι (642). Ἄρα τὸ τόξον ΒΑ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐκμήκυνσιν τῆς Σελήνης. Ἄρα εἰς τὰς διαφόρους φάσεις τῆς Σελήνης τὸ πλάτος τοῦ φωτεινοῦ τμήματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλάγιον ἡμίτ. τῆς γωνίας τῆς ἐκμηκύνσεως, ἂν ληφθῇ ὡς ἀκτὶς ἡ ἀκτὶς ἡ ἰδία τοῦ δίσκου τῆς Σελήνης, ἢ τὸ ἡμιδιάστημα τῶν κεράτων τοῦ μηνίσκου. Λόγ. χάριν, ὅταν ἡ Σελήνη, 4 ἢ πέντε ἡμέρας μετὰ τὸν σύνδεσμόν της ἀπέχει, 60° ἀπὸ τὸν ἥλιον, τὸ φωτεινόν της μέρος ΒΘ φαίνεται τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΒΚ, ἢ τὸ τέταρτον τῆς ὁλοκλήρου διαμέτρου ΒΔ τῆς σελήνης, ἐπειδὴ τὸ πλάγιον ἡμίτ. τῶν 60° εἰς ἕνα ὁποιονοῦν κύκλον εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ τοῦ κύκλου. Ἂν ὁ δίσκος τῆς σελήνης παρίσταται ἀπὸ ἕνα κύκλον ΛΒΟ (σχ. 68), τοῦ ὁποίου Κ εἶναι τὸ κέντρον, ΒΘ, ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΚΒ, ἔσται ΒΘ ὡς πλάτος τοῦ μηνίσκου τῆς σελήνης εἰς τὰς 60° ἐκμηκύνσεως.

§. 551. Ὅταν αἱ γραμμαὶ ΚΗ καὶ ΓΕ δὲν εἶναι αἰσθητῶς παράλληλοι, δὲν εἶναι πλέον τὸ πλάγιον ἡμίτ. τῆς ἐκμηκύνσεως, ἀλλὰ εἶναι τὸ πλάγιον ἡμίτ. τῆς ἐκτὸς γωνίας τοῦ τριγώνου ὁποῦ γίνεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ πλανήτου ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας, ὁποῦ πηγαίνουν εἰς τὸν ἥλιον καὶ εἰς τὴν γῆν. Ἔσω Υ ὁ πλανήτης τῆς Ἀφροδίτης (σχ. 67), Η ὁ ἥλιος, Γ ἡ γῆ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΓΥΩ τοῦ τριγώνου ΗΥΓ ἔσται ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΗΥΑ, ἐπειδὴ καὶ ἡ μία, καὶ ἡ ἄλλη εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς γωνίας ΑΥΓ. Ἀλλὰ τὸ φωτισμένον μέρος καὶ ὁρατὸν ΒΘ εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλάγιον ἡμίτ. τῆς γωνίας ΒΥΑ· ἄρα, ἡ ὁλόκληρος διάμετρος εἶναι πρὸς τὸ πλάτος τοῦ φωτισμένου καὶ ὁρατοῦ μέρους ἑνὸς πλανήτου, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὸ πλάγιον ἡμίτ. τῆς εἰς τὸ κέντρον τοῦ πλανήτου γωνίας, ἐξωτερικῆς εἰς τὸ τρίγωνον, ὁποῦ γίνεται εἰς τὸν ἥλιον, εἰς τὴν γῆν, καὶ εἰς τὴν σελήνην.

§. 552. Ἡ Καμπύλη γραμμὴ ΛΘΟ (σχ. 68), ὁποῦ σχηματίζει τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ μηνίσκου, εἶναι μία ἔλλειψις, τῆς ὁποίας ὁ μεγάλος ἄξων ΛΟ εἶναι ἴσος νικὴν ῥίζαν τοῦ ἀφηλίου ἀποστήματος, ὡς ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀληθινῆς ἀνωμαλίας πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμίσεος τῆς ἐκκεντρικῆς ἀνωμαλίας.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΗΡ καὶ ΒΚΡ, ἂν μεταχειρισθῶμεν τὰς ἐκφράσεις τοῦ 488 ἄρθρου, ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν· ἐφ. $\frac{1}{2}$ ΜΗΡ : ἐφ. $\frac{1}{2}$ ΒΚΡ :: $\frac{\text{ΡΜ}}{\text{ΗΡ}+\text{ΗΜ}} : \frac{\text{ΡΒ}}{\text{ΚΡ}+\text{ΚΒ}}$· ἂν τεθῇ ἀντὶ τοῦ λόγου ΡΜ πρὸς ΡΒ, ὁ τῆς ΚΔ πρὸς τὴν ΚΑ, ἡ ὁποία εἶναι μὲ αὐτὴν ἴση διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ἐλλείψεως, καὶ ἀντὶ ΗΡ + ΗΜ τὴν τιμήν της $\text{ΠΡ} \times \frac{\text{ΗΑ}}{\text{ΚΑ}}$ (489), καὶ τέλος ΠΡ ἀντὶ ΚΡ + ΚΒ, μεταβάλλεται ἐκείνη ἡ ἀναλογία εἰς ταύτην· ἐφ. $\frac{1}{2}$ ΜΗΡ : ἐφ. $\frac{1}{2}$ ΒΚΡ :: $\frac{\text{ΚΔ}\times\text{ΚΑ}}{\text{ΠΡ}\times\text{ΗΑ}} : \frac{\text{ΚΑ}}{\text{ΠΡ}}$ :: ΚΔ : ΗΑ, ἢ ἐπειδὴ $\text{ΚΔ} = \sqrt{\text{ΗΔ}^2 - \text{ΚΗ}^2}$ :: $\sqrt{\alpha\alpha - \iota\iota} : \alpha + \iota :: \sqrt{\alpha - \iota} : \sqrt{\alpha + \iota}$ (διαιρουμένων τῶν δύο ἐσχάτων ὅρων μὲ $\sqrt{\alpha + \iota}$)· ὅθεν ἔστιν ἐφ. $\frac{1}{2}$ ΜΗΡ : ἐφ. $\frac{1}{2}$ ΒΚΡ :: $\sqrt{\alpha - \varepsilon} : \sqrt{\alpha + \varepsilon} :: \sqrt{\text{ΠΗ}} : \sqrt{\text{ΗΑ}}$.

§. 491. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἐκκεντρικῆς ἀνωμαλίας, καὶ τῆς μέσης ἀνωμαλίας εἶναι ἴση μὲ τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς ἐκκεντρότητος διὰ τοῦ ἡμιτόνου τῆς ἐκκεντρικῆς ἀνωμαλίας.

Ο' κυκλικὸς τομεὺς ΑΒΗΑ εἶναι ἴσος μὲ τὸν τομέα τῆς μέσης ἀνωμαλίας ΑΚΧ (487)· ἂν ἀφαιρεθῇ ἢ ἀπὸ τὲς δύο τὸ κοινὸν μέρος ΑΚΒ, ἔςαι ὁ τομεὺς ΒΚΧ ἴσος μὲ τὸ τρίγωνον ΚΒΗ. Η' ἐπιφάνεια τῦ κυκλικῦ τομέως ΒΚΧ εἶναι ἴση μὲ τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς ΚΒ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῦ τόξυ ΒΧ· ἡ ἐπιφάνεια τῦ τριγώνυ ΚΒΗ εἶναι ἴση μὲ τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς ΚΒ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῦ ὕψυς ΗΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι μία κάθετος, καταχθεῖσα ἀπὸ τὴν ἑςίαν Η ἐπάνω εἰς τὴν βάσιν ΒΚ, προεκβληθεῖσαν ὑπὲρ τὸ κέντρον Γ· ὅτω λοιπὸν ἐπειδὴ αἱ δύο ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι, καὶ ἔχυν ἕνα παράγοντα ΚΒ, ὁπῦ εἶναι κοινὸς ἢ τῶν δύο, καὶ οἱ ἄλλοι παράγοντες ἔσονται ἴσοι· ἄρα τὸ τόξον ΒΧ εἶναι ἴσον μὲ τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ΗΓ, ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΗΓΚ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ, ἔςιν ΗΓ = ΚΗ × ἡμίτ. ΓΚΗ, κατὰ τὲς κανόνας τῆς ἐπιπέδυ τριγωνομετρίας, ἄρα ΒΧ = ΚΗ × ἡμίτ. ΓΚΗ = ΚΗ × ἡμιτ. ΑΚΒ· ἄρα ἡ διαφορὰ ΒΧ μεταξὺ τῆς ἐκκεντρικῆς ἀνωμαλίας ΑΒ, ἢ τῆς μέσης ἀνωμαλίας ΑΧ εἶναι ἴση μὲ τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς ἐκκεντρότητος ΚΗ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἐκκεντρικῆς ἀνωμαλίας ΑΚΒ.

§. 492. Ὅλας τὰς ἀνωμαλίας τῶν πλανητῶν συνηθίζυν νὰ τὰς ἐκφράζυν μὲ λεπτὰ καὶ μὲ δεύτερα· λοιπὸν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν εἰς δεύτερα μεταξὺ τῆς μέσης ἀνωμαλίας, ἢ τῆς ἐκκεντρικῆς ἀνωμαλίας, πρέπει ἢ ἡ ἐκκεντρότης νὰ ἐκφράζηται καὶ αὐτὴ ὡσαύτως εἰς δεύτερα. Ἂν ἡ ἐκκεντρότης τῦ πλανήτυ ἐκφρασθῇ εἰς μέρη τῦ αὐτῦ εἴδυς, ὡς ἢ τὸ μέσον ἀπόςημα, θέλομεν εἰπεῖ, τὸ μέσον ἀπόςημα εἶναι πρὸς τὴν ἐκκεντρότητα, ὡς ὁ ἀριθμὸς τῶν 206264″, 8, ὁπῦ περιέχει ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλυ (ἢ περίπυ 57°) πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν δευτέρων, ὁπῦ περιέχει ἡ ἐκκεντρότης. Ἂν αὐτὴ ἡ ἐκκεντρότης δοθῇ εἰς κλάσμα τῦ μέσυ ἀποστήματος αὐτῦ τῦ πλανήτυ, πολλαπλασίασον μόνον μὲ τὰ 206264, 8, (ὁπῦ ἀποτελῦν τὸ τόξον, ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα,) διὰ νὰ εὕρῃς αὐτὴν τὴν ἐκκεντρότητα εἰς δεύτερα.

§. 493. Διὰ μέσυ τῶν δύο θεωρημάτων (490, 491) εὑρίσκεται εὔκολα ἡ μέση ἀνωμαλία, ὅταν δοθῇ ἡ ἀληθινὴ ἀνωμαλία· ἀλλὰ τὸ κύριον πρόβλημα συνίσταται εἰς τῦτο νὰ εὕρωμεν τὴν ἀληθινὴν ἀνωμαλίαν, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ μέση. Εἶναι δὲ διάφοροι οἱ τρόποι, φέροντες κατ' εὐθεῖαν εἰς τὴν λύσιν τῦ προβλήματος, μὲ ὅλον ὁπῦ μεταχειριζόμεθα ἐν τύτοις, τὸ, ὡς ἔγγιστα· ἀλλὰ προκρίνομεν ὡς εἴθισται, νὰ ὑποθέτωμεν κατὰ τὸ δοκῦν μίαν ὁποιανῦν ἀληθινὴν ἀνωμαλίαν, καὶ νὰ τὴν μεταβάλλωμεν εἰς μέσην κατὰ τὺς προηγυμένυς κανόνας. Ἂν ἐκείνη, ὁπῦ εὑρίσκεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, δὲν εἶναι ἴση μὲ ἐκείνην ὁπῦ ἦτον δεδομένη, τῦτο εἶναι ἕνα φανερὸν σημεῖον, ὅτι ἡ ὑπόθεσις δὲν ἦτον ἀκριβής, καὶ τότε κάμνομεν μίαν ἄλλην ὑπόθεσιν ἀληθινῆς ἀνωμαλίας, ἕως ὁπῦ νὰ ὑποθέσωμεν μίαν ἀληθινὴν ἀνωμαλίαν, ὁπῦ παράγῃ ἀκριβῶς τὴν δεδομένην μέσην ἀνωμαλίαν. Οἱ πίνακες, ὁπῦ εἶναι ἤδη ὅλοι ἐπεξειργασμένοι διὰ κάθε πλανήτην, καὶ διὰ κάθε βαθμὸν ἀνωμαλίας, ἀποκατασταίνυν αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις εὐκολοευρέτυς σχεδὸν μὲ τὴν πρώτην ὀμματιάν.

§. 494. Ἀφ' ȣ̃ εὑρεθῆ ἡ ἀληθινὴ ἀνωμαλία, εὔκολα εὑρίσκεται τὸ ἀπὸ τὸν ἥλιον ἀπόστημα, ἢ ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς ΗΜ διὰ τῆς ἑξῆς ἀναλογίας. Τὸ ἡμιτ. τῆς ἀληθινῆς ἀνωμαλίας εἶναι πρὸς τὸ ἡμιτ. τῆς ἐκκεντρικῆς ἀνωμαλίας, ὡς τὸ ἥμισυ τȣ̃ μικρȣ̃ ἄξονος πρὸς τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα. Διότι, ἂν ἀχθῆ ἡ γραμμὴ ΒΤ (σχ. 56.) παράλληλος μὲ τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα ΜΗ, προκύψει διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ἥδε ἡ ἀναλογία, ΗΜ : ΤΒ : : ΡΜ : ΡΒ : : ΚΔ : ΚΒ, ἢ ΚΒ : ἄρα ΗΜ . ΚΔ : : ΤΒ : ΚΒ : : ἡμ. ΤΚΒ : ἡμιτ. ΚΒ : : ἡμ. ΡΚΒ : ἡμ. ΡΗΜ· ἄρα ἡμ. ΚΗΜ : ἡμ. ΒΚΗ : : ΚΔ : ΗΜ· αὕτη εἶναι ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τȣ̃ Κεπλέρȣ, ϗ τέτοια εἶναι ἡ ἀναλογία, ὁπȣ̃ ἠμπορȣ̃μεν νὰ μεταχειρισθῶμεν διὰ νὰ λογαριάσωμεν τὰς πίνακας τῶν ἀποστημάτων τῶν πλανητῶν εἰς κάθε μοῖραν ἀνωμαλίας.

§. 495. Διὰ τῆς ἐλλειπτικῆς ἁπλῆς ὑποθέσεως, ὁπȣ̃ μεταχειρίζονται, ὅταν δὲν ἦναι ἀναγκαία μία πολλὰ μεγάλη ἀκρίβεια, εὐκολύνεται πολλὰ ὁ λογαριασμός· ἐπειδὴ δι' αὐτῆς ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῆ ἡ ἀληθινὴ ἀνωμαλία μὲ μίαν ἁπλῆν ἀναλογίαν. Ὁ Βȣλλιὼ ἔδειξεν εἰς τὰ 1645, ὅτι ἡ κίνησις ἑνὸς πλανήτȣ εἰς μίαν ἐλλειπτικὴν τροχιὰν φαίνεται ὁμοειδὴς, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι βλέπεται ἀπὸ τὴν ἀνωτέραν ἑστίαν Ε τῆς ἐλλείψεως. Ὁ Σεθβάρδιος, εἰς τὰ 1656, ἐφεῦρε μίαν μέθοδον πολλὰ ἁπλῆν τȣ̃ νὰ λογαριάζωμεν τότε τὴν ἀληθινὴν ἀνωμαλίαν· ΕΣ προεκβάλλεται τόσον (σχ. 57.), ὥστε ἡ ΣΙ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΣΗ, ϗ ἄγεται ἡ ΗΙ· ἐκ τέτε γενήσεται τρίγωνον τὸ ΣΕΙ, εἰς τὸ ὁποῖον, κατὰ μίαν ἀναλογίαν γνωςὴν τῆς Τριγωνομετρίας, Τὸ ἡμικεφάλαιον τῶν δύο πλευρῶν, εἶναι αἱ ΕΙ, καὶ ΕΣ εἶναι πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν, ὡς ἡ ἐφαπτομένη τῦ ἡμικεφαλαίε τῶν προσκειμένων γωνιῶν Η, Ι, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν. Ἄς ἀντικαταςήσωμεν ἄλλας ὀνομασίας εἰς τὸν τόπον τῶν τεσσάρων αὐτῶ ὅρων; τὸ ἡμικεφάλαιον τῶν ΕΗ, ϗ ΕΙ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἀφήλιον ἀπόςημα ΗΑ· ἐπειδὴ ΕΙ, ἢ ΕΣ ὁμῦ μὲ τὴν ΟΣΗ εἶναι ἴση μὲ τὸν μεγάλον ἄξονα· ὅθεν ΕΙ ὁμῦ μὲ ΕΗ ἀξίζει ὅσον ὁ μέγας ἄξων μὲ διπλῆν ληφθεῖσαν τὴν ἐκκεντρότητα, ϗ ἂν ληφθῆ τὸ ἥμισυ τῦ ὅλυ τὸ ἡμικεφάλαιον τῆς ΕΙ ϗ ΕΗ εὑρίσκεται ὅτι εἶναι ὁ ἡμιάξων ὁμῦ μὲ τὴν ἐκκεντρότητα, ὅ ἐςι, ΗΑ. Δῆλον δὲ, ὅτι ἡ ἡμιδιαφορά των εἶναι ἴση μὲ τὴν ΗΠ. τὸ ἡμικεφάλαιον τῶν γωνιῶν Ι ϗ Η εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐκτὸς γωνίας ΑΕΙ, ἢ τῆς μέσης ἀνωμαλίας. Τέλος πάντων ἡ ἡμιδιαφορὰ αὐτῶν εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀληθινῆς ἀνωμαλίας ΕΗΣ, ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς γωνίας ΕΗΙ, ϗ τῆς γωνίας ΣΗΙ (ἴσης μὲ τὴν ΣΙΗ), εἶναι ἡ γωνία ΕΗΣ· διὰ τέτε ἡ προηγεμένη ἀναλογία μεταβάλλεται εἰς τήνδε. Τὸ ἀφήλιον ἀπόςημα εἶναι πρὸς τὸ περιήλιον ἀπόςημα, ὡς ἡ ἐφαπτομένη τῦ ἡμίσεος τῆς μέσης ἀνωμαλίας, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῦ ἡμίσεος τῆς ἀληθινῆς ἀνωμαλίας.

Ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς ΗΣ εὑρίσκεται μὲ τὴν ἰδίαν εὐκολίαν διὰ μέσυ τῦ τριγώνυ ΗΣΕ, ἂν λέγωμεν, τὸ ἡμίτ. τῆς ἐξισώσεως τῆς τροχιᾶς ΕΣΗ εἶναι πρὸς τὴν διπλῆν ἐκκεντρότητα ΕΗ, ὡς τὸ ἡμίτ. τῆς γωνίας Ε, ἢ τῆς μέσης ἀνωμαλίας, πρὸς τὸ ἀπὸ τὸν ἥλιον ἀπόςημα τῦ πλανήτυ, εἰς τὴν ἐλλειπτικὴν ἁπλῆν ὑπόθεσιν.

Περὶ τῆς ἐξισώσεως τῆς Τροχιᾶς.

§. 496. Ἠμπορῦμεν, θεωρῦντες τὸ σχῆμα 57, νὰ καταλάβωμεν ὅλας τὰς ἰδιότητας τῆς ἀνίσυ κινήσεως τῶν πλανητῶν, καὶ τῆς ἐξισώσεως τῆς τροχιᾶς· 1ν Αὕτη ἡ ἐξίσωσις εἶναι ὡς ὐδὲν εἰς τὸ Α, ὅ ἐςιν, εἰς τὴν ἀνωτέραν ἀψῖδα (ἀφηλιότητα, ἢ ἀπογειότητα)· ἐπειδὴ πρὸς αὐτὸ τὸ σημεῖον ὁ μέσος τόπος, καὶ ὁ ἀληθινὸς μίγνυνται, καὶ αἱ γραμμαὶ ΕΣ καὶ ΗΣ συμπίπτυν, ἂν κινῶνται ἀπὸ τὴν ἀνωτέραν ἀψῖδα, ἡ διαφορά των αὐξάνει πολλὰ ταχέως· ἐπειδὴ ἡ ἀληθινὴ ταχύτης, ἥτις εἶναι εἰς τὸ Α, ἐλαχίςως διαφέρει τὰ μάλιςα ἀπὸ τὴν μέσην ταχύτητα. 2ν Αὕτη ἡ διαφορὰ αὔξεται κάθε ἡμέραν, ἐφ᾽ ὅσον ἡ ἀληθινὴ ταχύτης εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν μέσην ταχύτητα· ὅταν εἶναι ἴσαι, εὑρίσκεται ἕνα σημεῖον Θ, πρὸς τρία ζώδια, καί τινας μοίρας τῆς μέσης ἀνωμαλίας, ὅπυ ἡ διαφορὰ αὔξησεν ἕως τότε, ἔγινε μεγίςη, καὶ ὅπυ ἡ ἐξίσωσις, ὅ ἐςιν, ἡ γωνία ΕΣΗ, παύει ἀπὸ τῦ νὰ αὐξάνῃ, ἐπειδὴ σχεδὸν μένει ἡ αὐτὴ χρόνον τινά, διὰ νὰ μειωθῇ ὕςερα, ἕως εἰς τὴν κατωτέραν ἀψῖδα Π, ὅπου ὁ μέσος τόπος, καὶ ὁ ἀληθινὸς εἶναι πάλιν ἴσοι ἀλλήλοις. 3ον. Ἡ ἐξίσωσις εἶναι μειωμένη εἰς τὰ α. ἕξ ζώδια, εἰς διατήρησιν τοῦ ἀληθοῦς τόπου, καὶ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν μέσον τόπον, ἢ ἀπὸ τὴν μέσην ἀνωμαλίαν ΑΕΣ, διὰ νὰ προκύψῃ ὁ ἀληθινὸς τόπος· ἐπειδὴ ἡ μέση ταχύτης, ἀπὸ τὴν ἀνωτέραν ἁψῖδα, εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ τὴν ἀληθινὴν ταχύτητα· διὰ τοῦτο ὁ μέσος τόπος προχωρεῖ περισσότερον· ἀφαιρετέον ἄρα ἀπὸ τὸ μέσον μῆκος τὸ μέγεθος τῆς ἐξισώσεως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀληθινὸν τόπον. Τὸ ἐναντίον συμβαίνει μετὰ τὴν διάβασιν διὰ τοῦ Π, ὅπου ἡ ἀληθινὴ ταχύτης εἶναι ἡ μεγίστη.

§. 497. Ἡ μεγίστη ἐξίσωσις ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ δι' ἑνὸς ἀκριβοῦς λογαριασμοῦ, καθὼς καὶ ἡ μοῖρα τῆς μέσης ἀνωμαλίας, ὅπου συμβαίνει αὕτη ἡ μεγίστη ἐξίσωσις· εἰς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον Μ (σχ. 58) εἰς τὸ ὁποῖον συμβαίνει ἡ μέση ταχύτης. Διότι εὐθὺς ὁποῦ ὁ πλανήτης φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον, ὅπου ἡ γωνία ταχύτης ΔΕΡ (ὅ ἐστιν, ἡ γωνία ὁποῦ διατρέχει, βλεπόμενος ἀπὸ τὸν ἥλιον) εἶναι ἴση μὲ τὴν μέσην ταχύτητα, (π. χ. 59′ 8″ ὁσημέραι ἂν εἶναι ἡ γῆ), τὸ μέσον μῆκος παύει ἀπὸ τοῦ νὰ ὑπερπηδᾷ τὸ ἀληθινὸν μῆκος· τότε διαφέρει ὅσον μάλιστα δυνατόν· ἐπειδὴ ἕως εἰς ταύτην τὴν στιγμὴν ἡ ἐνεργείᾳ ταχύτης, ὁποῦ ἦτον μικροτέρα, ἔκαμνε νὰ μένῃ ὀπίσω κάθε ἡμέραν ὁ ἀληθινὸς τόπος ἀπὸ τὸν μέσον τόπον· ἀλλ' εὐθὺς ὁποῦ ἡ ἀληθινὴ ταχύτης ἔγεινεν ἴση μὲ τὴν μέσην ταχύτητα, ἄρχεται νὰ τὴν ὑπερβαίνῃ, καὶ σπουδάζει νὰ κερδήσῃ πάλιν ἐκεῖνο, ὁποῦ εἶχε χάσει ἕως τότε, ὁ ἀληθινὸς τόπος πλησιάζει εἰς τὸν μέσον τόπον, καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς τροχιᾶς μειοῦται. Ὥστε ὅλη ἡ δυσκολία συνίσταται εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον Μ, καὶ τὴν ἀληθινὴν ἀνωμαλίαν ΑΕΜ τοῦ πλανήτου εἰς τὴν στιγμὴν, ὅπου ἡ ταχύτης του εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνιακὴν μέσην ταχύτητα. Ἂν ληφθῇ μία γραμμὴ ΕΜ, μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο ἡμιαξώνων τῆς τροχιᾶς, θέλομεν περιγράψει ἀπὸ τὴν ἑστίαν Ε, ὡς κέντρον, ἕνα κύκλον ΜΒ ἐπάνω εἰς τὴν ἀκτῖνα ΕΜ, καὶ αὐτὸς ὁ κύκλος θέλει ἔχει μίαν ἐπιφάνειαν ἴσην μὲ τὴν τῆς ἐλλείψεως, καθὼς ἀποδείχνεται εἰς τὰς κωνικὰς τομάς. Ἂς ὑποθέσωμεν ἕνα σῶμα, ὅπου περιγράφει τὸν κύκλον ΜΒ εἰς ἕνα χρόνον, ἴσον μὲ τὸν τῆς περιφορᾶς τοῦ πλανήτου εἰς τὴν ἔλλειψίν του· ἡ γωνιακή του ταχύτης θέλει εἶναι ἀεὶ ἴση μὲ τὴν μέσην γωνιακὴν ταχύτητα τοῦ πλανήτου, π. χ., 59′, 8″ διὰ τὴν γῆν· ἡ εἰς τὸν κύκλον περιγραφεῖσα ἐπιφάνεια, θέλει εἶναι πάντοτε ἴση μὲ τὸ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον περιγραφόμενον ἐμβαδὸν εἰς τὴν ἔλλειψιν· ἐπειδὴ τὰ ὅλα ἐμβαδὰ εἶναι ἴσα ἀλλήλοις, καὶ διατρέχονται εἰς ἴσους χρόνους, ὥστε αἱ διάρκειαι τῶν περιφορῶν εἶναι αἱ αὐταὶ, καὶ τὰ μερικὰ ἐμβαδὰ τῆς ἐλλείψεως ἀνάλογα μὲ τὰ μέρη τοῦ χρόνου· π. χ. ἂν ἡ γῆ περιγράφῃ εἰς μίαν ἡμέραν ἕνα ἐμβαδὸν ΔΕΡ, τοῦ ὁποίου τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον, ἴσον μὲ τὸ 365ον μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐλλειπτικῆς, τὸ ἐμβαδὸν ΙΕΩ, τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, θέλει εἶναι ὡσαύτως τὸ 365ον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου (ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ τὴν ἔλλειψιν)· ἡ ἀληθινὴ ἄρα ταχύτης τῆς γῆς (ἢ ἡ γωνία ΔΕΡ) θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν μέσην ταχύτητα εἰς τὸ Μ, ὅ ἐςι, μὲ τὴν γωνίαν ΔΕΩ· ἐπειδὴ εἶναι δύο τομεῖς ἴσοι, οἱ ὁποῖοι ἔχυν τὸ αὐτὸ μῆκος ΕΜ, τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, ἢ ἀκολέθως τὴν αὐτὴν γωνίαν· διὰ νὰ δείξωμεν ὅμως ἀκριβῶς, ὅτι εἶναι ἴσοι, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἴσα τρίγωνα ΜΕΔ, ΜΡΩ, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ ἕνα εἶναι ἐκτὸς τῦ κύκλυ, καὶ τὸ ἄλλο ἐντὸς, ἢ τὰ ὁποῖα δείχνυν, ὅτι ὁ ἐλλειπτικὸς τομεὺς εἶναι ἴσος μὲ τὸν κυκλικὸν, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν αὐτὴν γωνίαν εἰς τὸ Ε. Λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τῆς μέσης ταχύτητος, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν τομὴν Μ τῆς ἐλλείψεως μὲ τὸν κύκλον, ὁπῦ εἶναι ἴσος μὲ αὐτὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν. Ἂν ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ ἀχθῇ εἰς τὴν ἑςίαν Θ τῆς ἐλλείψεως μία γραμμὴ ΜΘ, προκύψει τὸ τρίγωνον ΘΕΜ, τῦ ὁποίυ εἶναι γνωςαὶ αἱ τρεῖς πλευραί· δηλαδὴ ἡ ΘΕ, ἡ ὁποία εἶναι τὸ διπλῦν τῆς ἐκκεντρότητος· ἡ ΕΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο ἡμιαξόνων, ἢ ἡ ΘΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ΕΜ, ἢ τῦ μεγάλυ ἄξονος (ἐπειδὴ αἱ δύο γραμμαὶ ΕΜ ἢ ΜΘ ἅμα, εἶναι ἴσαι μὲ τὸν μεγάλον ἄξονα)· λοιπὸν, λύοντες τὸ τρίγωνον ΘΕΜ, θέλομεν ζητήσει τὴν γωνίαν Ε, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀληθινὴ ἀνωμαλία τῦ πλανήτυ εἰς τὸ σημεῖον τῆς μεγίςης ἐξισώσεως.

Λόγυ χάριν, ἂν ἦναι ὁ ἡμιάξων ΚΑ = 38710, ἢ ὁ συζυγὴς ἡμιάξων = 37883, καθὼς εἰς τὴν τροχιὰν τῦ Ἑρμῦ ἔςαι ΚΕ = 7955½, ΘΕ = 15911, ΕΜ = 38294· λύσας τὸ τρίγωνον ΘΕΜ, ἕξεις τὴν γωνίαν ΘΕΜ 81° 6′ 5″· αὕτη εἶναι ἡ ἀληθινὴ ἀνωμαλία εἰς τὸν χρόνον τῆς μεγίςης ἐξισώσεως· ὅθεν ἠμπορȣ̃μεν νὰ συμπεράνωμεν (493) τὴν μέσην ἀνωμαλίαν ὅτι εἶναι 104° 46′ 5″. Ἐπομένως ἡ διαφορά των, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τȣ̃ κέντρȣ, θέλει εἶναι 23° 40′ 0″· ὅθεν τȣ̃το πρέπει νὰ εἶναι ἡ μεγίςη ἐξίσωσις τῆς τροχιᾶς τȣ̃ Ἑρμȣ̃, ἢ 40″ ἀκόμι.

§. 498. Ἀφ' ȣ̃ ἐδείξαμεν τὸν τρόπον τȣ̃ νὰ λογαριάζωμεν τὴν ἐξίσωσιν, ἂς ὁμιλήσωμεν ϗ διὰ τὸν τρόπον τȣ̃ νὰ παρατηρῆται. Ὑποθέτω, ὅτι πάρεςιν ἕνας μέγας ἀριθμὸς μηκῶν παρατηρηθέντων, ὅταν ὁ πλανήτης εἶναι εἰς ἀντίθεσιν, ἢ εἰς σύνοδον, ὅ ἐςι, τοιȣ́των, ὡσὰν νὰ εἶχον παρατηρηθῆ ἀπὸ τὸ κέντρον τὸ ἴδιον τȣ̃ ἡλίȣ· θέλȣν εὑρεθῆ δύο, π. χ. εἰς τὸ Κ ϗ εἰς τὸ Μ, ὁπȣ̃ θέλȣν διαφέρει ἀναμεταξύτων τόσον, ὅσον ἡ γωνία ΛΕΜ, ἡ ὁποία εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἀληθινῶν ἀνωμαλιῶν· ἀλλὰ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο μέσων ἀνωμαλιῶν ΑΘΜ, ΑΘΛ, θέλει εἶναι μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ διπλȣ̃ν τῆς ἐξισώσεως, ἐπειδὴ κάθε ἀληθινὸν ἀπόςημα, εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ μέσον ἀπόςημα τόσον, ὅσον ἀποτελεῖ ἡ μεγίςη ἐξίσωσις. Εἶναι εὔκολον νὰ λογαριάσωμεν εἰς κάθε καιρὸν τὸ κεφάλαιον τῶν δύο μέσων ἀνωμαλιῶν, μὲ ὅλον ὁπȣ̃ δὲν γνωρίζομεν τὸν τόπον τῆς ἀφηλιότητος Α, ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο μέσων ἀνωμαλιῶν εἶναι ἴσον μὲ τὴν μέσην κίνησιν τȣ̃ πλανήτȣ εἰς τȣ̃το τὸ χρονικὸν διάςημα, ϗ εὑρίσκεται εὔκολα, ἂν ἐξεύρωμεν τὴν διάρκειαν τῆς περιφορᾶς· κατὰ τȣ̃τον τὸν τρόπον ἡ λογαριασθεῖσα ὑπεροχὴ τῆς μέσης κινήσεως ὑπὲρ τὴν ἀληθινὴν παρατηρημένην κίνησιν, δίδει τὸ διπλοῦν τῆς μεγίστης ἐξισώσεως, ἂν μόνον ἔγειναι αὐταὶ αἱ δύο παρατηρήσεις εἰς τὸ Μ καὶ εἰς τὸ Λ, ὅ ἐστιν εἰς τοὺς χρόνους τῆς μέσης ταχύτητος.

Ἡ ἀληθινὴ κίνησις θέλει εἶναι ἐπισημοτάτη, ἂν γένῃ ἡ πρώτη παρατήρησις πρὸ τῆς περιηλιότητος, καὶ ἡ δευτέρα μετ᾽ αὐτήν, καθὼς εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα (500).

§. 499. Διὰ νὰ διαλέξωμεν τοὺς ἁρμοδίους εἰς ταύτην τὴν ἔρευναν καιρούς, καὶ παρατηρήσεις, ἕνας παρατηρητὴς μόνος ἱστάμενος, ὁποῦ δὲν ἤθελεν ἰξεύρῃ μὲ κἀνένα τρόπον τὴν θέσιν τῆς τροχιᾶς τοῦ πλανήτου, καὶ τῶν σημείων Λ καὶ Μ, ἂς συνάζῃ μόνον ἕνα μεγάλον ἀριθμὸν παρατηρηθεισῶν στάσεων, καὶ ἀναχθεισῶν εἰς τὸν ἥλιον· καὶ ἂν εἶναι πρωτεύοντες πλανῆται, ἂς τοὺς συγκρίνῃ ἀπὸ δύο, καὶ ἂς ἰδῇ, πόσον ἡ ἀληθινὴ παρατηρηθεῖσα κίνησις ἤθελε διαφέρῃ ἀπὸ τὴν μέσην κίνησιν λογαριασθεῖσαν εἰς κάθε διάστημα χρόνου· ἡ μεγίστη ἀπὸ ὅλας τὰς διαφορὰς ἤθελε τῷ δώσῃ τὸ διπλοῦν τῆς μεγίστης ἐξισώσεως· διότι μεταξὺ τοῦ ἑνὸς μέσου ἀποστήματος, καὶ τοῦ ἄλλου, ἡ ἀληθινὴ κίνησις διαφέρει ἀπὸ τὴν μέσην κίνησιν κατὰ λόγου τῆς ἐξισώσεως, ἥτις ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὴν μίαν, καὶ προστίθεται εἰς τὴν ἄλλην· ὅθεν ἂν ἔχωμεν παρατηρήσεις, ὁποῦ ἔγειναν εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς τροχιᾶς, ἢ τοὐλάχιστον εἰς ἀρκετὸν ἀριθμὸν αὐτῶν, διὰ νὰ εὑρεθοῦν ἐκεῖ τὰ δύο σημεῖα τῆς μεγίστης ἐξισώσεως, θέλομεν ἀπαντήσει δύο, ὅπου ἡ ἀληθινὴ κίνησις θέλει εἶναι μεγαλητέρα, ἢ μικροτέρα ἀπὸ τὴν μέσην κίνησιν, κατὰ τὸ διπλοῦν τῆς μεγίστης ἐξισώσεως· κατὰ τὸ παρὸν, ὁποῦ εἶναι γνωστοὶ σχεδὸν ἀκριβῶς οἱ τόποι τῶν ἀψίδων, καὶ τῶν μέσων ἀποστημάτων ὅλων τῶν πλανητῶν, ἐκλέγομεν εὐθὺς μόνον τὰς γενομένας παρατηρήσεις πρὸ, καὶ μετὰ τὴν ἀφηλιότητα, περὶ τὸν καιρὸν τῆς μεγίστης ἐξισώσεως, ἢ πρὸ, καὶ μετὰ τὴν περιηλιότητα, καθὼς εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

§. 500. Παράδειγμα. Εἰς τὴν 26 Σεπτεμβρίου 1751 ὁ ἀληθινὸς τόπος τοῦ ἡλίου, παρατηρηθεὶς ἀπὸ τὸν Καΐλλον πρὸ τῆς περιγειότητος, (διὰ τὸ ὁποῖον ἠρευνήθησαν αἱ παρατηρήσεις τριῶν ἡμερῶν, καὶ παρεβλήθησαν πρὸς ἀλλήλας,) εὑρέθη . . . 6ς 13° 47′ 15″.

Εἰς τὰς 17 μαρτίου 1752 τοῦτο τὸ ἀληθινὸν μῆκος ἦτον . . .	0	8	9	26
Ἡ διαφορὰ αὐτῶν τῶν δύο μηκῶν, ἢ ἡ ἀληθινὴ κίνησις τοῦ ἡλίου εἶναι ἄρα	5	24	22	11
Ἀλλ᾽ εἰς τοῦτο τὸ διάστημα τοῦ χρόνου ἡ μέση κίνησις ἔπρεπε νὰ εἶναι κατὰ τὸν λογαριασμὸν . .	5ς	20°	31′	43″
Ἡ διπλῆ διαφορὰ τῆς μεγίστης ἐξισώσεως εἶναι		3	50	28
Τῆς ὁποίας τὸ ἥμισυ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς τροχιᾶς		1	55	14

Δι᾽ ἑνὸς μεγάλου ἀριθμοῦ παρατηρήσεων διωρίσθη εἰς 1° 55′ 31″.

§. 501. Ἐπειδὴ εἶναι σπανιώτατον νὰ εὑρεθοῦν δύω παρατηρήσεις, ὁποῦ ἔγιναν ἀκριβέστατα εἰς τὰ σημεῖα

Μ ϗ Λ τῆς μέσης ταχύτητος, διὰ τοῦτο δὲν εὑρίσκεται δι' ἑνὸς ϗ μόνου λογαριασμοῦ ἡ ἀκριβὴς ποσότης τῆς μεγίστης ἐξισώσεως· ἀφ' οὗ ὅμως εὕρομεν ὅσον ἔγγιστα τὴν μεγίστην ἐξίσωσιν, ϗ τὸν τόπον τῆς ἀψῖδος (507), λογαριάζομεν εἰς τοὺς δύο καιροὺς τῶν παρατηρήσεων τὴν τιμὴν τῆς ἐξισώσεως, ἡ ὁποία συγκριθεῖσα μὲ τὴν μεγίστην (494), δείχνει πόσον ἔλειπε νὰ μὴν ἔχῃ αὕτη χώραν ἀκριβέστατα εἰς τὰς δύο παρατηρήσεις ὁποῦ ἐμεταχειρίσθησαν, ἢ πόσον ἡ ἐξίσωσις ἡ εὑρεθεῖσα διὰ τῶν παρατηρήσεων, ἔπρεπε νὰ διαφέρῃ ἀπὸ τὴν μεγίστην· μὲ τοῦτον τὸν τρόπον ὁ Κάλλιος εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εἶχεν εὕρει 18'' 6, τὰ ὁποῖα ἔπρεπε νὰ προσθέσῃ, διὰ νὰ εὕρῃ τὴν ἀληθινὴν ποσότητα τῆς μεγίστης ἐξισώσεως, ὁποῦ προκύπτει ἀπὸ ταύτας τὰς δύο παρατηρήσεις.

§. 502. Ἠμπορεῖ πρὸς τούτοις νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη ἐξίσωσις, χωρὶς νὰ ἐξεύρωμεν τὸν τόπον τῆς ἀψῖδος, ἂν ληφθῇ μόνον ὡς ἐποχὴ ἓν ὁποιονοῦν μῆκος, ϗ συγκριθοῦν μὲ τοῦτο πολλὰ ἄλλα μήκη διὰ νὰ εὑρεθῇ ἐκ τούτου ἡ παρατηρηθεῖσα ἀληθινὴ κίνησις· θέλομεν δὲ λογαριάσει, διὰ καθε ἕνα ἀπὸ ταῦτα τὰ μεταξὺ διαστήματα τὴν μέσην κίνησιν διὰ τῆς ἐγνωσμένης διαρκείας τῆς περιφορᾶς· ἐξ οὗ προκύψουσι διαφοραὶ προσθετέαι, ἢ ἀφαιρετέαι· ἡ μεγίστη προσθετέα διαφορὰ καὶ ἡ μεγίστη ἀφαιρετέα προστεθεῖσαι, θέλουν δώσει τὸ διπλοῦν τῆς μεγίστης ἐξισώσεως τῆς τροχιᾶς, ἂν ἔγειναν ἱκαναὶ παρατηρήσεις διὰ νὰ εὑρεθοῦν εἰς αὐτὰς τὰ δύο σημεῖα τῆς μεγίστης ἐξισώσεως.

§. 503. Ὅταν εὑρεθῇ διὰ τῆς τηρήσεως ἡ μεγίστη ἐξίσωσις, ϗ θέλωμεν νὰ συμπεράνωμεν ἐκ τέτε τὴν ἐκκεντρότητα, τὸ εὐκολότατον εἶναι νὰ μεταχειρισθῶμεν μίαν μέθοδον ψευδῆς θέσεως, ἢ νὰ ὑποθέσωμεν πρῶτον ἐγνωσμένην τὴν ἐκκεντρότητα τὴν ζητεμένην, διὰ νὰ συμπεράνωμεν ἀπ' αὐτὴν τὴν μεγίςην ἐξίσωσιν (497). Ἂν εὑρεθῇ αὕτη πολλὰ μεγάλη, θέλομεν μειώσει τὴν ὑποτεθεῖσαν ἐκκεντρότητα, ϗ θέλομεν ξαναρχίσει τὸν λογαριασμόν· αὕτη ἡ μέθοδος τῦ προσδιορισμῦ τῆς ἐκκεντρότητος διὰ τῆς μεγίςης ἐξισώσεως, εἶναι συχνὰ εὐκολωτέρα ἀπὸ ἐκείνην ὁπῦ ἐμεταχειρίσθη ὁ Κεπλέρος, διὰ νὰ εὕρῃ τὴν ἐκκεντρότητα τῦ Ἄρεος (468).

§. 504. Ἡ μέθοδος, ὁπῦ ἐγὼ ἐμεταχειρίσθην νὰ εὕρω τὴν ἐκκεντρότητα τῦ Ἑρμῦ, συνίςαται εἰς τὸ νὰ ὑποθέσωμεν τὸν τόπον τῆς ἀφηλιότητος ἐγνωσμένον (509)· τότε δύο παρατηρήσεις, ἀπέχεται σχεδὸν ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην καθ' ἡμιπεριφορὰν, ϗ πορρωτάτω ὖσαι ἀπὸ τὰς ἀψίδας, ἀρκῦν εἰς εὕρεσιν τῆς ἐκκεντρότητος. Διότι, ἂν ἰξεύρωμεν καλὰ τὸν τόπον τῆς ἀφηλιότητος, ἔχομεν δύο ἀληθινὰς ἀνωμαλίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἱκανῶς γνωςαί· αὗται μεταβάλλονται εἰς μέσας ἀνωμαλίας· αἱ ὁποῖαι δὲν ἠμπορῦν νὰ εἶναι ἀκριβεῖς, ἂν ἡ ἐκκεντρότης, ὁπῦ μεταχειρίζονται διὰ νὰ κάμυν τὴν μεταβολὴν, δὲν εἶναι βεβαίως γνωςή· ἡ μία θέλει εἶναι πολλὰ μεγάλη, ϗ ἡ ἄλλη πολλὰ μικρά· ἐπειδὴ εἶναι μία ἐξίσωσις προσθετέα ϗ μία ἀφαιρετέα. Ἂν λοιπὸν ἡ διαφορὰ τῶν δύο μέσων εὑρεθεισῶν ἀνωμαλιῶν δὲν εἶναι ἴση μὲ ἐκείνην, ὁπῦ εἶναι γνωςὴ διὰ τῆς διαρκείας τῆς περιφορᾶς, ϗ διὰ τῦ