ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ β.

$$\begin{array}{l} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \\ \hline \alpha\alpha+\alpha\beta \\ \quad -\alpha\beta-\beta\beta \\ \hline \alpha\alpha-\beta\beta \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. β.

$$\begin{array}{l} 3\alpha\beta-6\gamma\delta+5\varepsilon\varepsilon\zeta \\ 4\alpha\beta-3\varepsilon\zeta \\ \hline 12\alpha\alpha\beta\beta-24\alpha\beta\gamma\delta+20\alpha\beta\varepsilon\varepsilon\zeta \\ -9\alpha\beta\varepsilon\zeta+18\gamma\delta\varepsilon\zeta-15\varepsilon\varepsilon\varepsilon\zeta\zeta \\ \hline 12\alpha\alpha\beta\beta-24\alpha\beta\gamma\delta+20\alpha\beta\varepsilon\varepsilon\zeta-9\alpha\beta\varepsilon\zeta+18\gamma\delta\varepsilon\zeta-15\varepsilon\varepsilon\varepsilon\zeta\zeta. \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. γ.

$$\begin{array}{l} 6\chi\chi-7\alpha\chi+8\alpha\alpha \\ 2\chi\chi-3\alpha\chi+8\alpha\alpha \\ \hline 12\chi\chi\chi\chi-14\alpha\chi\chi\chi+16\alpha\alpha\chi\chi \\ \qquad -18\alpha\chi\chi\chi+12\alpha\alpha\chi\chi-24\alpha\alpha\alpha\chi \\ \qquad\qquad +24\alpha\alpha\chi\chi-28\alpha\alpha\alpha\chi+32\alpha\alpha\alpha\alpha. \\ \hline 12\chi\chi\chi\chi-32\alpha\chi\chi\chi+61\alpha\alpha\chi\chi-52\alpha\alpha\alpha\chi+32\alpha\alpha\alpha\alpha. \end{array}$$

ΣΧΟ-

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ γ.

§. 28. Εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προσέχωμεν καλῶς ἐπάνω εἰς τὰς πράξεις τῆς Συνάψεως καὶ Πολλαπλασιάσεως, διὰ νὰ μὴ συγχυθῶσιν αὗται αἱ δύω Ἐκθέσεις, ἐν ᾧ πολὺ ἀλλήλων διαφέρουσιν. ἡ μὲν ἀλγεβραϊκὴ Σύναψις γίνεται μόνον διὰ τῶν Συνεργῶν, ἐπὶ δὲ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ ἐνεργοῦσι καὶ οἱ Συνεργοὶ καὶ τὰ Γράμματα. π. χ.

α μὲ α συναφθὲν, ποιεῖ	2α.	ἐκ δὲ τοῦ α Χ α γίνεται	αα
α μὲ ο συναφ. ποιεῖ . .	α.	α Χ ο γίν.	ο
α μὲ — α συναφ. ποιεῖ .	ο.	α Χ — α γίν.	— αα
— α μὲ — α συναφ. ποιεῖ	— 2α.	— α Χ — α γίν.	+ αα
α μὲ ι . . . . . ποιεῖ	α + ι.	α Χ ι γίνεται . . .	α
2α μὲ — 3β . ποιεῖ	2α — 3β.	2α Χ — 3β γίνεται	— 6αβ

Τουτέστιν ἐπὶ μὲν τῆς Συνάψεως συνδέονται καὶ συνάπτονται τὰ Ποσὰ μετὰ τῶν ἑαυτῶν Συμβόλων, καὶ ἐκ τούτου γίνεται μία Συμπεπλεγμένη Ποσότης. ἐπὶ δὲ τῆς Πολλαπλασιάσεως ἐκ μιᾶς ἁπλῆς Ποσότητος ἀποκαθίσταται ἄλλη τις Σύνθετος, καταγραφομένων τῶν Γραμμάτων ἄνευ παρεμπτώσεως τινος Συμβόλου. ἡ ἀλήθεια τούτου γίνεται σαφεστέρα, ἐὰν εἰς τὸν τόπον τῶν Γραμμάτων τεθῶσιν ἀριθμοί. ὅθεν ἂν τὸ α ὑποτεθῇ ἴσον τῷ 4, ἔσται τότε τὸ μὲν 2α τουτέστι $4 + 4 = 8$, τὸ δὲ α Χ α τουτέστι $4 \times 4 = 16$, καὶ πάλιν τὸ μὲν $\alpha + o = 4$, τὸ δὲ α Χ ο, τουτέστι $4 \times o = o$.

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ έ.

§. 29. Νὰ διαιρῶμεν Ποσότητας ἀλγεβραϊκάς.

ΛΥ΄ΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕ΄Α.

Καν. ά.) Τὰ μὲν ὅμοια Σύμβολα ἀποτελοῦσι Σύμβολον +, τουτέστι Πηλίκον Καταφατικόν. Τὰ δὲ ἀνόμοια

Συμβ. διδόασι Συμβολ. —, τυτέςι Πηλίκον ἀποφατικόν.

Καν. β΄.) Οἱ Συνεργοὶ διαιρῦνται κατὰ τὰς κανόνας τῆς ἀριθμητικῆς.

Καν. γ΄.) Ὑποκάτω τῦ Διαιρετέυ γράφομεν μίαν Γραμμὴν, καὶ ὑποκάτω αὐτῆς γράφεται ὁ Διαιρέτης. ἂν ὅμως ἐυρίσκηται καὶ εἰς τὸν Διαιρετέον καὶ εἰς τὸν Διαιρέτην τὰ αὐτὰ Γράμματα, τότε ἀφαιρῦμεν, ἢ σβύομεν διὰ γραμμικῦ τινος σημείυ ἀμφοτέρωθεν ἴσον ἀριθμὸν τῶν Ὁμοίων Γραμμάτων.

ὙΠΟΔΕΊΓΜΑΤΑ.

$a : a$ ποιεῖ $\frac{a}{a}$. ὁ Συνεργὸς 1 (ὅστις ἐννοεῖται ἐνταῦθα κατὰ τὰ §. 12) διαιρύμενος ἐπὶ τὸ 1, δίδει Πηλίκον 1. λοιπὸν τῦ a καὶ a ἀφαιρεθέντος, ἢ σβυσθέντος $\frac{\acute{a}}{\acute{a}}$, ἔςαι τὸ Πηλίκον μονὰς 1.

Ἐκ τῦ $aa : a$ προκύπτει Πηλίκον $\frac{aa}{a}$ ἢ $\frac{\acute{a}a}{\acute{a}} = a$, τῦ $a\beta$ διαιρεθέντος ἐπὶ τὸ a, προκύπτει $\frac{a\beta}{a}$ τυτ' ἔςι $\frac{\acute{a}\beta}{\acute{a}} = \beta$.

Ἐκ δὲ τῦ $16\,aaa\beta\gamma : 8\,a\beta\beta\gamma\gamma$ προκύπτει Πηλίκον $\frac{16\,aaa\beta\gamma}{8\,a\beta\beta\gamma\gamma}$ ἤτοι $\frac{16\,\acute{a}aa\acute{\beta}\acute{\gamma}}{8\,\acute{a}\acute{\beta}\beta\acute{\gamma}\gamma} = 2\,\frac{aa}{\beta\gamma}$.

Ἐκ

Ἐκ δὲ τοῦ $72\alpha\beta : -9\alpha\beta$ προκύπτει $-\dfrac{72\alpha\beta}{9\alpha\beta}$ $= -8$.

Ἐπὶ δὲ τῶν Συμπεπλεγμένων Ποσῶν ἀκολουθοῦμεν τὴν Διαίρεσιν καθὼς ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, γράφομεν δηλονότι τὸν Διαιρέτην ὑπὸ τὸν Διαιρετέον, καὶ ζητοῦμεν τὸ Πηλίκον κατὰ τοὺς προτεθέντας κανόνας, τὸ ὁποῖον θέτομεν εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν μετ' αὐτοῦ τὸν Διαιρέτην, καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον, μεταβάλλοντες τὰ Σύμβολα, καὶ ἐπιτέμνοντες τὸν Διαιρετέον, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς παραδείγματι.

$$
\begin{array}{l}
\alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta \;(\alpha + \beta \\
\alpha + \beta \\
\alpha\alpha + \alpha\beta \\
- \;\; - \\
\hline
\qquad \alpha\beta + \beta\beta \\
\qquad \alpha + \beta \\
\qquad \alpha\beta + \beta\beta \\
\qquad - \;\;\; - \\
\hline
\qquad \mathrm{o} \quad \mathrm{o}
\end{array}
$$

Τὸ πρῶτον Πηλίκον τοῦ $\alpha\alpha : \alpha$ εἶναι α. ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τὸ Πηλίκον α μετὰ τοῦ Διαιρέτου $\alpha + \beta$ ἀποκτῶμεν Γινόμενον τὸ $\alpha\alpha + \alpha\beta$, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑποκάτω τοῦ Διαιρετέου, καὶ μεταβάλλοντες ἔπειτα τὰ Σημεῖα τούτου τοῦ Γινομένου, τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου, καὶ οὕτω τὸ μὲν $-\alpha\alpha$ ἀναιρεῖ τὸ $+\alpha\alpha$, καὶ μένει διαφορὰ τὸ μηδενικὸν ο, ἀπὸ δὲ τοῦ $2\alpha\beta$ ἀφαιρεθέντος τοῦ $-\alpha\beta$, μένει $+\alpha\beta$ ἡ διαφορὰ, τὴν ὁποίαν γράφομεν ὑποκάτω τῆς Γραμμῆς, προσθέτοντες τὸ ἑπόμενον Μέλος τοῦ Διαιρετέου, τουτέστι τὸ $\beta\beta$, πάλιν γράφομεν τὸν Διαιρέτην $\alpha + \beta$ ὑποκάτω τοῦ λοιποῦ Διαιρετέου $+\alpha\beta + \beta\beta$, καὶ διαιρεθέντος τοῦ $\alpha\beta$ ἐπὶ τὸ α, προκύπτει δεύτερον Πηλίκον τὸ + β, τὸ ὁποῖον ὡσαύτως γράφομεν εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων μετὰ τȣ̃ ἑαυτȣ̃ Συμβόλȣ, ὕςερον πολλαπλασιάζομεν τὸ Πηλίκον β μεθ' ὅλȣ τȣ̃ Διαιρέτȣ, ϗ τὸ ἐκ τȣ́των Γινόμενον αβ + ββ γράφομεν ὑποκάτω τȣ̃ Διαιρέτȣ, ϗ μεταβαλόντες τὰ Σημεῖα τȣ́τȣ τȣ̃ Γινομένȣ, τὸ ἀφαιρȣ̃μεν ἀπὸ τȣ̃ Διαιρετέȣ. ὅθεν τὸ + αβ ἐναιρεῖ τὸ — αβ, ὁμοίως ϗ τὸ + ββ τὸ — ββ, ϗ ἐγκαταλείπεται Διαφορὰ τὸ 0, ϗ ȣ̃τω γέγονεν ἡ Διαίρεσις ἐντελῶς. κατ' αὐτὴν τὴν μέθοδον ἀναλύομεν ϗ τὰ ἑξῆς Παραδείγματα.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ἡ Διαίρεσις ἀναλύει ἐκεῖνο, ὅπȣ̃ ἐσύνθεσεν ὁ Πολλαπλασιασμὸς, διὰ τȣ̃το πρέπει ϗ διὰ τῆς Διαιρέσεως νὰ προκύψωσιν ἐκεῖνοι οἱ Παράγοντες, οἵτινες ἐσύνθεσαν τὸ Γινόμενον διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως. ὅθεν ἐπειδὴ τὸ — μετὰ τȣ̃ — πολλαπλασιασθὲν, ἀποτελεῖ Σύμβολον +, εἶναι φανερὸν, ὅτι ἓν Γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ τὸ Συμβ. —, ἐὰν δὲν ἔχωσιν ἐναντία Σημεῖα οἱ Παράγοντες. λοιπὸν τὸ — αβ (τὸ Γινόμενον δηλ. ἐκ τȣ̃ + α ϗ — β, ἢ τȣ̃ — α ϗ + β) διαιρεθὲν ἐπὶ τὸ + α, δίδωσι Πηλίκον τὸ — β. διαιρȣ́μενον δὲ ἐπὶ τὸ — α, δίδωσι τὸν ἕτερον Παράγοντα + β. ἐξ ἐναντίας τὸ + αβ (τȣτ' ἔςι τὸ Γινόμενον ἐκ τȣ̃ + α ϗ + β, ἢ τȣ̃ — α ϗ — β διαιρεθὲν ἐπὶ τὸ + α, δίδωσι Πηλίκον (τὸν ἕνα δηλονότι Παράγοντα) + β, Διαιρεθὲν δὲ ἐπὶ τὸ — β, δίδει Πηλίκον τὸ — β. τὸ αὐτὸ τȣ̃το δύναται νὰ λεχθῇ ϗ περὶ τῶν Συνεργῶν ϗ Γραμμάτων. ἐπειδὴ προσπαθȣ̃μεν νὰ ἀποκτήσωμεν διὰ τῆς Διαιρέσεως τȣ̀ς Ἰδίȣς Παράγοντας, οἵτινες διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως συνθέτουσι τὸ Πολλαπλοῦν, ἢ Διαιρετέον.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α'.

$48\alpha\alpha\alpha - 76\alpha\alpha\beta - 64\alpha\beta\beta + 105\beta\beta\beta \mid \underline{12\alpha\alpha} - 4\alpha\beta - 21\beta\beta$

$4\alpha - 5\beta.$ ὁ Διαιρέτης

$48\alpha\alpha\alpha - 60\alpha\alpha\beta.$ Τὸ Γινόμενον

$- \quad +$ μεταβολὴ τῶν Συμβ.

$-16\alpha\alpha\beta - 64\alpha\beta\beta$

$4\alpha - 5\beta$

$-16\alpha\alpha\beta + 20\alpha\beta\beta$

$+ \quad -$

$-84\alpha\beta\beta + 105\beta\beta\beta$

$4\alpha - 5\beta$

$-84\alpha\beta\beta + 105\beta\beta\beta$

$+ \quad -$

$0 \quad 0$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

$18xxxx - 45xxx + 82xx - 67x + 40 \mid \underline{6xx} - 7x + 8$

$3xx - 4x + 5$

$18xxxx - 24xxx + 30xx$

$- \quad + \quad -$

$-21xxx + 52xx - 67x$

$3xx - 4x + 5$

$-21xxx + 28xx - 35x$

$+ \quad - \quad +$

$+24xx - 32x + 40$

$3xx - 4x + 5$

$24xx - 32x + 40$

$- \quad + \quad -$

$0 \quad 0 \quad 0$

ΠΑΡΑ'-

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. γ΄.

$$16\alpha\alpha\alpha\alpha - 72\alpha\alpha\beta\beta + 81\beta\beta\beta\beta \,.\; \underline{8\alpha\alpha\alpha} + 12\alpha\alpha\beta - 18\alpha\beta\beta - 27\beta\beta\beta$$

$$2\alpha \quad -3\beta$$

$$16\alpha\alpha\alpha\alpha - 24\alpha\alpha\alpha\beta$$

$$- \qquad +$$

$$24\alpha\alpha\alpha\beta - 72\alpha\alpha\beta\beta$$

$$2\alpha \quad -3\beta$$

$$24\alpha\alpha\alpha\beta - 36\alpha\alpha\beta\beta$$

$$- \qquad +$$

$$-36\alpha\alpha\beta\beta + 81\beta\beta\beta\beta$$

$$2\alpha \quad -3\beta$$

$$-36\alpha\alpha\beta\beta + 54\alpha\beta\beta\beta$$

$$+ \qquad -$$

$$-54\alpha\beta\beta\beta + 81\beta\beta\beta\beta$$

$$2\alpha \quad -3\beta$$

$$-54\alpha\beta\beta\beta + 81\beta\beta\beta\beta$$

$$+ \qquad -$$

$$0 \qquad 0$$

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 30. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀνόμοια Συμπεπλεγμένα Ποσὰ μὲ ἄλλα ἀνόμοια Συμπεπλεγ. Ποσὰ, καὶ εὑρίσκηται εἰς κάθε Ποσότητα τὸ αὐτὸ Γράμμα ἅπαξ, ἢ πολλάκις, δυνάμεθα τότε νὰ σβύσωμεν ἀμφοτέρωθεν ἐν ἴσον ἀριθμὸν Γραμμάτων. πρὸς τούτοις δὲ ἐὰν ὅλοι οἱ Συνεργοὶ ἐπιδέχωνται ἕνα κοινὸν Διαιρέτην, δυνάμεθα νὰ τοὺς ἀνάξωμεν διὰ τῆς Διαιρέσεως ἐπὶ τὸ συντομώτερον, τουτέστιν εἰς ἐλάσσονας Ὅρους. π. χ. $\dfrac{8\alpha\beta\gamma - 4\beta\gamma\delta}{40\alpha\beta\gamma + 8\alpha\beta\gamma\delta}$

ἀφ' οὗ

ἀφ' οὗ σβύσωμεν ἀπὸ ὅλα τὰ Μέλη τὸ $\beta\gamma$, ϗ διαιρέσωμεν καθε Συνεργὸν μετὰ τοῦ 4, γίνεται $\frac{2\alpha - \delta}{10\alpha + 2\alpha\delta}$ πρὸς τούτοις τὸ $\frac{4\alpha\alpha\gamma - 6\alpha + 8\alpha\alpha\alpha\delta}{10\alpha - 6\alpha\beta}$ δίδωσιν $\frac{2\alpha\gamma - 3 + 4\alpha\alpha\delta}{5 - 3\beta}$.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 31. Ἡ Διαίρεσις, ἢ ἡ ἀνάλυσις μιᾶς Ποσότητος εἰς τοὺς ἑαυτοῦ Παράγοντας ἀκολουθεῖ εἰς τὴν Ἄλγεβραν συχνότατα, ϗ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ γυμνασθῶμεν εἰς αὐτὴν ἀκριβῶς. οὕτω συντίθεται τὸ $\alpha\beta$ ἐκ τοῦ α ϗ β. ϗ τὸ $\beta\gamma\gamma$ ἐκ τοῦ β ϗ $\gamma\gamma$, ἢ ἐκ τοῦ $\beta\gamma$ ϗ γ. $4\chi\chi + 2\chi$ ἐκ τοῦ $2\chi\chi + \chi$ ϗ 2, ἢ ἐκ τοῦ $2\chi + 1$ πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ 2χ. προσέτι τὸ $\alpha\delta - \delta$ συνίσταται ἐκ τοῦ $\alpha - 1$ ϗ τοῦ δ. ἐπειδὴ ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τὸ $\alpha - 1$ μετὰ τοῦ δ, ἀναφύεται Γινόμενον τὸ $\alpha\delta - \delta$. ὡσαύτως ϗ τοῦ $\delta\nu\nu + \delta\nu - \delta$ Παράγοντες εἰσὶν οἱ $\nu\nu + \nu - 1$ ϗ δ, ϗ οὕτως ἐφεξῆς.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ γ'.

Περὶ ἀλγεβραϊκῶν Κλασμάτων.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ά.

§. 32. Νὰ φέρωμεν Κλάσματα Ἀλγεβραϊκὰ εἰς ἐλαχίστους Ὅρους.

ΛΥ'ΣΙΣ.

ΛΥΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕΆ.

Τῦτο γίνεται κατὰ τὺς Κανόνας, τὺς ὁποίυς ἐπραγματεύθημεν ἀνωτέρω εἰς τὴν Διαίρεσιν (§. 29.). ἐὰν εὑρίσκωνται τόσον εἰς τὸν ἀριθμητὴν, ὅσον καὶ εἰς τὸν Παρονομαστὴν τὰ αὐτὰ Γράμματα, ἐξαλείφομεν ἀμφοτέρωθεν ἕνα Ἴσον ἀριθμὸν τῶν ὁμοίων Γραμμάτων, τὺς δὲ Συνεργὺς ἀνάγομεν εἰς ἐλαχίςυς Ὅρυς κατὰ τὺς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ δοθέντας Κανόνας. κατὰ τῦτον τὸν τρόπον λοιπὸν ἐκθέτομεν ἓν Κλασμα εἰς ἐλαχίςυς Ὅρυς, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις αὐτῦ: π. χ. $\dfrac{2\alpha\beta\gamma\delta}{4\alpha\delta\varepsilon}$

ἀνάγεται εἰς $\dfrac{\beta\gamma}{2\varepsilon}$.

ΔΕΙ΄ΞΙΣ.

Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν, καὶ διαιρέσωμεν μίαν Ποσότητα διὰ τῦ Ἰδίυ Μεγέθυς, τότε δὲν μεταβάλλεται ἡ Δύναμις αὐτῆς. ἐπειδὴ τόσον ἠλαττώθη, ὅσον ηὐξήθη. ἀλλὰ μὴν τὰ Γράμματα ἑνὸς ἀλγεβραϊκῦ Κλάσματος εἰσὶν ἐν μὲν τῷ ἀριθμητῇ Πολλαπλασιασαί, ἐν δὲ τῷ Παρονομαστῇ Διαιρέται. ἄρα ἐὰν σβύσωμεν Ἴσυς Πολλαπλασιασὰς καὶ Διαιρέτας, ἐκθέτεται τὸ Κλάσμα εἰς ἐλαχίςυς Ὅρυς, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις αὐτῦ.

ΠΡΟ-

ΠΡΌΒΛΗΜΑ β.

§. 33. Νὰ Προσθέτωμεν, ἢ νὰ ἀφαιρῶμεν Αλγεβραϊκὰ Κλάσματα.

ΛΥΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕΆ.

Τὰ δοθέντα Κλάσματα πρέπει πρῶτον νὰ ἀναγάγωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν κατὰ τοὺς Κανόνας τῆς ἀριθμητικῆς, ἢ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν ἢ νὰ ἀφαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς, π. χ., $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἢ $\frac{\beta}{\delta}$ ἀνάγονται εἰς $\frac{\alpha\delta}{\gamma\delta}$ ἢ $\frac{\beta\gamma}{\gamma\delta}$. ἔπειτα προστίθενται $\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\gamma\delta}$ ἢ ἀφαιροῦνται $\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma\delta}$. ἡ Δεῖξις εἶναι ἡ Ἰδία, καθὼς εἰς τὴν ἀριθμητικὴν περὶ Προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

ΣΧΌΛΙΟΝ.

§. 34. Ἐπειδὴ πρὸς Πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ μεταχειριζόμεθα μόνον Σημεῖα (§. 7.). διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν, ἢ νὰ ἀφαιρέσωμεν Ἀλγεβραϊκὰ Κλάσματα, χωρὶς νὰ ἀνάγωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, προσγράφοντες μεταξὺ τῶν Κλασμάτων τὸ Σημεῖον $+$ ἢ τὸ $-$ π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ προσθέσωμεν τὸ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἢ $\frac{\beta}{\delta}$, γράφομεν $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}$. ἐὰν

δὲ

δὲ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{\beta}{\delta}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ γράφομεν $\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\delta}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ'.

§. 35. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν, καὶ νὰ διαιρῶμεν Ἀλγεβραϊκὰ Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύω ἀριθμητὰς μετ' ἀλλήλων, ὡσαύτως καὶ τοὺς Παρονομαστάς, τὸν αὐτὸν τρόπον μεταχειριζόμεθα καὶ ἐπὶ τῆς Διαιρέσεως, ἀφ' οὗ ἀναποδίσωμεν τὸν Διαιρέτην. λοιπὸν ἀμφότεραι αὗται αἱ Ἐργασίαι ἀκολουθοῦσι τοὺς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ δοθέντας Κανόνας, π. χ. ἐκ μὲν τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma} \times \frac{\beta}{\delta}$ γίνεται $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$, ἐκ δὲ τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ διαιρουμένου ἐπὶ τοῦ $\frac{\beta}{\delta}$, (ἀφ' οὗ ἀναποδισθῇ ὁ Διαιρέτης $\frac{\beta}{\delta}$ οὕτω $\frac{\delta}{\beta}$) ἀποτελεῖται $\frac{\alpha}{\gamma} \times \frac{\delta}{\beta} = \frac{\alpha\delta}{\gamma\beta}$.

Ἡ Δεῖξις εἶναι ἡ αὐτή, ὅπου γέγονε καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ περὶ Πολλαπλασιασμοῦ καὶ Διαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 36. Πάντα τὰ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ περὶ τῶν Κλασμάτων εἰρημένα, δύνανται νὰ προσαρμοσθῶσι καὶ εἰς τὴν Ἄλγεβραν. οἷον ἓν ἀκέραιον Ποσὸν δύναται νὰ μεταποιηθῇ, καὶ νὰ ἀναχθῇ εἰς Κλάσμα, ὑπογραφομένης τῆς Μονάδος ἀντὶ τοῦ Παρονομαστοῦ. ἓν ἀκέραιον δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς ἓν Κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἀκέραιον μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ Κλάσματος, καὶ ὑποκάτω τοῦ ἐκ τούτων Γινομένου γράψωμεν τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν τοῦ Κλάσματος. π. χ. ἐκ τοῦ $α + \frac{β}{δ}$ γίνεται $\frac{αδ + β}{δ}$, οὕτω καὶ περὶ τῶν λοιπῶν πραγματευόμεθα, καθὼς ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἔγιναν ἤδη εἰς ἡμᾶς γνωστά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ δ'.

Περὶ Δυνάμεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ α'.

§. 37. Ὅταν ἀριθμός τις, ἢ Ποσὸν ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῇ, τὸ Γινόμενον ὀνομάζεται Δευτέρα Δύναμις τοῦ πολλαπλασιασθέντος ἀριθμοῦ, ἢ Ποσοῦ. καὶ τὸ Ποσὸν αὐτὸ ἀναφερόμενον πρὸς τὴν Δευτέραν Δύναμιν, λέγεται Ῥίζα, ἢ Πρώτη Δύναμις. π. χ. αα εἶναι ἡ

Δευτ.

Δευτ. Δύναμις τῆς Ρ'ίζης α. κ) 16 ἐςὶν ἡ δευτ. Δύναμις τοῦ 4. ἐπειδὴ $4 \times 4 = 16$. Πρώτη Δύναμις λοιπὸν εἶναι ἕκαςον Ποσὸν καθ' ἑαυτὸν θεωρούμενον.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ ά.

§. 38. Ε'κείνη ἡ Δύναμις, ἥτις γίνεται εὐθὺς κατὰ πρῶτον Πολλαπλασιασμὸν, ὀνομάζεται γενικῶς Τετράγωνος. π. χ. ὁ 16 εἶναι τὸ Τετράγωνον τοῦ 4, ὁ δὲ 36 εἶναι τὸ Τετράγωνον τοῦ 6.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β.

§. 39. Η' Δευτέρα Δύναμις, ἢ ὁ Τετράγωνος διὰ τῆς ῥίζης πάλιν πολλαπλασιασθεὶς, προάγει τὴν Τρίτην Δύναμιν, ἥτις ὀνομάζεται Κύβος. π. χ. αα Χ α ποιεῖ ααα, τὴν Τρίτην δηλονότι Δύναμιν, ἢ τὸν Κύβον τοῦ α. 16Χ4 δίδωσιν 64, τὸν Κύβον τοῦ 4.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ.

§. 40. Ε'ὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἡ Τρίτη Δύναμις μετὰ τῆς Ρ'ίζης, παράγεται ἡ Τετάρτη Δύναμις. Ε'ὰν δὲ πάλιν πολλαπλασιασθῇ κ) αὕτη μετὰ τῆς Ρ'ίζης, γεννᾶται ἡ Πέμπτη Δύναμις. ϗ οὕτω δυνάμεθα νὰ ἄρωμεν καθε Ποσὸν εἰς ὁποιανδήποτε δ ματὴν Δύναμιν διὰ μόνου τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῆς προηγουμένης Δυνάμεως μετὰ τῆς Ρ'ίζης.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 41. Ε'κ τῶν εἰρημένων γίνεται δῆλον, ὅτι δὲν δύναται κάνένα Τετράγωνον νὰ εἶναι ἀποφατικόν. ἐπειδὴ εἴτε Καταφατικὴ, εἴτε ἀποφατικὴ εἶναι ἡ Ρ'ίζα, τὸ Γινόμενον ἔσεται πάντοτε Κα-

ταφα

ταφατικόν. ὡς $-\alpha \times -\alpha = +\alpha\alpha$, ἢ $+\alpha \times +\alpha = +\alpha\alpha$. ὁ δὲ Κύβος δύναται νὰ εἶναι καὶ ἀποφατικὸς, ἐὰν ἡ Ῥίζα ἔχῃ τὸ ἀποφατικὸν Σημεῖον $-$. ἐπειδὴ $+\alpha\alpha \times -\alpha = -\alpha\alpha\alpha$. ἡ δὲ Τετάρτη Δύναμις ἔσαι πάλιν Καταφατική. ἐπειδὴ $-\alpha\alpha\alpha \times -\alpha = +\alpha\alpha\alpha\alpha$, καὶ οὕτω ...

ὉΡΙΣΜΌΣ β'.

§. 42. Αἱ ῥίζαι ἔχουσι καὶ αὐταὶ τὰς Ἰδίας των Προσηγορείας, καθὼς αἱ Δυνάμεις. ἡ Ῥίζα ἑνὸς Τετραγώνου ὀνομάζεται Τετραγωνικὴ Ῥίζα. ἑνὸς δὲ Κύβου καλεῖται Κυβική. ἑνὸς δὲ Τετραγωνοτετραγώνου (δηλ. τῆς Τετάρτης Δυνάμ.) λέγεται Τετάρτη, ἢ Τετραγωνοτετραγωνικὴ Ῥίζα. κ. τ. Πρὸς δήλωσιν ἑκάστης Δυνάμεως μεταχειριζόμεθα τὸ Σύμβολον τοῦτο $\sqrt{}$, ἐπάνω τοῦ ὁποίου γράφομεν τὸν ἀριθμὸν, ὅστις ἐκδηλοῖ ἐκείνην τὴν Δύναμιν, τῆς ὁποίας ἡ Ῥίζα σημειοῦται, π. χ. $\sqrt[2]{}$ εἶναι τὸ Σημεῖον τῆς δευτέρας Δυνάμ. ἢ τοῦ Τετραγώνου. $\sqrt[3]{}$ εἶναι τὸ Σύμβ. τῆς Ῥίζης τῆς Τρίτης Δυνάμεως, ἢ τοῦ Κύβου. $\sqrt[4]{}$ εἶναι τὸ Σύμβολον τῆς ῥίζης τῆς Τετάρτης Δυνάμεως. $\sqrt[2]{\alpha}$ εἶναι ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς Ποσότητος α. αὕτη ὅμως ἡ

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἐκδηλοῦται διὰ μόνου τοῦ Σημείου $\sqrt{}$, ἄνευ τῆς ἐπιγραφῆς τοῦ 2. οἷον $\sqrt{\alpha}$. ὁσάκις λοιπὸν βλέπομεν αὐτὸ τὸ Σημεῖον ἄνευ τινὸς ἐπιγραφομένου ἀριθμοῦ, πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι τοῦτο σημαίνει τὴν Τετραγωνικὴν ῥίζαν. ὅταν δὲ ἔχωμεν νὰ φανερώσωμεν τὴν ῥίζαν ἑνὸς Συμπεπλεγμένου Ποσοῦ, πρέπει νὰ περικλείωμεν αὐτὸ τὸ Ποσὸν ἐν παρενθέσει, διὰ νὰ γνωρίζηται, ὅτι τούτου τοῦ Ποσοῦ ζητεῖται ἡ ῥίζα, π. χ. $\sqrt[3]{}\,(\alpha\alpha+\beta)$. ἢ γράφομεν ἐπ' αὐτοῦ μίαν Γραμμὴν οὕτω $\sqrt[3]{\alpha\alpha+\beta}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 43. Ἐπειδὴ αἱ Δυνάμεις γεννῶνται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ μιᾶς Ποσότητος ἐφ' ἑαυτήν. διὰ τοῦτο πρέπει νὰ θέτωμεν τὸ Ποσὸν τοσάκις, ὁσάκις ζητεῖται ἡ Δύναμις. π. χ. ἡ δευτέρα Δύναμις τοῦ α ἐστὶ τὸ αα, ἢ τὸ α δὶς τεθέν. ἡ ἑβδόμη Δύναμις τοῦ α εἶναι ααααααα, τουτέστι τὸ α ἑπτάκις τεθέν. ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν ταύτην τὴν πολυγραφίαν, γράφοντες μόνον ἐπὶ τοῦ Γράμματος πρὸς τὰ δεξιὰ ἀριθμοὺς δηλοῦντας, ποσάκις ἐπολλαπλασιάσθη τὸ Ποσὸν διὰ τῆς ῥίζης, ἢ εἰς ποίαν Δύναμιν ἤρθη αὐτὸ τὸ Ποσόν. λοιπὸν ἀντὶ τοῦ ἑπτάκις ἀνωτέρω τεθέντος α, γράφομεν α^7. ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ὁ ἐπὶ τοῦ Γράμματος τεθέμενος, ὀνομάζεται παρ' ἡμῶν Δυναμοδείκτης, τὸν ὁποῖον ἄλλοι μὲν καλοῦσι Βαθμοδείκτην, ἄλλοι δὲ Ἐκθέτην καὶ ἄλλοι Ἐπίσημον, ἢ Ἔκφρασιν τῆς Δυνάμεως, ὅθεν ἕπεται.

ὉΡΙΣΜΌΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ γ΄.

§. 44. Δυναμοδείκτης ἐςὶν ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, εἰς ποίαν Δύναμιν, ἢ βαθμὸν ὑψώθη μία Ποσότης. ὅθεν ὁ Δυναμοδείκτης τῆς πρώτης Δυνάμεως ἐςὶν ἡ Μονὰς, πραγματικῶς ὅμως δὲν γράφεται, ἀλλὰ πάντοτε ἐννοεῖται ἔξωθεν. ἐπειδὴ κάθε Ποσὸν ἀλγεβραϊκὸν, καθὼς ἔχει ἕνα Συνεργὸν, οὕτω πρέπει νὰ ἔχῃ καὶ ἕνα Δυναμοδείκτην. π. χ. a ἐςὶν πρώτη Δύναμις. a^2 εἶναι δευτέρα Δύν. ἢ τὸ Τετράγωνον. τὸ δὲ a^3 εἶναι τρίτη Δύναμις, ἢ Κύβος κ. τ. λ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 45. Ἐπειδὴ καὶ αἱ Δυνάμεις αὐταὶ δύνανται νὰ εἶναι ἀόριστοι, καθὼς καὶ αὐτὰ τὰ Ποσὰ, διὰ τοῦτο δύναται ὁ Δυναμοδείκτης νὰ ἐκφράζηται ἐνίοτε καὶ διὰ τινος Γράμματος. π. χ. τὸ b^m σημαίνει, ὅτι τὸ Ποσὸν b ἤρθη εἰς τὴν Δύναμιν m. τὸ δὲ $a^n b$ δηλοῖ ὁμοίως, ὅτι τὸ Ποσὸν a ἤρθη εἰς τὴν Δύναμιν n, καὶ ἐπολλαπλασιάσθη μετὰ τοῦ b.

ΠΟΡΙΣΜΑ α΄.

§. 46. Αἱ Ποσότητες αἱ ἔχουσαι Διαφόρους Δυναμοδείκτας, εἰσὶν ἀνόμοιοι πρὸς ἀλλήλας. διότι ἐπειδὴ ὁ Δυναμοδείκτης δεικνύει, ποσάκις