γὺς εἰσὶν ὅμως πάλιν ἀλλήλοις Ὁμοειδῆ. ὅμως 6α ϗ 6γ εἰσὶν ἀλλήλοις Ἑτεροειδῆ, καθὼς πάλιν ϗ 5ααα & 5αα εἶναι μεταξὺ των ἀνόμοια Ποσά, ὡς εἴρηται (§. 4.).

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ β'.

Περὶ Ἀλγεβραϊκῶν λογισμῶν.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ α'.

§. 14. Νὰ ἐκθέτωμεν τὰ δοθέντα Μέλη κατὰ τὸν δέοντα ϗ ἁπλούστατον τρόπον.

ΛΥ'ΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕ'Α.

1.) Τὰ Μέλη, ϗ κάθε Γράμμα ἐν τῷ αὐτῷ Μέλει (κἄν τε Συμπεπλεγμένα, κἄν τε ἀσύμπλεκτα τύχωσι τὰ Ποσὰ) πρέπει νὰ γράφωνται κατὰ τὴν τάξιν τοῦ ἀλφαβήτου, ϗ νὰ προσπαθῶμεν, εἰ δυνατόν, νὰ εἶναι τὸ πρῶτον Μέλος πάντοτε Καταφατικόν; π. χ. τὸ δοθὲν Ποσὸν $\beta - \gamma + \alpha + \zeta\delta$ πρέπει νὰ γραφθῇ εἰς τοιαύτην τάξιν, $\alpha + \beta - \gamma + \delta\zeta$. ὁμοίως ϗ τὸ $8\zeta\beta - 10\beta\alpha\gamma + 6\alpha$ νὰ μεταπεσθῇ εἰς τοιαύτην $6\alpha - 10\alpha\beta\gamma + 8\beta\zeta$.

2.) Τὰ ὅμοια, ἢ ὁμοειδῆ Μέλη πρέπει νὰ ἀνάγωνται κατὰ τὰ Σημεῖά των ϗ Συνεργοὺς των εἰς ἓν Μέλος, ὅπερ ϗ Ἐπιτομὴ ὀνομάζεται, ϗ τοῦτο γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς τρεῖς Κανόνας.

Καν. ά.) Ἠ Συνάπτομεν τὰς Συνεργὰς τῶν Μελῶν (ἐὰν αὐτὰ τύχωσι ταυτοσύμβολα), καὶ θέτομεν πρὸ τῦ Κεφαλαίυ πάλιν τὸ αὐτὸ Σύμβολον τῶν συναπτομένων Μελῶν, καθὼς ἐπὶ τῶν Α΄ Ὑποδειγμάτων.

Καν. β΄.) Ἠ ἀφαιρῦμεν (ἂν τύχωσι τὰ Μέλη ἑτεροσύμβολα) τὰς Συνεργὰς αὐτῶν, τυτέστι τὸν ἐλάσσονα ἀπὸ τῦ μείζονος, καὶ τότε θέτομεν πρὸ τῆς Διαφορᾶς τὸ Σύμβολον τῦ μείζονος. ὡς ἐπὶ τῶν Β΄. Ὑποδειγμάτων γίνεται.

Καν. γ΄.) Ἠ ἐξαλείφομεν ἀμοιβαίως τὰ ὁμοειδῆ Μέλη, ἂν τύχη νὰ ἔχωσι Συνεργὰς μὲν τὰς αὐτὰς, Σύμβολα ὅμως διάφορα, ὡς ἐπὶ τῶν Γ΄. Ὑποδειγμάτων δηλῶται σαφέστερον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΤΑ΄ ΤΟ΄Ν ά. ΚΑΝ.

αβ + αβ + γδ γίνεται διὰ τῆς προσθ. 2αβ + γδ.
2α — 2δ + 5α — 6δ γίνεται διὰ τῆς προσθ. 7α — 8δ.
αα + 2αγ + 3αγ γίνεται αα + 5αγ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΤΑ΄ ΤΟ΄Ν β΄. ΚΑΝ.

3αβ + 2αββ — αβ γίνεται διὰ τῆς ἀφαιρ. 2αβ + 2αββ.
ὁμοίως 2α + δ — 7α γίνεται δ — 5α.

ΥΠΟΔΕΙΓΜ. ΚΑΤΑ΄ ΤΟ΄Ν γ΄. ΚΑΝ.

αα + 2αββ + 3αα — 2αββ ἐγκαταλείπεται διὰ τῆς ἀμοιβαίας ἐξαλείψεως 4αα.
ὁμοίως καὶ βδ — βδζ + 2βδ + 2βδζ — 3βδ μένει βδζ.

ΔΕΓΞΙΣ.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Τὰ Γράμματα δεικνύουσιν ὁποίαν Ποσότητα πρέπει νὰ λάβωμεν, οἱ δὲ Συνεργοὶ σημαίνουσι, ποσάκις νὰ λάβωμεν τὴν Ποσότητα, τὰ δὲ Σύμβολα δηλοῦσι, κατὰ ποῖον τρόπον νὰ τὴν ἐκλάβωμεν. ὅθεν ὅταν μία Ποσότης εἶναι Προσθετέα, ἢ ἀφαιρετέα πλεονάκις, φθάνει νὰ γράψωμεν αὐτὴν ἅπαξ, τιθέντες πρὸ αὐτῆς ἐκεῖνον τὸν Συνεργὸν ὅστις δύναται νὰ ἐκπληρῇ τὸ τοιοῦτον, καθὼς ἀνωτέρω εἰς τὰ κατὰ τὸν α΄. ὑποδείγματα γέγονεν. ἐὰν δὲ ἡ αὐτὴ Ποσότης μερικαῖς φοραῖς εὑρίσκηται Προσθετέα, καὶ ἐξ ἐναντίας μερικαῖς φοραῖς ἀφαιρετέα, μετά τινος ὅμως Διαφορᾶς τῶν Συνεργούντων, τότε ἐκθέτομεν τὴν Διαφορὰν τῆς Προσθετέας, ἢ τῆς ἀφαιρετέας, καθὼς ἀνωτέρω εἰς τὸ β΄. δείκνυται. ἂν πάλιν ἡ αὐτὴ Ποσότης εἶναι προσθετέα καὶ ἐν ταυτῷ ἀφαιρετέα, ἄνευ τινος Διαφορᾶς τῶν Συνεργῶν, εἶναι φανερὸν, ὅτι δὲν ἐγκαταλείπεται ποτε, ὡς εἰς τὰ κατὰ τὸν γ΄. Ὑποδείγματα γέγονε. δι' αὐτῆς ἄρα τῆς Ἐργασίας ἀπεκαταστάθησαν τὰ δοθέντα Μέλη κατὰ τὸν ἁπλούστατον τρόπον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ΄.

§. 15. Νὰ προσθέτωμεν Ἀλγεβραϊκὰς Ποσότητας.

ΛΥΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

Πρῶτον τὰ διδόμενα Μέλη πρέπει κατὰ τάξιν νὰ τεθῶσι μετὰ τῶν ἑαυτῶν Συμβόλων, ἔπειτα νὰ πλεσθῇ ἡ πρᾶξις διὰ τῆς Ἐπιτομῆς κατὰ τοὺς ἀνήκοντας Κανόνας τοῦ α΄. προτεθέντος Προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ α΄.

Ἔστω εἰς σύναψιν τὸ $\alpha\beta$ καὶ $\gamma\delta$. ὅθεν ποιοῦμεν $\alpha\beta + \gamma\delta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. β΄.

Ἔστωσαν Προσθετέα τὰ 4α καὶ 8α. ὅθεν ποιοῦμεν οὕτως $4\alpha + 8\alpha$, καὶ διὰ τῆς Ἐπιτομῆς 12α. τὸ Κεφάλαιον τῶν 3α καὶ -5α καὶ 2β γίνεται $3\alpha - 5\alpha + 2\beta$. καὶ διὰ τῆς Ἐπιτομῆς $2\beta - 2\alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γ΄.

Ἔστωσαν προσθετέα τὰ $\alpha\beta + \gamma$ καὶ $\beta - \gamma$, ὅθεν ποιοῦμεν $\alpha\beta + \beta + \gamma - \gamma$, καὶ διὰ τῆς Ἐπιτομῆς $\alpha\beta + \beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ δ΄.

Τὸ Κεφάλ. τῶν $3\beta\gamma - 4\beta\gamma\delta + 6\beta\zeta$, καὶ $6\beta\gamma\delta - 5\beta\gamma + 3\beta\zeta$. γίνεται διὰ τῆς Ἐπιτομῆς $2\beta\gamma\delta - 2\beta\gamma + 9\beta\zeta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πρόσθεσις (ἥτις κατ᾽ ἄλλους Σύναψις ὀνομάζεται) ἐστὶν ἄθροισις δύω, ἢ πλειόνων Ποσοτήτων εἰς ἓν γενικὸν

Κεφά

Κεφάλαιον, ἀλλὰ μὴν διὰ τούτου τοῦ Κανόνος τὰ δοθέντα Ποσὰ συνήχθησαν εἰς μίαν συμπεπλεγμένην Ποσότητα, ἥτις παρίστησι τὸ γενικὸν Κεφάλαιον, ἔγινεν ἄρα κατὰ τὸ δέον ἡ ἀλγεβραϊκὴ Σύναψις.

ΣΧΟΛΙΟΝ α΄.

§. 16. Ἕκαστος δύναται νὰ καταλάβῃ σαφῶς, ὅτι ἐπὶ τῶν Ὁμοειδῶν Ποσοτήτων πρέπει νὰ ἀθροίζωμεν μόνον τοὺς Συνεργούς· ἐπειδὴ ἂν διορίσωμεν τὴν Σημασίαν τῶν Γραμμάτων. π. χ. ὅτι τὸ α σημαίνει μίαν Γραμμὴν, ἢ ἓν Γρόσιον, εἶναι φανερὸν, ὅτι 3α καὶ 5α τουτέστι τρία Γρόσ. καὶ πέντε Γρόσ. ἢ τρεῖς Γραμμαὶ καὶ πέντε Γραμ. ποιοῦσιν 8α, τουτέστι 8 Γρόσ., ἢ 8 Γραμμάς. παραπλησίως δύναται ἕκαστος νὰ ἐννοήσῃ εὐκόλως, καὶ ὅτι τὰ Ἑτεροειδῆ Ποσὰ πρέπει νὰ γράφωμεν καθ' ἓν ξεχωριστὰ, π. χ. τὸ Κεφάλαιον τῶν 3β καὶ 2γ Ἑτεροειδῶν εἶναι 3β + 2γ. ἐπειδὴ ἂν τὸ β ἐνταῦθα σημαίνῃ ἓν Γρόσιον, καὶ τὸ γ ἕνα ὀβολὸν, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκθέσωμεν ἄλλως τὸ ἄθροισμα, εἰμὴ 3 Γρόσ. σὺν 2 ὀβολοὺς, ἢ 6β καὶ − 4γ, εἶναι 6β − 4γ, τουτέστι 6 Γρόσια πλὴν 4 ὀβολούς.

ΣΧΟΛΙΟΝ β΄.

§. 17. Διὰ νὰ ἠμποροῦμεν νὰ κάμνωμεν εὐκολώτερον τὰς Συνάψεις τῶν συναφθησομένων Ποσῶν, ὅταν δοθῶσι πλείονα Μέλη Ὁμοειδῆ, καὶ Ἑτεροειδῆ, πρῶτον τάττομεν τὰ Ὁμοειδῆ κατὰ κάθετον, τὸ ἓν ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, καὶ ἔπειτα τῶν μὲν Ὁμοειδῶν καὶ ἅμα Ταυτοσυμβόλων ἀθροίζομεν τοὺς Συνεργοὺς εἰς ἓν γενικώτερον ἄθροισμα κατὰ τὴν κοινὴν Σύναψιν, τῶν δὲ Ὁμοειδῶν καὶ ἐν ταυτῷ Ἑτεροσυμβόλων ἀφαιροῦμεν τοὺς Συνεργοὺς, τουτέστι τὸν ἐλάττονα Συνεργὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὰ δὲ Ἑτεροειδῆ ἁπλῶς καταγράφομεν, καθὼς εἰς τὸ ἀνωτέρω Σχόλιον εἴρηται. καὶ τότε κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἀθροίζονται τὰ δοθέντα Ποσὰ εὐκολώτερον καὶ συνοπτικώτερον, ὅσον ἐνδέχεται, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς Ὑποδείγμασι.

ΥΠΟ-

ὙΠΟΔΕΙΓΜΑ α.

$$
\begin{array}{l}
15\alpha\beta - 6\gamma\delta + 4\zeta\varepsilon \\
\qquad - 7\gamma\delta + 3\zeta\varepsilon - \varepsilon\theta\vartheta \\
-6\alpha\beta \quad \text{———} \quad \zeta\varepsilon + 3\varepsilon\theta\vartheta \\
\hline
9\alpha\beta - 13\gamma\delta + 6\zeta\varepsilon + 2\varepsilon\theta\vartheta
\end{array}
$$

ὙΠΟΔΕΙΓΜΑ β.

$$
\begin{array}{l}
2\chi - 3\alpha + 4\beta - 5\gamma + 6\delta - 7\varepsilon \\
10\chi + 9\alpha - 8\beta - 7\gamma - 6\delta \qquad - 5\zeta \\
\hline
12\chi + 6\alpha - 4\beta - 12\gamma - 7\varepsilon - 5\zeta.
\end{array}
$$

ΣΧΟΛΙΟΝ γ.

§. 18. Εἰς τὰς Ἀλγεβραϊκὰς Ἐργασίας ἀρχόμεθα ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ Δεξιὰ, μὲ ὅλον ὁποῦ ἀκολούτως δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν καὶ ἀπὸ τῶν Δεξιῶν. ἐπειδὴ αἱ διὰ τῶν Γραμμάτων ἐμφαινόμεναι Ποσότητες δὲν ἔχουσι τινὰ δύναμιν ὁποῦ νὰ κρέμαται ἀπὸ τῆς κατὰ τὸν τόπον θέσεως, καθὼς εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς χαρακτῆρας ἀκολουθεῖ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ.

§. 19. Νὰ ἀφαιρῶμεν Ἀλγέβραϊκὰς Ποσότητας.

ΛΥΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

Μεταβάλλομεν τὸ Σύμβολον τοῦ ἀφαιρετέου Ποσοῦ εἰς τὸ ἐναντίον, δηλαδὴ ἐὰν μὲν τὸ ἀφαιρεθησόμενον Ποσὸν

τυγχατυγχάνῃ Καταφατικὸν, ἔχον πρὸ ἑαυτῦ κείμενον ἢ ὑπενούμενον τὸ Σύμβολον +, μεταβάλλομεν αὐτὸ εἰς ἀποφατικὸν διὰ τῦ ἐναντίυ Συμβόλυ, τυτέστι διὰ τῦ —· ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ ἀποφατικὸν, τότε κάμνομεν αὐτὸ νὰ λάβῃ Σημασίαν θετικὴν διὰ τῦ Συμβόλυ +, καὶ μετὰ τῦτο γίνεται Πρόσθεσις καὶ Ἐπιτομὴ, ὡς

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ α΄.

Ἐὰν εἶναι τὸ + α ἀπὸ τῦ + α ἀφαιρετέον, γράφομεν ὕτως α — α, τυτέςι 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ β΄.

Ἐὰν ᾖ γδ ἀφαιρετέον ἀπὸ τῦ αβ, γράφομεν αβ — γδ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γ΄.

Ἐὰν ᾖ 3γδε ἀφαιρετέον ἀπὸ τῦ 4γδε, γράφομεν ὕτως 4γδε — 3γδε, τυτέςι γδε

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ δ΄.

Ἐὰν ἀπὸ τῦ αβγ εἶναι ἀφαιρετέον τὸ — αβγ, γράφομεν ἄρα αβγ + αβγ, τυτέςι 2αβγ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ε΄.

Ἐὰν ἀπὸ τῶν αα + 2βγ + ββδ ὦσιν ἀφαιρετέα τὰ αα + 4βγ — ββδ, μεταβάλλομεν πρῶτον τὰ Σύμβολα τῶν ἀφαιρετέων· οἷον — αα — 4βγ + ββδ, ἔπειτα προστιθέντες ἀλλήλοις τὰ Ποσὰ, ἔχομεν αα — αα + 2βγ — 4βγ + ββδ + ββδ, τυτέςι 2ββδ — 2βγ.

ΔΕΙ̃ΞΙΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ἀφαίρεσις ἑνὸς Ποσοῦ ἐκδηλοῦται διὰ τοῦ Συμβόλου — (§. 6.)· λοιπὸν ὅταν πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ Ποσὸν β ἀπὸ τοῦ Ποσοῦ α, πρέπει νὰ γράφωμεν πρὸ τοῦ β τὸ Σύμβολον —, τουτέστι νὰ μεταβάλλωμεν τὸ + εἰς τὸ —. ὅταν δὲ τὸ ἀφαιρετέον Ποσὸν ἔχῃ Σύμβολον τὸ —, ὑπάρχει ἄρα τότε ἀφαιρετέον, καὶ ὡς τοιοῦτον πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ· ὅθεν πρέπει νὰ μεταβάλωμεν τότε τὸ ἀποφατικὸν Σημεῖον — εἰς Καταφατικὸν + κατὰ τὸν γενικὸν ἐκεῖνον Κανόνα „· ὅτι δύω ἀποφάσεις ἀποτελοῦσι μίαν Κατάφασιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ ά.

§. 10. Τοῦτο ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τῆς Ἰδέας τοῦ ἀποφατικοῦ Ποσοῦ (§. 9). διότι, ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι μία Ἔλλειψις, ἢ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἓν χρέος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἄλλης ὁποιασδήποτε Ποσότητος, διὰ τοῦτο τὸ νὰ ἀφαιρῆται μία Ἔλλειψις, ἢ ἓν χρέος, δὲν σημαίνει ἄλλο, παρὰ νὰ κάμωμεν, ὥστε νὰ μὴν ἔχῃ ὁ ἄλλος αὐτὴν τὴν Ἔλλειψιν, αὐτὸ τὸ χρέος. τοῦτο ὅμως κατ' ἄλλον τρόπον δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποτελέσωμεν, εἰ μὴ μεταποιοῦντες διὰ τῶν Συμβόλων τὴν ἀποφατικὴν Ποσότητα εἰς Καταφατικήν. καθὼς ἐξ ἐναντίας τὸ νὰ προστίθηται μία Ἔλλειψις σημαίνει τὸ νὰ κάμωμεν νὰ ἔχῃ ὁ ἄλλος αὐτὴν τὴν Ἔλλειψιν. ὅταν λοιπὸν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ α τὸ ἧττον β, γράφομεν α — β. ὅταν δὲ ἔχωμεν νὰ ἀφέλωμεν τὸ ἧττον β ἀπὸ τοῦ α, γράφομεν α + β. καὶ πάλιν ἂν προσθέσωμεν εἰς τὰ 12 τὴν Ἔλλειψιν, ἢ τὸ χρέος 4, ἔχομεν 12 — 4, τουτέστι 8. ἐὰν δὲ ἀφέλωμεν ἀπὸ τῶν 8 τὴν Ἔλλειψιν 4, τότε ἔχομεν 8 + 4 τουτέστι 12.

ΣΧΟΛΙΟΝ γ'.

§. 11. Ἐπειδὴ εἶναι ἀντίφασις τὸ νὰ ὑπάρχῃ τῷ ὄντι μία ἀποφατικὴ Ποσότης ὡς τοιαύτη, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τὴν θεωρῶμεν πάντοτε ποτε ὡς μίαν ἀληθῶς ὑπάρχουσαν, ἥτις πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ, διὰ τοῦτο προϋποθέτει αὕτη πάντοτε μίαν ἄλλην Καταφατικὴν, ἀπὸ τῆς ὁποίας πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ. ἐκ τούτου πηγάζει ἔτι μία ἄλλη ἀπόδειξις διὰ ἓν τοιοῦτον Συμπεπλεγμένον Ποσόν. π. χ. τὸ β — γ ἔστω ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ α. ἐὰν ἂν ἀφέλωμεν τὸ β ἀπὸ τοῦ α, τουτέστι α — β, ἕκαστος εὐκόλως δύναται νὰ καταλάβῃ ὅτι ἀφῃρέθη πλέον τοῦ δέοντος. ἐπειδὴ δὲν ἔπρεπε νὰ ἀφέλωμεν ὅλον τὸ Ποσὸν β, ἀλλὰ τὸ β ἐλαττούμενον κατὰ τὸ γ, μόνην δηλονότι τὴν διαφορὰν καθ' ἣν τὸ β ὑπερέχει τὸ γ. διὰ νὰ ἀποπληρώσωμεν λοιπὸν τὸ ἔλλειπον κατὰ τὸ δέον, πρέπει νὰ προσθέσωμεν πάλιν τόσον, ὅσον ἀφῃρέθη πλέον τοῦ δέοντος. ἀλλὰ μὴν τοῦτο τὸ πλέον τοῦ δέοντος ἀφαιρεθὲν εἶναι τὸ γ, ἄρα τὸ γ αὖθις πρέπει νὰ προστεθῇ, καὶ τότε ἔχομεν α — β + γ, τουτέστι τὰ Σύμβολα μεταβάλλονται εἰς τὸ ἐναντίον. Πρὸς σαφεστέραν κατάληψιν τῶν λεγομένων, ἔστω ἀπὸ τῶν 12 ἀφαιρετέος ἀριθμὸς ὁ 8 — 3. ὅθεν ἐὰν ἀπὸ τῶν 12 ἀφέλωμεν ὅλα τὰ 8, ἀφαιροῦμεν τότε τρεῖς μονάδας πλέον τοῦ δέοντος. ἐπειδὴ δὲν πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ὅλος ὁ 8 ἀριθμὸς, ἀλλὰ μόνον ὁ 8 — 3, δηλαδὴ μόνον ὁ 5. ἂν λοιπὸν γράψωμεν 12 — 8, δὲν ἔχομεν τὴν ἀληθῆ διαφορὰν τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ἀλλ' ἐλάσσονα τοῦ ἀληθοῦς. ὥστε διὰ νὰ ἀποπληρώσωμεν τὸ ἔλλειπον, πρέπει νὰ προσθέσωμεν 3 μονάδας, καὶ οὕτω γίνεται 12 — 8 + 3, τουτέστιν 7, ὥσπερ ἂν νὰ ἀφαιρέσαμεν ἀπὸ τῶν 12 τὸν ἀριθμὸν 8 — 3, τουτέστιν 5.

ΣΧΟΛΙΟΝ γ'.

§. 22. Ὅσον ὀλιγώτερον ἀφαιρεῖται ἀπὸ τινος ἀριθμοῦ π. χ. ἀπὸ τοῦ 7, τόσον περισσότερον μένει. ἂν τοίνυν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ Μηδὲν, ἢ 0, τότε μένει ὅλος ὁ ἀριθμός. Ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ἔτι ὀλιγώτερον τοῦ Μηδενὸς, ἤτοι μία ἀποφατικὴ Ποσότης, τότε πρέπει νὰ μένῃ πλέον τῶν 7. π. χ. ἐὰν ἀπὸ τῶν 7 ἀφέλωμεν 4, μένουσι 3, ἐὰν δὲ ἀφέλωμεν 2, μένουσιν 5, ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν 7 ἀφέλωμεν τὸ 0, μένουσιν ὁμοίως 7, ἄρα ἂν ἀπὸ τῶν 7 ἀφαιρεθῇ — 2, τότε μένουσι 9.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ β.

§. 23. Τῶν δεδομένων Μελῶν δύνανται νὰ γραφθῶσι τὰ Ὁμοειδῆ ὑποκάτω τῶν Ὁμοειδῶν, καθὼς καὶ ἐπὶ τῆς Συνάψεως (§. 17) εἴρηται, οὕτως ὅμως ἐνταῦθα, ὥστε τὰ ἀφαιρετέα Μέλη νὰ γράφωνται ὑποκάτω ἐκείνων, ἀπὸ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ ἀφαιρεθῶσι, καὶ ἀφ' οὗ μεταβληθῶσιν εἰς τὸ ἐναντίον τὰ Σύμβολα, τὸ λοιπὸν τῆς Πράξεως δὲν διαφέρει τῆς Συνάψεως, τοῦτ' ἔστι τῶν μὲν Ταυτοσυμβόλων συνάπτομεν τοὺς Συνεργοὺς, τῶν δὲ Ἑτεροσυμβόλων τοὺς Συνεργοὺς ἀφαιροῦμεν, καὶ τὸ ἐξαχθὲν ἔσται ἡ τούτων Διαφορὰ, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς Ὑποδείγμασι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ α.

$9\alpha\beta - 13\gamma\delta + 6\varepsilon\zeta + 2\zeta\eta\eta$ τὸ μεῖζον Ποσόν.

$-6\alpha\beta - 7\gamma\delta + 3\varepsilon\zeta + 3\zeta\eta\eta$ τὸ ἀφαιρετέον.

$+ \quad + \quad - \quad -$ μεταβολὴ τῶν Συμβόλων.

$15\alpha\beta - 6\gamma\delta + 3\varepsilon\zeta - \zeta\eta\eta$ ἡ Διαφορά.

ΥΠΟΔΕΙΓ. β.

$12\chi + 6\alpha - 4\beta - 12\gamma - 7\delta - 5\zeta.$ τὸ μεῖζον Π.

$10\chi + 9\alpha - 8\beta - 7\gamma - 6\delta - 5\zeta.$ τὸ ἀφαιρ.

$- \quad - \quad + \quad + \quad + \quad +$ μεταβολὴ τῶν Συμβ.

$2\chi - 3\alpha + 4\beta - 5\gamma + 6\delta - 7\varepsilon.$ ἡ Διαφορά

ΥΠΟΔΕΙΓ. γ.

$20\alpha\alpha\beta + 6\alpha\beta\beta\gamma - 18\gamma\gamma\delta + 5\delta\varepsilon\varepsilon.$ τὸ μεῖζον Π.

$2\alpha\alpha\beta - 3\alpha\beta\gamma + 7\gamma\gamma\delta + 5\delta\varepsilon\varepsilon.$ τὸ ἀφαιρ.

$18\alpha\alpha\beta + 6\alpha\beta\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma - 25\gamma\gamma\delta.$ ἡ Διαφορά.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ

§. 24. Ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίτον Ὑπόδειγμα εἶναι τὸ αββγ ϗ αβγ ἀνόμοια Ποσὰ (ἐπειδὴ εἰς μὲν τὸ πρῶτον εἶναι δὶς τὸ β, εἰς δὲ τὸ δεύτερον μόνον ἅπαξ γεγραμμένον) διὰ τοῦτο δὲν δύνανται αὐτὰ τὰ δύω Μέλη νὰ συλληφθῶσιν εἰς ἓν Μέλος. ὅθεν πρέπει ἕκαστον νὰ γραφθῇ χωρὶς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ δ'.

§. 25. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν Ποσότητας Ἀλγεβραϊκας.

ΛΥΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

Καν. α'.) Δύω Καταφατικοὶ Παράγοντες, διδόασιν εἰς τὸ Γινόμενον πάντοτε τὸ Σύμβολον +, τουτέστιν ἀποτελοῦσι Γινόμενον πάντοτε Καταφατικὸν, ὁμοίως ϗ δύω ἀποφατικοὶ Παράγοντες διδόασιν εἰς τὸ Γινόμενον τὸ Συμβ. + τουτέστι ἀποτελοῦσι πάντοτε Γινόμενον Καταφατικόν. ὅταν ὅμως ὁ ἕνας τῶν Παραγόντων εἶναι Καταφατικὸς, ὁ δὲ ἄλλος εἶναι ἀποφατικὸς, τότε εἰς τὸ Γινόμενον ἔσται τὸ Σύμβολον — τουτέστι τὸ Γινόμενον ἔσται πάντοτε ἀποφατικόν.

Καν. β'.) Οἱ Συνεργοὶ τῶν Παραγόντων πολλαπλασιάζονται μετ' ἀλλήλων, ϗ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον εἶναι ὁ Συνεργὸς τοῦ Ἀλγεβραϊκοῦ Γινομένου.

Καν. γ'.) Τὰ Γράμματα Συνάπτονται, ϗ συνενοῦνται ἀλλήλοις χωρὶς παρεμπτώσεως τινὸς Συμβόλου.

ΥΠΟ-

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ.

ἐκ τῦ $\alpha \times \beta$ ἀποτελεῖται τὸ Γινόμενον $\alpha\beta$, τυτέσι Καταφ.
ἐκ τῦ $\alpha \times -\beta$ ἀποτελεῖται Γινόμ. $-\alpha\beta$, τυτές. Ἀποφ.
ἐκ τῦ $-\alpha \times \beta$ ἀποτελ. Γινόμ. $-\alpha\beta$, τυτές. Ἀποφ.
ἐκ τῦ $-\alpha \times -\beta$ ἀποτελ. Γινόμ. $\alpha\beta$, τυτές. Καταφ.
ἐκ δὲ τῦ $2\alpha \times 6\beta$ ἀποτελ. Γινόμ. $12\alpha\beta$. Καταφ.

Ἐπὶ δὲ τῶν Συμπεπλεγμένων Ποσῶν πρέπει κάθε Μέλ☉ τῦ Πολλαπλασιασῦ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ ὅλα τὰ Μέλη τῦ Πολλαπλασιασέυ καθὼς εἰς τὺς ἀριθμὺς π. χ. $(3\alpha\gamma - 4\beta\delta) \times 2\alpha\beta$ ἀποτελεῖ Γινόμενον $6\alpha\alpha\beta\gamma - 8\alpha\beta\beta\delta$. ϗ $(2\alpha + \beta - 5\gamma) \times (3\alpha - \delta + 6\varepsilon)$ δίδει Γινόμ. τὸ $6\alpha\alpha + 3\alpha\beta - 15\alpha\gamma - 2\alpha\delta - \beta\delta + 5\gamma\delta + 12\alpha\varepsilon + 6\beta\varepsilon - 30\gamma\varepsilon$. τυτέσι ὁ Πολλαπλασιασέ☉ πολλαπλασιάζεται πρῶτον μετὰ τῦ 3α, ὕςερον μετὰ τῦ $-\delta$, ϗ τέλ☉ μετὰ τῦ 6ε. ἂν δὲ εὑρεθῶσί τινα Ὁμοειδῆ Μέλη, ἀνάγομεν αὐτὰ κατὰ τὸ Α΄. Πρόβλημα εἰς ἕν Μέλ☉, τῦτο γίνεται πολλὰ εὐκόλως, ἂν μεταξὺ τῆς ἐργασίας γράφωμεν τὰ Ὁμοειδῆ ὑποκάτω τῶν Ὁμοειδῶν, καθὼς θέλομεν ἰδῆ κατωτέρω ἐν τῷ πρώτῳ Ὑποδείγματι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Περὶ τῶν Συμβ. Πολλαπλασιασμός ἐςι τὸ νὰ λάβωμεν τοσάκις τὸν Πολλαπλασιασέον, ὁσάκις ὁ Πολλαπλασιασὴς περιέχει τὴν Μονάδα. ὅταν λοιπὸν πολλαπλασιάζωμεν μίαν Καταφατικὴν Ποσότητα μετ' ἄλλης Καταφατικῆς, ἢ τὸ Σύμβολον $+$ μετ' ἄλλυ τοιύτυ $+$. ἢ ὅταν

προσ-

προσθέτωμεν πλεονάκις μίαν δεδομένην Ποσότητα, τότε τίθεται ἡ ἀνωτέρω Ποσότης τοσάκις, ὁσάκις περιέχεται ἡ Μονὰς εἰς τὴν κατωτέρω Ποσότητα. π. χ. ἐκ τοῦ $+ 3 \times + 2$ προάγεται 6, ἐπειδὴ τὸ 3 πρέπει νὰ τεθῇ δύο φοραῖς, ὅθεν πρέπει εἰς τὸ Γινόμενον νὰ μείνῃ τὸ Καταφατικὸν Σύμβολον +.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάζωμεν μίαν ἀποφατικὴν μετ' ἄλλης Καταφατικῆς Ποσότητος, τότε δεικνύει ὁ Πολλαπλασιασμὸς, ποσάκις πρέπει ἡ ἀποφατικὴ Ποσότης νὰ τεθῇ, ἢ νὰ γραφθῇ, ὅθεν μένει Γινόμενον ἀποφατικὸν, καὶ ἐμφαίνεται διὰ τοῦ Συμβόλου —. ἐπειδὴ ἡ ἀποφατικὴ Ποσότης ἐλήφθη τοσάκις, ὁσάκις ὁ Καταφατικὸς Πολλαπλασιαστὴς περιέχει τὴν Μονάδα. π. χ. $- 3 \times + 2$ σημαίνει, ὅτι ἡ Ἔλλειψις τῆς Ποσότητος 3 πρέπει νὰ τεθῇ δὶς, ὅπερ ἐστὶν $- 6$.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάζωμεν μίαν Καταφατικὴν Ποσότητα μετ' ἄλλης ἀποφατικῆς, τότε πρέπει ἡ Καταφατικὴ Ποσότης νὰ ἀφαιρεθῇ τοσάκις, ὁσάκις ἐν τῷ ἀποφατικῷ Πολλαπλασιαστῇ περιέχεται ἡ Μονὰς π. χ. $3 \times - 2$ σημαίνει, ὅτι ἡ Ποσότης 3 πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ δὶς, ὅπερ ἀποτελεῖ $- 6$.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ μία ἀποφατικὴ Ποσότης μετ' ἄλλης ἀποφατικῆς, τότε δεικνύει ὁ Πολλαπλασιασμὸς, ὅτι ἡ ἀποφατικὴ Ποσότης πρέπει τοσάκις νὰ ἀφαιρεθῇ, ὁσάκις περιέχεται ἡ Μονὰς ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ. ἀλλὰ μὴν τὸ νὰ ἀφαιρῆται μία ἀποφατικὴ Ποσότης, δηλοῖ τὸ νὰ προστίθηται. ἄρα καὶ τὸ Γινόμενον πρέπει νὰ ἔχῃ Σύμβολον Καταφατικὸν +. ἐπειδὴ ἡ Ἔλλειψις τῆς ἀποφατικῆς Ποσότητος τοσάκις λαμβάνεται, ὁσάκις ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ περιέχεται ἡ Μονάς.

Ὅσον

Ὅσον δὲ διὰ τοὺς Συνεργοὺς εἶναι φανερὰ ἡ Δεῖξις ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ Πολλαπλασιασμοῦ. ἐπειδὴ οἱ Συνεργοὶ εἰσὶν οἱ Παράγοντες, οἱ ὁποῖοι μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθέντες, ἀποτελοῦσι τὸ ζητούμενον Παραγόμενον.

Περὶ τῶν Γραμμάτων. Πολλαπλασιάζειν ἐστὶ τὸ νὰ κάμωμεν ἐκ μιᾶς ἁπλῆς Ποσότητος μίαν ἄλλην Σύνθετον. ἀλλὰ μὴν Σύνθετος Ποσότης λέγεται ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχουσι πολλὰ Γράμματα συνεζευγμένα χωρὶς παρεμπτώσεως τινὸς Συμβόλου (§.4.). ἄρα διὰ τῆς τοιαύτης καταγραφῆς τῶν Γραμμάτων πολλαπλασιάζονται αἱ Ποσότητες. α καὶ β εἰσὶν ἁπλαῖ Ποσότητες, ἢ Παράγοντες, τὸ δὲ αβ εἶναι Ποσότης Σύνθετος, ἢ Γινόμενον, ὅπερ κατ' ἄλλους καὶ Παραγόμενον ὀνομάζεται. ὡσαύτως αβ καὶ γδ εἰσὶν οἱ Παράγοντες, τὸ δὲ αβγδ εἶναι τὸ ἐκ τούτων Παραγόμενον.

ΣΧΟΛΙΟΝ ά.

§. 26. Ἡ αὐτὴ Δεῖξις, ἥτις καὶ ἐν τῷ (§. 21.) περὶ τῆς ἀφαιρέσεως εἴρηται, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος, ἐπειδὴ μία ἀποφατικὴ Ποσότης δὲν ὑπάρχει ἀληθῶς, διὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον νὰ Πολλαπλασιασθῇ μετ' αὐτῆς ἄλλη τις ἀποφατική. ὅθεν πρέπει νὰ θεωρῆται αὕτη ὡς ἡνωμένη μετά τινος ἄλλης Ποσότητος, ἀφ' ἧς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ. π. χ. α — γ ἔστω πολλαπλασιαζόμενον μετὰ τοῦ β — δ. καὶ τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τοῦ β γενομένης, α μετὰ τοῦ β πολλαπλασιασθὲν παρέχει αβ. ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὅλη ἡ Ποσότης α, ἀλλὰ μόνον α — γ, τουτέστιν α παρὰ γ, διὰ τοῦτο τὸ Γενόμενον αβ εἶναι μεῖζον τοῦ δικαίου τόσον, ὅσον δίδωσι τὸ β μετὰ τοῦ γ πολλαπλασιασθέν. πρέπει λοιπὸν τὸ βγ νὰ ἀφαιρεθῇ, ὅθεν — γ × + β δίδωσι — βγ, ἢ ἀνόμοια Σύμβολα διδόασι Σύμβολον —. ἔπειτα τὸ α μετὰ τοῦ — δ πολλαπλασιασθὲν (κατὰ τὰ ἄνω εἰρημένα, ἢ ἐπειδὴ πρέ-

πει

και νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ α τοσάκις, ὁσάκις τὸ δ περιέχει τὴν Μονά-
δα) δίδωσιν − αδ. ἀλλ' ἐπειδὴ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ
νὰ ἀφαιρεθῇ ὄχι ὅλη ἡ Ποσότης α. ἀλλὰ μόνον τὸ α παρὰ τὸ
γ, διὰ τοῦτο ἀφηρέθη πλέον τοῦ δέοντος τόσον, ὅσον δίδωσι τὸ γ
μετὰ τοῦ δ πολλαπλασιασθὲν, ὅθεν πρέπει αὕτη ἡ Ποσότης γδ
πάλιν νὰ προστεθῇ, ἢ νὰ γραφῇ μετὰ τοῦ Συμβόλου +. τουτέστι τὸ
− μετὰ τοῦ − πολλαπλασιασθὲν, δίδωσι τὸ +. Ἡ ἀλήθεια
ταύτης τῆς πράξεως φαίνεται σαφέστατα, ἂν ἡ σημασία τῶν Γραμ-
μάτων προσδιορισθῇ δι' ἀριθμητικῶν χαρακτήρων. π. χ. ἔστωσαν
8 − 3 Πολλαπλασιαστέα μετὰ τῶν 6 − 4, ὅθεν 8 διὰ τοῦ 6 πολ-
λαπλασιασθεὶς, δίδωσι 48, ἀλλ' αὐτὸ τὸ Γενόμενον εἶναι μεῖζον
τοῦ δέοντος. ἐπειδὴ δὲν πρέπει ὅλος ὁ 8 ἀριθμὸς νὰ πολλαπλα-
σιασθῇ μετὰ τοῦ 6, ἀλλὰ μόνον 8 παρὰ 3. ὅθεν τὸ ἐκ τοῦ 3
καὶ 6 Γενόμενον, τουτέστι ὁ 18 ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ. λοι-
πὸν τὸ πρῶτον ἀληθὲς Παραγόμενον εἶναι 48 − 18. πάλιν 8
ἐπὶ τὸν − 4 πολλαπλασιασθεὶς, δίδωσι − 32 κατὰ τὰ ἀνωτέρω
εἰρημένα. ἀλλὰ καὶ τοῦτο τὸ ἀποφατικὸν, ἢ ἀφαιρετέον Ποσὸν εἶναι
τόσον μεῖζον τοῦ δέοντος, ὅσον εἶναι τὸ ἐκ τοῦ 3 καὶ 4 Γενόμενον.
διὰ νὰ γένῃ λοιπὸν ἡ προσήκουσα ἀναπλήρωσις, πρέπει νὰ προστεθῇ
τὸ ἐκ τοῦ 3 καὶ 4 Γενόμενον, τουτέστι ὁ 12, καὶ οὕτως ἀποκτῶμεν τὸ
δεύτερον ἀληθὲς Γενόμενον − 32 + 12. ἀμφότερα τὰ Γενόμενα
ποιοῦσι 48 − 18 − 32 + 12, τουτέστι 60 − 50 = 10, καὶ τοῦτο εἶναι
τὸ ἴδιον Γενόμενον ἐκ τῶν 5 (ἤτοι 8 − 3) καὶ 2 (ἤτοι 6 − 4).

ΣΧΟΛΙΟΝ β.

§. 27. Ἐὰν ὦσιν οἱ Παράγοντες Συμπεπλεγμένα Ποσὰ, γράφομεν πρῶτον τὸν Πολλαπλασιαστὴν ὑποκάτω τοῦ Πολλαπλασιαστέου, ἔπειτα τραβοῦμεν μίαν Γραμμὴν (ὡς εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀριθμῶν), ὑποκάτω τῆς ὁποίας γράφομεν τὰ γενόμενα εἰς διαφόρους Σειρὰς, (ἀράδας) ἔνθα πρέπει νὰ παρατηρῶμεν ἐπιμελῶς, ὥστε πάντοτε ἡ Ὁμοειδὴς Ποσότης νὰ ἔρχηται ὑποκάτω τῆς Ὁμοειδοῦς. μετὰ τοῦτο ἐπιτέμνομεν, ἂν εἶναι δυνατὸν, πάντα ταῦτα τὰ μερικὰ Γενόμενα κατὰ τὸ (§. 14.). καὶ γράφομεν τὸ γενικὸν Γενόμενον εἰς μίαν Σειρὰν, καθὼς εἰς τὰ ἑπόμενα Παραδείγματα.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

$$\alpha + \beta$$
$$\alpha - \beta$$
$$\alpha\alpha + \alpha\beta$$
$$- \alpha\beta - \beta\beta$$
$$\alpha\alpha - \beta\beta$$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

$$3\alpha\beta - 6\gamma\delta + 5\varepsilon\varepsilon\zeta$$
$$4\alpha\beta - 3\varepsilon\zeta$$
$$12\alpha\alpha\beta\beta - 24\alpha\beta\gamma\delta + 20\alpha\beta\varepsilon\varepsilon\zeta$$
$$- 9\alpha\beta\varepsilon\zeta + 18\gamma\delta\varepsilon\zeta - 15\varepsilon\varepsilon\varepsilon\zeta\zeta$$
$$12\alpha\alpha\beta\beta - 24\alpha\beta\gamma\delta + 20\alpha\beta\varepsilon\varepsilon\zeta - 9\alpha\beta\varepsilon\zeta + 18\gamma\delta\varepsilon\zeta - 15\varepsilon\varepsilon\varepsilon\zeta\zeta.$$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

$$6\chi\chi - 7\alpha\chi + 8\alpha\alpha$$
$$2\chi\chi - 3\alpha\chi + 8\alpha\alpha$$
$$12\chi\chi\chi\chi - 14\alpha\chi\chi\chi + 16\alpha\alpha\chi\chi$$
$$- 18\alpha\chi\chi\chi + 12\alpha\alpha\chi\chi - 24\alpha\alpha\alpha\chi$$
$$+ 24\alpha\alpha\chi\chi - 28\alpha\alpha\alpha\chi + 32\alpha\alpha\alpha\alpha.$$
$$12\chi\chi\chi\chi - 32\alpha\chi\chi\chi + 61\alpha\alpha\chi\chi - 52\alpha\alpha\alpha\chi + 32\alpha\alpha\alpha\alpha.$$