δεῖς, ἔπειτα ποιοῦμεν ἐπ' αὐτῶν τὴν Διαίρεσιν, καθὼς ϗ κατωτέρω εἰς τὸ τέταρτον Παράδειγμα ταύτην τὴν περίςασιν παραθέτομεν. ὅταν δὲ ϗ ὁ Διαιρετέος ϗ ὁ Διαιρέτης ὑπάρχωσι συγκείμενοι ἐκ πολλῶν εἰδῶν, πλὴν σημαίνωσι Ποσὰ ἑτερογενῆ, τότε διαλύομεν ἑκάτερον εἰς τὸ μικρότερον εἶδος αὐτοῦ, ἔπειτα διαιροῦμεν αὐτοὺς, ὡς ϗ 'ν τῷ πέμπτῳ Παραδείγματι ποιεῖται.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. α'.

Νὰ διαιρεθῶσι 453 Γρόσια ϗ 8 Παράδ. εἰς 4 ὑποκείμενα. ὅθεν

	Γρόσια	Παράδ.	
	453	8	4
	4	40	
	——	——	
	05	48	
	——	4	
	13	——	
	12	08	
	——	8	
λείψανον	1	——	
		0	

τὰ 453 Γρόσια διαιρεθέντα διὰ τῶν 4, παρέχουσι Πηλίκον Γρόσια 113. ϗ μένει ἐξ αὐτῶν ἀδιαίρετον ἓν Γρόσιον, τοῦτο δὲ εἰς 40 Παράδ. διαλυθέντος, ϗ συναφθέντος μετὰ τῶν λοιπῶν Παράδων, ἀναφύεται ὁ ἀριθμὸς 48, ὁ ὁποῖος διαιρεθεὶς διὰ τῶν 4, παρέχει Πηλίκον Παράδ. 12. ὥστε ἕκαστον τῶν 4 ὑποκειμένων λαμβάνει 113 Γρόσ. ϗ 12 Παράδ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β.

Ταχυδρόμος τις πεπαγμένως ὁδεύων, εἰς 5 ἡμέρας καὶ 7 ὥρας διήλασε δρόμον 762 Μίλλια, καὶ ζητεῖται, πόσα Μίλλια διήνυσεν οὗτος καθ' ἑκάστην ἡμέραν.

Διαλύομεν πρῶτον τὰς 5 ἡμέρας εἰς ὥρας, πολλαπλασιάζοντες τὸν 5 ἀριθμὸν διὰ τοῦ 24. ὅτι εἴκοσι τέσσαρας ὥρας ἔχει ἡ ἡμέρα, ὥστε προκύπτει ἀριθμὸς ἡμερῶν 120, ἔπειτα συνάψαντες τοῦτον τὸν ἀριθμὸν μετὰ τῶν λοιπῶν 7 ἡμερῶν, ποιοῦμεν τὴν Διαίρεσιν, οὕτω

Μίλλια

762 | 127 ὧραι

6

762

000

γίγονεν ἄρα φανερὸν ὅτι οὗτος ὁ Ταχυδρόμος ἔτρεχε τὴν ὥραν 6 Μίλλια, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιασθέντα διὰ τῶν 24 ὡρῶν, δεικνύουσιν, ὅτι ὥδευε καθ' ἑκάστην ἡμέραν 144 Μίλλια.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ.

Α'νθρωπός τις εἰς 2 ὥρας καὶ 20 λεπτὰ ἔτρεξεν 28 Μίλλια ζητεῖται λοιπὸν, πόσα Μίλλια διέτρεξε καθ' ἑκάστην ὥραν.

Α'φ' οὗ διαλυθῶσιν αἱ 2 ὧραι διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως τῶν 60 (ἐπειδὴ ἑξήκοντα λεπτὰ συμπληροῦσι μίαν ὥραν), προκύπτει ἀριθμὸς 120 λεπτὰ, σὺν αὐτοῖς δὲ συναφθέντων καὶ τῶν 20, γίνονται ἅπαντα 140 λεπτὰ, διὰ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ διαιρεθῶσι τὰ 28 Μίλλια, ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ 28 δὲν δύνανται νὰ διαιρεθῶσι διὰ τῶν 140, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ αὐξήσωμεν καὶ αὐτὰ διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως τοῦ ἀριθμοῦ 60, ἐπειδὴ δὲ αὐτοῦ διελύσαμεν καὶ τὸ μεῖζον εἶδος τοῦ Διαιρέτου, τουτέστι τὰς 2 ὥρας εἰς λεπτά. ὅθεν τὰ 28 Μίλλια

λια πολλαπλασιασθέντα διὰ τῶν 60, παρέχουσι ἀριθμὸν 1680, ἐπὶ τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ Διαίρεσις οὕτως.

```
1680 | 140
     ------
       12
140
---
0280
 280
 ---
 000
```

ὅθεν γίνεται φανερὸν, ὅτι εἰς κάθε ὥραν ἔτρεξεν 12 Μίλλια.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ δ'.

Νὰ διαιρεθῶσι 16 Γροσ. καὶ 10 Παράδ. διὰ 4 Γροσίων καὶ 2 Παράδων.

Τὰ 16 Γρόσια τοῦ Διαιρετέου διαλυθέντα πρῶτον εἰς Παράδ. καὶ συναφθέντα ἔπειτα μετὰ τῶν λοιπῶν 10 Παράδων, παρέχουσιν ἀριθμὸν 650 Παράδ. διαλυθέντα δὲ καὶ τὰ 4 Γρόσ. τοῦ Διαιρέτου εἰς Παράδ. καὶ συναφθέντα μετὰ τῶν λοιπῶν 2 Παράδων, ποιοῦσιν ἀριθμὸν 162. ὅθεν γίνεται

$$\begin{array}{l|l} 650 & 162 \\ \hline & 4+\frac{2}{162} \end{array}$$

648

---

002 ἐναπολειπόμενον.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ϛ.

Ε'ργαζόμενός τις, ἔλαβε μισθὸν εἰς 4 Μῆνας ϗ 6 ἡμέρας, Γρόσια 37 ϗ 32 Παράδ. ϗ ζητεῖ νὰ μάθῃ, πόσος εἶναι ὁ μισθὸς ἑκάστε Μηνός.

Διαλυθέντων τῶν 4 Μηνῶν εἰς ἡμέρας, ϗ σὺν αὐταῖς ληφθεισῶν ϗ τῶν 6 λοιπῶν ἡμερῶν, γίγνεται ἀριθμὸς 126 ἡμερῶν. διαλυθέντων δὲ ϗ τῶν 37 Γροσίων εἰς τὸ μικρότερον αὐτῶν εἶδος, τετέςιν εἰς Παράδ. ϗ σὺν αὐτοῖς ληφθέντων ϗ τῶν 32 Παράδων, προκύπτει ἀριθμὸς 1512 Παράδ. ὅθεν γίνεται ἡ Διαίρεσις ὕτως

Παράδες	Η'μέραι
1512	126
126	12
0252	
252	

δῆλον ἄρα, ὅτι καθ' ἑκάςην μὲν ἡμέραν ἦν αὐτῷ ὁ μισθὸς 12 Παράδες, καθ' ἕκατον δὲ Μῆνα ἐγένοντο Παράδες 360 τυτέςι Γρόσια 9.

Υ'ΠΟΣΗΜΕΙ'ΩΣΙΣ.

§. 59. Αἱ Δείξεις τέτων τῶν ποικίλων Προβλημάτων, ἐπειδὴ εἰσὶν αἱ αὐταὶ μὲ τὰς Δείξεις τῶν ὁμοειδῶν, δὲν παρατίθενται ἐνταῦθα, ὡς περιτταί.

ΚΕΦΑΛ.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ δ'.

Γενικαὶ Ἰδέαι τῶν Κλασμάτων.

ΟΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 60. Κλάσμα τοίνυν ἐςὶ μέρος τινὸς ὅλυ ὡς Μονάδος θεωρυμένυ, ἢ μέρος ἐςὶ τῆς μονάδος, ὅθεν ϗ τῆς Μονάδος ἐκείνης ἔλαττον ὑπάρχει.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 61. Ἐὰν τι ὅλον, ἢ Μονάς τις διαιρεθῇ εἰς πλείονα μέρη, ϗ ἐξ αὐτῶν ληφθῶσί τινα, λέγεται τότε Κλάσμα. οἷον, ἐὰν διέλωμεν ἓν ὅλον εἰς ἓξ ἴσα μέρη, ϗ ἐξ αὐτῶν ἔχωμεν νὰ λάβωμεν δύω μόνα μέρη, ἐκθέτομεν αὐτὰ ὕτως $\frac{2}{6}$, ϗ τότε καλῦμεν καὐτὸ Κλάσμα. ἂν διαιρεθῇ τὸ Γρόσιον εἰς τεσσαράκοντα ἴσα μέρη, ἕκαςον μέρος αὐτῶν δύναται ἴσον μὲ ἕνα Παρᾶν. ὅθεν ἂν θέλωμεν νὰ λάβωμεν ἐξ αὐτῶν μόνον 30 Παράδας, ἐμφαίνομεν ὕτως $\frac{30}{40}$. ὕτω δὴ ϗ $\frac{3}{4}$ σημαίνει, ὅτι τὸ ὅλον, ἢ ἡ Μονάς διηρέθη εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, ϗ ἐλήφθησαν μόνον τρία τεταρτημόρια. ὥςε ἕκαςον Κλάσμα ἔχει δύω μέρη, τὸ μὲν ἓν δεικνύει εἰς πόσα μέρη τὸ ὅλον διῄρηται, τὸ δὲ ἄλλο ἐμφαίνει, πόσα μέρη τῦ ὅλυ παρείληπται ἐν αὐτῷ τῦ Κλάσματος,

ΟʹΡΙΣΜΟʹΣ β΄.

§. 62. Ἀριθμητὴς μὲν Κλάσματος ἐστιν ἐκεῖνος ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος κεῖται ὑπεράνω τῆς Γραμμῆς, καὶ δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν ληφθέντων μερῶν ἐκ τοῦ ὅλου. Παρωνυμῶν δὲ, ἢ Παρονομαστὴς Κλάσματός ἐστιν ὁ ὑποκάτω τῆς Γραμμῆς κείμενος ἀριθμὸς, ὅστις ἐμφαίνει, εἰς πόσα Ἴσα μέρη τὸ ὅλον διήρηται. καὶ οἱ δύω δὲ κοινῶς ὀνομάζονται Ὅροι τοῦ Κλάσματος.

ΟʹΡΙΣΜΟʹΣ γ΄

§. 63. Κυρίως μὲν Κλάσματά εἰσιν ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἐλάττων τοῦ Παρομαστοῦ οἷον $\frac{3}{4}$, ἢ $\frac{2}{6}$. Καταχρηστικὰ δὲ Κλάσματά εἰσιν ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν ἀριθμητὴν ἢ Ἴσον, ἢ μείζονα τοῦ Παρονομαστοῦ, οἷον $\frac{5}{5}$, καὶ $\frac{18}{6}$, καὶ $\frac{13}{4}$, ἐπειδὴ ὅταν ληφθῶσι μέρη πλείονα τῶν, εἰς ὅσα τὸ ὅλον διήρηται, τὸ Κλάσμα τότε εἶναι μεῖζον

τοῦ

τῦ ὅλυ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῷ τῦ Κλάσματος Ὁρισμῷ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 64. Τὰ Καταχρηστικὰ Κλάσματα δύνανται διὰ τῆς Διαιρέσεως νὰ ἀνάγωνται ἢ εἰς ἓν ὅλον μόνον, ἢ (ὅταν ἐναπολείπηταί τι) εἰς ἀκέραιον μετὰ Κλάσματος κυρίυ. τυτέςι διαιρῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τῦ Καταχρηστικῦ Κλάσματος διὰ τῦ Παρονομαςῦ, καὶ τότε τὸ Προκύπτον εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, καθὼς ἐκ τῶν ἀνωτέρω τεθέντων Καταχρηστικῶν Κλασμάτων γίνεται. οἷον ἐκ μὲν τῦ $\frac{5}{5}$ προκύπτει ἀκέραιος ἀριθμὸς 1, ἐκ δὲ τῦ $\frac{18}{6}$ γίνεται 3, ἐκ δὲ τῦ $\frac{13}{4}$ προκύπτει 3 καὶ $\frac{1}{4}$.

ΟʹΡΙΣΜΟʹΣ δʹ.

§. 65. Ἁπλῦν Κλάσμα ὀνομάζεται τὸ ἐξ ἑνὸς ἀριθμητῦ καὶ ἐξ ἑνὸς Παρονομαςῦ συνιςάμενον· οἷον $\frac{2}{4}$, $\frac{10}{17}$. Σύνθετον δὲ Κλάσμα, ἢ (ὡς ἄλλοι λέγυσι) Κλάσμα Κλάσματός ἐςι μόριον, ἢ μόρια μερῶν τινος ὅλυ, τυτέςι τὸ ἐκ πολλῶν ἁπλῶν Συγκείμενον. ὡς τὸ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τῦ $\frac{1}{2}$. π. χ. ἀπὸ τῦ ἡμίσεως τινος ὅλυ πρέπει νὰ ληφθῶσι πάλιν δύω τριτημόρια, αὐτὰ δὲ τὰ Κλάσματα ἀνάγονται ἐς ἁπλῶς Κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι μετ' ἀλλήλων κατὰ τὺς ῥηθησομένυς Κανόνας ἐν τῷ (§. 84.).

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ ά.

§. 66. Τοσάκις περιέχεται ἓν Κλάσμα ἐς τὸ ὅλον, ὁσάκις ὁ ἀριθμητὴς αὐτῦ ἐς τὸν Παρονομαστήν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ μὲν Παρονομαστὴς τῦ Κλάσματος περιέχει πόσα μέρη, εἰς ὅσα διῃρέθη τὸ ὅλον, ὁ δὲ ἀριθμητὴς παρίστησιν, ὅσα μέρη ἐλήφθησαν ἐκ τῦ Διαιρεθέντος ὅλυ, τῦτ' ἐστιν ἐμφαίνει αὐτὸ τὸ Κλάσμα (§. 62). ἄρα τὸ Κλάσμα ἔχει πρὸς τὸ ὅλον τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ ἀριθμητὴς αὐτῦ πρὸς τὸν Παρωνυμῦντα.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ ά.

§. 67. Τὰ Κλάσματα ἄρα, τῶν ὁποίων οἱ ἀριθμηταὶ ἔχυσι πρὸς τὰς Παρωνυμῦντας τὸν αὐτὸν λόγον, τυτέστι περιέχονται ἰσάκις 'ν τοῖς ἰδίοις Παρονομασταῖς, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. π. χ. $\frac{2}{4}$ καὶ $\frac{3}{6}$. 'πειδὴ ὁ 2 ἀριθμητὴς περιέχεται ἐν τῷ 4 Παρονομασῇ τοσάκις, ὁσάκις ὁ 3. ἀριθμητὴς τοῦ ἑτέρου Κλάσματος ἐν τῷ αὐτῷ Παρονομαστῇ 6. ὡσαύτως $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{90}{270}$ Ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἔλαττον δὲ Κλάσμα εἶναι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ὁ Ἀριθμητὴς περιέχεται ἐν τῷ οἰκείῳ Παρονομαστῇ πλεονάκις, παρὰ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ ἑτέρου Κλάσματος ἐν τῷ αὐτῷ Παρονομαστῇ. π. χ. τὸ $\frac{3}{24}$ ὑπάρχει ἔλαττον τοῦ $\frac{1}{6}$. ὡσαύτως καὶ τὸ $\frac{4}{7}$ ἔλαττόν ἐστι τοῦ $\frac{5}{8}$. ὁ δὲ περὶ τούτου λόγος εἶναι, ὅτι ἐπειδὴ ὁ μὲν Παρονομαστὴς ἐμφαίνει τὰ μέρη τοῦ Διαιρεθέντος ὅλου, ὁ δὲ Ἀριθμητὴς σημαίνει τὰ ἐκ τούτου ληφθέντα μέρη, πρέπει νὰ λαμβάνωνται καὶ τὰ δύω πάντοτε κατὰ τινα λόγον, καὶ ἂν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὅλον διαιρεθῇ εἰς διάφορα μέρη π. χ. ἤδη μὲν εἰς 12 μέρη, ἔπειτα εἰς 18, καὶ πάλιν εἰς 24, κατ' ἀνάγκην ἐλαττοῦνται ταῦτα τὰ μέρη τοσοῦτον, ὅσον πλεῖον διαιροῦνται. ὥστε πρέπει νὰ αὐξάνηται καὶ ὁ Ἀριθμητὴς δι' ἀναλόγων Ποσῶν, ἂν εἶναι χρεία νὰ μείνῃ ἡ Ἰσότης. τουτέστιν ἂν πρότερον ἐλήφθη ἐκ τοῦ ὅλου τὸ $\frac{6}{12}$, μετὰ ταῦτα διὰ νὰ μείνῃ τὸ Ἴσον, πρέπει νὰ ληφθῇ $\frac{9}{18}$, ἢ $\frac{12}{24}$. ὅθεν ἂν μὲν καὶ τὰ δύω μέρη αὐξυνθῶσι διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως ἴσων Ποσοτήτων, τὸ Κλάσμα μένει Ἴσον. ἂν δὲ ὁ Ἀριθμητὴς πολλαπλασιασθῇ μετὰ Ποσότητος μείζονος, παρὰ ὁ Παρονομαστὴς, τὸ Κλάσμα ἔσται μεῖζον. ὅταν ὅμως ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῇ μετὰ μείζονος, παρὰ ὁ Ἀριθμητὴς, ἔσεται ἐξ ἐναντίας τούτου τὸ Κλάσμα ἔλαττον.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 68. Ἐντεῦθεν εὐκόλως δύναται νὰ γένῃ δῆλον, ποῖα Κλάσματα εἶναι Ἴσα ἀλλήλοις, ἢ διαφέροντα, τὸ ὁποῖον εὐθὺς ἅμα ἐν τῇ ἀρχῇ δὲν ἦτον γνωστὸν, πολλαπλασιάζομεν δηλονότι τὸν Ἀριθμητὴν

μητὴν ἑκατέρου Κλάσματος μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ ἑτέρου, καὶ ἂν μὲν τὰ ἐξ αὐτῶν Γινόμενα ὦσιν ἴσα, εἰσὶ καὶ τὰ Κλάσματα ἴσα, οὗ τινος δὲ Κλάσματος ὁ Ἀριθμητὴς πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἑτέρου, ἤθελε δώσῃ μεῖζον Γινόμενον, καὶ τὸ Κλάσμα ἐκεῖνο ἔσται μεῖζον. ὅθεν τὸ $\frac{8}{24}$ καὶ $\frac{1}{3}$ εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις. ἐπειδὴ καὶ τὰ Γινόμενα ἑνὸς ἑκάστου τῶν Ἀριθμητῶν εἰσὶν ἀλλήλοις ἴσα. τὸ δὲ $\frac{5}{8}$ Κλάσμα εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{4}{7}$. ἐπειδὴ πολλαπλασιασθεὶς ὁ Ἀριθμητὴς 5 μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 7, παρέχει Γινόμενον 35, πολλαπλασιασθεὶς ὅμως ὁ 4 μετὰ τοῦ 8, παρέχει Γινόμενον 32 μόνον, ὅταν δὲ Κλάσματα ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστάς, τότε μεῖζον Κλάσμα ἔσται τὸ ἔχον Ἀριθμητὴν μείζονα, π. χ. τὸ $\frac{5}{7}$ εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{3}{7}$. ὅταν δὲ οἱ Ἀριθμηταὶ ὑπάρχωσιν ἴσοι, μεῖζον Κλάσμα ἔσεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει Παρονομαστὴν ἐλάττονα, οἷον $\frac{4}{6}$ ἐστὶ μεῖζον τοῦ $\frac{4}{8}$. ἐπειδὴ τὸ Κλάσμα ἔχει πρὸς τὸ ὅλον πάντοτε, ὡς ὁ Ἀριθμητὴς πρὸς τὸν αὐτοῦ Παρονομαστὴν §. 66.

ὉΡΙΣΜΟ'Σ ε'.

§. 69. Μικτὴ Ποσότης ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐξ ἀκεραίου καὶ Κλάσματος. οἷον $8\frac{3}{4}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ β.

§. 70. Ἂν καὶ οἱ δύω Ὅροι ἑνὸς Κλάσματος, τουτέστιν ὁ Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἡ Δύναμις τοῦ Κλάσματος δὲν λαμβάνει τινὰ μεταβολήν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πολλαπλασιασθέντος μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ, γίνεται μεῖζον τὸ Κλάσμα τοσάκις, ὅσας Μονάδας περιέχει ὁ Πολλαπλασιαστής, διὰ τοῦ ὁποίου ἐπολλαπλασιάσθη αὐτὸς ὁ ἀριθμητής. π. χ. ἂν τοῦ $\frac{3}{5}$ ὁ ἀριθμητὴς πολλαπλασιασθῇ διὰ τοῦ 2, γίνεται $\frac{6}{5}$, τὸ ὁποῖον δύναται μεῖζον δὶς τόσον, ὅσον ἐδύνατο πρότερον. πολλαπλασιασθέντος δὲ τοῦ Παρονομαστοῦ, ἐλαττοῦται τὸ Ποσὸν τοσάκις, ὁσάκις περιέχει τὴν Μονάδα ὁ Πολλαπλασιαστής, π. χ. ἂν τοῦ ἀνωτέρου $\frac{6}{5}$ πολλαπλασιασθῇ ὁ Παρονομαστὴς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 2, γίνεται ἓν Ποσὸν $\frac{6}{10}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει μόνον ἓν δεύτερον τοῦ ὅσον ἐσήμαινε πρότερον: ὥστε τὸ $\frac{6}{10}$ δύναται ἴσον μὲ τὸ $\frac{3}{5}$. ἂν δὲ τοῦ $\frac{6}{10}$ ὁ ἀριθμη-

τής

της διαιρεθῇ διὰ τοῦ 2, μένει $\frac{3}{10}$, τουτέστι τὸ ἥμισυ τοῦ προτέρου. ἂν δὲ διαιρεθῇ καὶ ὁ Παρονομαστὴς τοῦ $\frac{3}{10}$ διὰ τοῦ 2, προκύπτει $\frac{3}{5}$ τουτέστι γίνεται διπλασίως μεῖζον, καὶ ἐπομένως $\frac{6}{10}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{3}{5}$. ἄρα ἂν καὶ οἱ δύω Ὅροι ἑνὸς Κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ … κ. τ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 71. Ἐντεῦθεν πορίζεται εἰς, κατὰ ποῖον τρόπον δύνανται διάφορα Κλάσματα (ἔστωσαν καὶ ἐξ ὁποσωνδήποτε μεγίστων ἀριθμῶν συνιστάμενα) νὰ ἰσοδυναμῶσι μὲ ἓν ἕτερον Κλάσμα (κἂν ἐξ ἐλαχίστων ἀριθμῶν συγκείμενον ᾖ) καὶ νὰ ἀναχθῶσιν εἰς τοῦτο, ἐπειδὴ ἀφ' οὗ εὑρεθῇ ὁ κοινὸς Παράγων, καὶ μάλιστα ὁ μέγιστος, ὅστις διαιρεῖ καὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν Παρονομαστὴν ἀκριβῶς, δύναται νὰ γένῃ δι' αὐτοῦ ἡ Διαίρεσις, καὶ ἀντὶ τῶν προτέρων Ποσοτήτων γράφονται τὰ εὑρισκόμενα Πηλίκα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὸ πρότερον Κλάσμα. ὁ τοιοῦτος κοινὸς Παράγων ὀνομάζεται Κοινὸν καὶ Μέγιστον Μέτρον, ἢ Κοινὸς Μέγιστος Διαιρέτης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α'.

§. 72. Νὰ εὑρίσκωμεν τὸ Κοινὸν Μέγιστον Μέτρον τοῦ Κλάσματος.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α'.) Διαιροῦμεν τὸν Παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ ἂν μετὰ τὴν Διαίρεσιν δὲν μείνῃ τι λείψανον,

αὐτὸς

αὐτὸς ὁ ἀριθμητὴς τότε ὑπάρχει τὸ Κοινόν Μέγιςον Μέτρον. π. χ. $\frac{7}{56}$. ἐπειδὴ διαιρεθέντων τῶν 56 διὰ τοῦ 7, δὲν ἐναπολείπεται τί, ἐςιν ἄρα ὁ 7 τὸ Κοινόν Μέτρον.

Κάν. β΄.) Ἂν δὲ μετὰ τὴν πρώτην Διαίρεσιν ἐναπολειφθῇ τι λείψανον εἶναι δῆλον, ὅτι δὲν εὑρέθη ἔτι τὸ Κοινὸν Μέτρον, ὅθεν χωροῦμεν αὖθις εἰς τὸ ἔργον, διαιροῦντες ἐπὶ πλέον, οὕτως ὅμως, ὥςε τὸν μὲν ὄντα πρότερον Διαιρέτην ποιοῦμεν Διαιρετέον, τὸ δὲ μετὰ τὴν Διαίρεσιν ἐναπολειπόμενον λαμβάνομεν ὡς Διαιρέτην, τοῦ Πηλίκου μηδένα λόγον ποιούμενοι, ἕως οὗ μετά τινα Διαίρεσιν δὲν ἐναπολείπηται οὐδὲν, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ κατὰ τὴν ἐσχάτην Διαίρεσιν Διαιρέτης γενόμενος, αὐτὸς εἶναι τὸ Κοινὸν καὶ Μέγιςον Μέτρον. ὅταν ὅμως μετά τινα Διαίρεσιν ἐναπολείπηται Μονάς, τότε εἶναι Σημεῖον, ὅτι ἐκεῖνο τὸ Κλάσμα δὲν ἔχει ἕτερον Κοινὸν Μέγιςον Μέτρον, ἀλλὰ τὴν Μονάδα, ἡ ὁποία δὲν διαιρεῖ, ὡς πρότερον εἴρηται. οἷον $\frac{53}{120}$ κ. τ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. α΄.

Ζητηθήτω τὸ Κοινὸν Μέγιςον Μέτρον τοῦ Κλάσματος $\frac{252}{315}$ ·

διαιροῦμεν τὰ 315 διὰ τῶν 252 κατὰ τοὺς ἤδη γνωςοὺς Κανόνας τῆς Διαιρέσεως,

$$\begin{array}{r|l} 315 & 252 \\ \cline{2-2} & 1 \\ 252 & \\ \hline 63 & \end{array}$$

ὥστε μετὰ τὴν πρώτην ταύτην Διαίρεσιν ἐναπολείπονται 63, τὰ ὁποῖα Διαιρέτην ποιοῦντες, διαιροῦμεν ἤδη τὰ 252 οὕτως .

$$\begin{array}{r|l} 252 & 63 \\ \cline{2-2} & 4 \\ 252 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

ἐπειδὴ τοίνυν ὁ 63 διαιρεῖ τὰ 252 ἀκριβῶς, τουτέστι χωρὶς νὰ μείνῃ τι μετὰ τὴν Διαίρεσιν λείψανον, γίνεται δῆλον, ὅτι οὗτος ὁ 63 ἀριθμὸς εἶναι τὸ Κοινὸν Μέγιστον Μέτρον τοῦ $\frac{252}{315}$ Κλάσματος· ἡ δὲ Δεῖξις εἶναι δήλη ἐξ αὐτῆς τῆς Πράξεως.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

Ἔστω εἰς εὕρεσιν τὸ Κοινὸν Μέγιστον Μέτρον τοῦ Κλάσματος $\frac{189}{513}$.

διαιρεθέντων τῶν 513 διὰ τῶν 189, προκύπτει Πηλίκον 2, καὶ μένει λείψανον 135, τὰ ὁποῖα Διαιρέτην ποιοῦντες, διαιροῦμεν δι' αὐτῶν τὰ 189 οὕτως . . . .

$$\begin{array}{r|l} 513 & 189 \\ \cline{2-2} & 2 \\ 378 & \\ \cline{1-1} 135 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 189 & 135 \\ \cline{2-2} & 1 \\ 135 & \\ \cline{1-1} 54 & \end{array}$$

ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ μετὰ τὴν δευτέραν ταύτην Διαίρεσιν ἐναπολείπονται 54 εἶναι δῆλον, ὅτι τὰ 135 δέν εἶναι τὸ Κοινόν Μέγιστον

Μέ-

Μέτρον, ὅθεν διὰ τῶν ἐναπολειφθέντων 54 διαιροῦμεν τὰ 135 οὕτως . . . . 135 | 54

2

108

——

27

ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ μετὰ τὴν τρίτην Διαίρεσιν ἐναπελείφθησαν 27, πρέπει νὰ γένῃ πάλιν Διαίρεσις, ὅθεν διαιροῦμεν τὰ 54 διὰ τῶν 27 οὕτως . . . . 54 | 27

2

54

——

0

ὁ 27 ἄρα ἀριθμὸς εἶναι τὸ Κοινὸν καὶ Μέγιστον Μέτρον τοῦ Κλάσματος $\frac{189}{513}$. ὅστις δύναται νὰ διέλῃ καὶ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ τὸν Παρονομαστὴν ἐπ' ἀκριβές. κ. τ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 73. Νὰ ἀγάγωμεν τὸ δοθὲν Κλάσμα εἰς ἐλαχίστους Ὅρους χωρὶς νὰ λυμανθῇ ἡ Δύναμις αὐτοῦ, λέγω, νὰ εὕρωμεν ἕτερον Κλάσμα ἴσον τῷ δοθέντι, καὶ ἐν Μικροτάτοις ἀριθμοῖς ἐμφαινόμενον.

ΠΡΑΚ-

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α΄.) Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ Κοινὸν Μέγιστον Μέτρον κατὰ τοὺς προτεθέντας Κανόνας.

Καν. β΄,) Διαιροῦμεν ἔπειτα δι᾽ αὐτοῦ τοῦ Κοινοῦ Μέτρου καὶ τοὺς δύω Ὅρους τοῦ δοθέντος Κλάσματος, λέγω τόντε ἀριθμητὴν καὶ Παρονομαστήν, καὶ τότε τὰ ἐκ τῆς Διαιρέσεως ταύτης προκύψαντα Πηλίκα εἶναι αὐτὸ τὸ Κλάσμα ἐν ἐλαχίστοις Ὅροις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Τὸ μὲν $\frac{252}{315}$ διὰ τῆς Διαιρέσεως τοῦ Κοινοῦ Μέτρου 63 ἀνάγεται εἰς $\frac{4}{5}$. τὸ δὲ $\frac{189}{513}$ διὰ τῆς Διαιρ. τοῦ Κοινοῦ Μέτρου 27 ἀνάγεται εἰς τὸ $\frac{7}{19}$. τὸ δὲ $\frac{255}{663}$ εἶναι Ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{5}{13}$. τὸ δὲ $\frac{6}{264}$ μὲ τὸ $\frac{1}{44}$. τὸ δὲ $\frac{481}{629}$ ἀνάγεται εἰς τὸ $\frac{13}{17}$. τὸ δὲ $\frac{171}{399}$ εἰς τὸ $\frac{3}{4}$. τὸ δὲ $\frac{83}{415}$ εἶναι Ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{1}{5}$. τὸ δὲ $\frac{60}{90}$ μὲ τὸ $\frac{6}{9}$ καὶ $\frac{2}{3}$, τὸ δὲ $\frac{100}{150}$ ἀνάγεται εἰς τὸ $\frac{10}{15}$ καὶ εἰς τὸ $\frac{2}{3}$. τὸ δὲ $\frac{125}{450}$ εἰς τὸ $\frac{25}{90}$ ἢ εἰς τὸ $\frac{5}{18}$ ἐκ δὲ τοῦ $\frac{192}{256}$ γίνονται κατὰ τὸ ἥμισυ τὰ ἑξῆς,

$\frac{96}{128}$, $\frac{48}{64}$, $\frac{24}{32}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{3}{4}$. διότι ἐπειδὴ ἕκαστον τούτων τῶν Κλασμάτων ἔχει ἐν τῷ τέλει ἄρτιον ἀριθμὸν, δύναται νὰ γίνηται ἡ Διαίρεσις πάντοτε διὰ τοῦ 2 συνεχῶς. ἀρτίους δὲ ἀριθμοὺς ὀνομάζομεν ἐκείνους, οἵ τινες δύνανται νὰ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 2, οἷον 2, 4, 6, 8, κ. τ. Περιττοὶ δὲ ἀριθμοί εἰσι τοὐναντίον, οἷον, 3, 5, 7, κ. τ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὅταν διαιρῆται καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, τότε ἡ Δύναμις τοῦ Κλάσματος δὲν λυμαίνεται κατὰ τὸ προτεθὲν (§. 70.) Θεώρημα, ἐνταῦθα δὲ διαιρεῖται καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς διὰ τοῦ κοινοῦ Μέτρου, καθὼς διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος. ἡ Δύναμις ἄρα τοῦ Κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὸ Κοινὸν Μέτρον εἶναι τὸ Μέγιστον, καὶ ὡς τοιοῦτον παρέχει τὰ μικρότατα Πηλίκα, ἄρα κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἄγεται τὸ Κλάσμα εἰς ἐλαχίστους Ὅρους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ'.

§. 74. Νὰ μεταποιήσωμεν, ἢ νὰ ἀγάγωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς Κλάσμα.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Γράφομεν ὑποκάτω τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ μίαν Μονάδα ὡς Παρονομαστήν, π. χ. ἐκ τοῦ 8 γίνεται $\frac{8}{1}$, ἐκ δὲ τοῦ 32 ποιοῦμεν $\frac{32}{1}$.

Δ Ε Ι' Ξ Ι Σ.

Ἕκαστος ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῇ διὰ τῆς Μονάδος, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ποσῶς ἡ Δύναμις αὐτῦ, ὅθεν δύναταί τις νὰ γράψῃ ὑποκάτω τινὸς ἀκεραίυ τὴν Μονάδα ὡς Διαιρέτην, ἀλλὰ μὴν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐμφαίνεται ἀριθμὸς κεκλασμένος, ἄρα ἕκαστος ἀριθμὸς δύναται ὕτω νὰ μεταποιηθῇ εἰς Κλάσμα.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ς'.

§. 75. Νὰ μεταποιήσωμέν τινα ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς Κλάσμα, δοθέντος τῦ Παρονοματῦ.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἡ ΛΥ'ΣΙΣ.

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ ὅλον μετὰ τῦ δοθέντος Παρονομαςῦ, τὸ δὲ ἐκ τύτων Γινόμενον ποιῦμεν ἀριθμητὴν, καὶ γράφομεν ἔπειτα ὑποκάτω αὐτῦ τὸν δοθέντα Παρονομαςήν. π. χ. μεταποιεῖται ὁ 8 ἀριθμὸς εἰς Κλάσμα, ἐπὶ τῦ ὁποίυ δίδοται ὁ Παρονομαςὴς 6, ἂν πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ὁ 8 διὰ τῦ 6, καὶ ἔπειτα γραφθῇ ὁ 6 ὑποκάτω τῦ Γινομένυ, οἷον $\frac{48}{6}$.

Δ Ε Ι' Ξ Ι Σ.

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαςὴς πολλαπλασιάζωνται καὶ διαιρῶνται διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, ἡ Δύναμις

ναμις τότε δὲν λαμβάνει τινὰ μεταβολὴν, ἀλλὰ μὴν ἐνταῦθα τὸ δοθὲν ἀκέραιον ἐπολλαπλασιάσθη καὶ διῃρέθη διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ Δύναμις ἄρα δὲν μεταβέβληται, καὶ ἑπομένως τὸ ἀκέραιον κατὰ τὸν ἀνωτέρω Κανόνα μετεποιήθη ὀρθῶς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 76. Γίνεται τοῦτο καταδηλον, ἂν διὰ τοῦ αὐτοῦ Παρονομαστοῦ διαιρεθῇ πάλιν ὁ ἀριθμητὸς, ἐπειδὴ μετὰ τὴν Διαίρεσιν θέλει προκύψει ὁ πρότερον ἀκέραιος ἀριθμός. διότι ἡ Διαίρεσις πρέπει νὰ διαλύῃ ἐκεῖνο, ὅπου διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως συνθέτεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ε΄.

§. 77. Νὰ ἀγάγωμεν Κλάσματα διαφόρους Παρονομαστὰς ἔχοντα ἐπὶ τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστάς.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α΄.) Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν ἑκάστου Κλάσματος διὰ πάντων τῶν Παρονομαστῶν ἐκτὸς τοῦ ἰδίου μόνον, τουτέστι πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου Κλάσματος διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ δευτέρου, καὶ πάλιν τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ τρίτου Κλάσματος, καὶ αὖθις τὸ ἐκ τούτων Παραγόμενον πολλαπλασιάζομεν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ τετάρτου Κλάσματος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. ἔπειτα ἀρχόμεθα πάλιν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου Κλάσματος διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου Κλάσματος,