ΤΥΠΟΣ ιγ'.

Πρὸς εὕρεσιν αὖθις τῆς πλήθους τῶν Ὅρων μεταχειριζόμεθα.

$$\sqrt{\left(\frac{2\kappa}{\delta}+\frac{\alpha^2}{\delta^2}-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{1}{4}\right)}-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{1}{2}=\pi.$$

ὅπερ δι' ἀριθμῶν $\sqrt{\left(\frac{420}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}$ $-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=12.$

ΤΥΠΟΣ ιδ'.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ πρώτου Ὅρου μεταχειριζόμεθα

$\frac{2\kappa}{2\pi}-\frac{\pi\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\alpha$. καὶ δι' ἀριθ. $\frac{420}{24}-\frac{36}{2}$ $+\frac{3}{2}=1.$

ΤΥΠΟΣ ιε'.

Εἰς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς μεταχειριζόμεθα

$$\frac{2\kappa-2\alpha\pi}{\pi^2-\pi}=\delta, \text{ τουτέστι } \frac{420-24}{144-12}=3.$$

ΤΥΠΟΣ ιϛ'.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου μεταχειριζόμεθα

$$\frac{\pi^2\delta-\pi\delta+2\pi\alpha}{2}=\kappa.\ \frac{432-36+24}{2}=210.$$

ΤΥΠΟΣ ιζ'.

Εἰς εὕρεσιν αὖθις τῦ κεφαλαίυ μεταχειριζόμεθα $\frac{\omega^2 - \alpha^2 + \alpha\delta + \omega\delta}{2\delta} = \varkappa$, τυτέστι $\frac{1156 - 1 + 3 + 102}{6}$ $= 210$.

ΤΥΠΟΣ ιή.

Εἰς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς μεταχειριζόμεθα

$$\frac{\omega^2 - \alpha^2}{2\varkappa - \alpha - \omega} = \delta \text{ τυτέστι } \frac{1156 - 1}{420 - 1 - 34} = 3$$

ΤΥΠΟΣ ιθ'.

Εἰς εὕρεσιν τῦ πρώτυ Ὅρυ μεταχειριζόμεθα

$$\sqrt{\left(\omega^2 + \omega\delta - 2\varkappa\delta + \frac{1}{4}\delta^2\right)} + \frac{1}{2}\delta = \alpha \text{. καὶ}$$

δι᾽ ἀριθμῶν γίνεται $\sqrt{\left(1156 + 102 - 1260 + \frac{9}{4}\right)}$ $+ \frac{3}{2} = 1$.

ΤΥΠΟΣ κ'.

Εἰς εὕρεσιν τῦ ἐσχάτυ Ὅρυ μεταχειριζόμεθα

$$\sqrt{\left(\alpha^2 - \alpha\delta + \frac{1}{4}\delta^2 + 2\varkappa\delta\right)} - \frac{1}{2}\delta = \omega \text{. καὶ}$$

δι᾽ ἀριθμῶν $\sqrt{\left(1260 + 1 - 3 + \frac{9}{4}\right)} - \frac{3}{2} = 34$.

ΣΧΟ-

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 107. Ὅταν τοίνυν ἐξ αὐτῶν τῶν πέντε (δηλαδὴ τῶν α, ω, δ, π, κ) δίδωνται τὰ τρία, καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον· μεταχειριζόμεθα ἕνα τούτων τῶν ἀνωτέρω εἴκοσι τύπων· ἀλλ' ἐπειδὴ ἕκαστον τούτων τῶν πέντε, ὅταν τυγχάνῃ ζητούμενον, δύναται νὰ ἔχῃ τὰ διδόμενα ποικίλως καὶ πολλαχῶς, καὶ ἐπειδὴ ἐξ αὐτῆς τῆς ποικιλότητος τῶν διδομένων προκύπτουσι δι' ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ζητούμενον τέσσαρες διαφορετικοὶ τύποι, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ γνωρίζωμεν τὰ διδόμενα, καὶ κατ' αὐτὰ τὰ διδόμενα νὰ μεταχειριζώμεθα διὰ κάθε ζητούμενον τὸν ἀνήκοντα τύπον. π. χ. Ὅταν δοθῇ τὸ ω, δ, π, καὶ ζητεῖται τὸ α, πρέπει νὰ ζητήσωμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον κατὰ τοῦτον τὸν Τύπον $\omega - \pi\delta + \delta = \alpha$. Ὅταν ὅμως δοθοῦσι τὸ κ, π, ω, καὶ ζητεῖται ὡσαύτως τὸ α, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον, τάττοντες εἰς Ἐξίσωσιν τὰ διδόμενα κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἕκτον Τύπον $\frac{2\kappa}{\pi} - \omega = \alpha$. ἐπειδὴ μ' ὅλον ὁποῦ καὶ εἰς τὰς δύω ταύτας περιστάσεις τὸ ζητούμενον εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ, εἶσὶν ὅμως διάφορα τὰ διδόμενα, καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον εὑρίσκεται κατὰ διάφορον Τύπον. ὅθεν πρὸς πλείονα διάγνωσιν καὶ εὐκολίαν ἐκθέτομεν κατωτέρω πάντας τούτους τοὺς εἴκοσι Τύπους τακτικώτερον, ὁ δὲ ταύτην τὴν Μέθοδον μετερχόμενος, ἔχων αὐτοὺς ὡς ἕνα Πίνακα, δύναται νὰ τοὺς μεταχειρίζηται κατὰ τὰς προσηκούσας περιστάσεις.

	Διδόμενα.	Ζητούμενον.	
			Εἰς εὕρεσιν τοῦ πρώτου Ὅρου.
ΤΥΠΟΣ α'.	ω, δ, π.		$\omega - \pi\delta + \delta = \alpha.$
. . . . ς'.	κ, π, ω.		$\frac{2\kappa}{\pi} - \omega = \alpha.$
ι . . . ιδ'.	κ, δ, π.	α	$\frac{2\kappa}{2\pi} - \frac{\pi\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \alpha.$
ι . . ιθ'.	ω, δ, κ.		$\sqrt{\left(\omega^2 + \omega\delta - 2\kappa\delta + \frac{1}{4}\delta^2\right)} + \frac{1}{2}\delta = \alpha.$
			Εἰς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου Ὅρου.
. . . . β'.	α, δ, π.		$\alpha + \delta\pi - \delta = \omega.$
. . . ζ'.	α, κ, π.		$\frac{2\kappa}{\pi} - \alpha = \omega.$
. . . θ'.	δ, κ, π.	ω	$\frac{2\kappa + \delta\pi^2 - \delta\pi}{2\pi} = \omega.$
. . . κ'.	α, δ, κ.		$\sqrt{\left(\alpha^2 - \alpha\delta + 2\delta\kappa + \frac{1}{4}\delta^2\right)} - \frac{1}{2}\delta = \omega.$
			Εἰς εὕρεσιν τῆς Διαφορᾶς.
. . . γ'.	α, ω, π.		$\frac{\omega - \alpha}{\pi - 1} = \delta.$
. . . ι'.	ω, π, κ.	δ	$\frac{2\omega\pi - 2\kappa}{\pi^2 - \pi} = \delta.$
. . . ιε'.	κ, α, π.		$\frac{2\kappa - 2\alpha\pi}{\pi^2 - \pi} = \delta.$
. . . ιη'.	ω, α, κ.		$\frac{\omega^2 - \alpha^2}{2\kappa - \alpha - \omega} = \delta.$

	Δεδόμενα.	Ζητούμενον.	Εἰς εὕρεσιν τῆς πληθύος τῶν Ὅρων.
ΤΥΠΟΣ δ'.	ω,α,δ.		$\frac{\omega-\alpha+\delta}{\delta}=\pi$
. . . η'.	κ,α,ω.	π	$\frac{2\kappa}{\alpha+\omega}=\pi$
. . . ιγ'.	κ,α,δ.		$\sqrt{\left(\frac{2\kappa}{\delta}+\frac{\alpha^2}{\delta^2}-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{1}{4}\right)}-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{1}{2}=\pi$
. . . ιβ'.	ω,κ,δ.		$\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\delta^2}+\frac{\omega}{\delta}-\frac{2\kappa}{\delta}+\frac{1}{4}\right)}+\frac{\omega}{\delta}+\frac{1}{2}=\pi$.
			Εἰς εὕρεσιν τοῦ Κεφαλαίου.
. . . θ'.	α,π,ω.		$\frac{\alpha\pi+\omega\pi}{2}=\kappa$
. . . ια'.	ω,π,δ.	κ	$\frac{2\omega\pi-\delta\pi^2+\delta\pi}{2}=\kappa$
. . . ις'.	π,δ,α.		$\frac{\pi^2\delta-\delta\pi+2\pi\alpha}{2}=\kappa$
. . . ιζ'.	ω,α,δ.		$\frac{\omega^2-\alpha^2+\alpha\delta+\omega\delta}{2\delta}=\kappa$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 208. Ὁποίαν ὠφέλειαν προξενοῦσιν οὗτοι οἱ τεθέντες Τύποι, εἰς χρῆσιν γενόμενοι, δηλωθήσεται ἐν τοῖς ἑξῆς Προβλήμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ά.

§. 209. Ὁ Πέτρος, δὸς εἰπεῖν, πωλεῖ τὴν Βιβλιοθήκην του, ἥτις συνίσταται ἐκ 1400 Βιβλίων, καὶ διὰ μὲν τὸ πρῶτον Βιβλίον ζητεῖ δύο Ὀβολοὺς, διὰ δὲ τὸ δεύτερον ζητεῖ περισσότερον τρεῖς Ὀβολοὺς, καὶ διὰ τὸ τρίτον αὖθις ζητεῖ τρεῖς Ὀβολοὺς πλέον τῆς τιμῆς τοῦ δευτέρου Βιβλίου, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ζητεῖται λοιπὸν πρῶτον, ὁποία ἔσται ἡ τιμὴ τοῦ ἐσχάτου Βιβλίου, δεύτερον, πόση ἔσται ἡ τιμὴ ὁμοῦ ὅλων τῶν Βιβλίων.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

$\pi = 1400$	ἡ πληθὺς τῶν Βιβλίων.
$\delta = 3$	ἡ διαφορά.
$\alpha = 2$	ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου Βιβλίου.

ω ζητεῖται, ἡ τιμὴ τοῦ ἐσχάτου Βιβλίου.

κ ζητεῖται, ἅπασα ἡ τιμὴ τῶν Βιβλίων.

ὅθεν ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ πληθὺς, ἡ διαφορὰ, ὁ πρῶτος Ὅρος, καὶ ζητεῖται πρῶτον ἡ τιμὴ τοῦ ἐσχάτου βιβλίου,

διά-εὑρίσκεται κατὰ τὸν δεύτερον Τύπον, οἷον $\omega = \alpha + \delta\pi - \delta$ τουτέστι $\omega = 2 + 1400 \times 3 - 3$, ἤτοι $2 + 4200 - 3 = 4199$ Ὀβολ., οἱ ὁποῖοι εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἐσχάτου Βιβλίου. Ἐπειδὴ δὲ ζητεῖται τὸ Κεφάλαιον τῆς τιμῆς ὅλων τῶν Βιβλίων, ἐν ᾧ εἶναι δεδομένος ὁ πρῶτος Ὅρος, ἡ πληθὺς, καὶ ἡ διαφορά, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον μεταχειριζόμενοι τὸν πέμπτον Τύπον $\kappa = \frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$

τουτέστι $\kappa = \frac{2 \times 1400 + 4199 \times 1400}{2}$, δηλαδὴ $\frac{2800 + 5878600}{2} = \frac{5881400}{2} = 2940700$ ὀβολοῖς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 210. Στρατηγός τις ὑπισχνεῖται εἰς δώδεκα Στρατιώτας, ἀφ' οὗ ἀναβῶσιν ἓν ὕψωμα γῆς, νὰ δώσῃ αὐτοῖς δῶρον μίαν Ποσότητα χρημάτων κατὰ τὴν ἑξῆς συμφωνίαν. Εἰς μὲν τὸν ἀναβάντα πρότερον τῶν ἄλλων ὑπόσχεται νὰ δώσῃ 49 ἀργύρια, εἰς δὲ τὸν δεύτερον νὰ δώσῃ ὀλιγώτερον τῶν τοῦ πρώτου ἀργύρια 4, καὶ οὕτως εἰς καθένα τῶν ἑπομένων νὰ δώσῃ 4 ἀργ. ὀλιγώτερον τοῦ προηγουμένου. Ζητεῖται λοιπὸν πρῶτον πόσα ἀργύρια λήψεται ὁ ἔσχατος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει καὶ ὁ ἐλάττων ἀριθμὸς τῶν ἀργυρ. δεύτερον δὲ πόσα ἀργύρια λήψονται ὅλοι ὁμοῦ οἱ Στρατιῶται.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

$\pi = 12$
$\omega = 49$
$\delta = 4$

α ϗ κ ζητοῦνται, ὅθεν κατὰ μὲν τὸν πρῶτον Τύπον $\alpha = \omega - \delta\pi + \delta$

$$\alpha = 49 - 48 + 4 = 5$$

κατὰ δὲ τὸν ἑνδέκατον τύπον $\kappa = \frac{2\omega\pi - \delta\pi^2 + \delta\pi}{2}$

τουτέστι $\kappa = \frac{1176 - 576 + 48}{2} = \frac{648}{2} = 324.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ΄.

§. 211. Ἄνθρωπός τις θέλει νὰ μοιράσῃ εἰς 12 πτωχοὺς 222 ὀβολοὺς κατ' αὔξουσαν Πρόοδον. ὅθεν ἄρχεται, μοιράζων εἰς μὲν τὸν πρῶτον ὀβολοὺς 2, εἰς δὲ τὸν δεύτερον πλείονας, παρὰ εἰς τὸν πρῶτον, ϗ οὕτω καθεξῆς. Ζητεῖται λοιπὸν, πόσους ὀβολοὺς ἔδωκεν εἰς τὸν ἔσχατον, ϗ ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ποσοτήτων, ὅπου ἕκαστος τῶν πτωχῶν ἔλαβεν.

$\kappa = 222$, $\pi = 12$, $\alpha = 2$ ϗ ζητεῖται εἰς εὕρεσιν ω ϗ δ. ὅθεν κατὰ τὸν ἕβδομον τύπον

$$\omega = \frac{2\kappa}{\pi} - \alpha, \text{ τουτέστι } \omega = \frac{444}{12} - 2 = 35.$$

κατὰ

κατὰ τὸν δέκατον πέμπτον Τύπον

$$\delta = \frac{2\kappa - 2\alpha\pi}{\pi^2 - \pi} \text{ τουτέστι } \delta = \frac{444 - 48}{144 - 12} = \frac{396}{132} = 3.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ δ'.

§. 212. Μισθωσάμενός τις ἐργάτην τινὰ, συνεφώνησε νὰ δίδῃ αὐτῷ καθ' ἑκάστην μισθὸν μετά τινος διαφορᾶς· ὅθεν ἔδωκεν αὐτῷ, φέρ' εἰπεῖν, τὴν πρώτην ἡμέραν μισθὸν τρεῖς ὀβολοὺς, τὴν δὲ δευτέραν πλέονας 5, καὶ οὕτω τὴν τελευταίαν ἡμέραν ἔδωκεν αὐτῷ μισθὸν 38 ὀβολούς. ζητεῖται τοίνυν νὰ εὑρεθῇ πρῶτον, πόσας ἡμέρας οὗτος ἐδούλευσε, δεύτερον πόσους ὀβολοὺς ἔλαβεν εἰς ὅλον τὸν καιρὸν, καθ' ὃν οὗτος εἰργάσατο·

$\alpha = 3$
$\delta = 5$
$\omega = 38$

π καὶ κ ζητεῖται, ὅθεν κατὰ τὸν πέμπτον τύπον

$$\pi = \frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta} \text{ τουτέστι } \pi = \frac{38 - 3 + 5}{5} = 8$$

κατὰ τὸν δέκατον ἕβδομον Τύπ.

$$\kappa = \frac{\omega^2 - \alpha^2 + \alpha\delta + \omega\delta}{2\delta} \text{ τουτέστι } \kappa = \frac{1444 - 9 + 25 + 190}{10}$$

$= 164.$

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 213. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ λύωμεν ἄπειρα τοιαῦτα Προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς αὐτὰς τὰς Προόδυς, π. χ.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ί.

§. 214. Δοθέντος τῦ πρώτυ ϗ ἐσχάτυ Ὅρυ, νὰ εὕρωμεν τὺς ὁποιυσδήποτε μέσυς ἀναλόγυς Ὅρυς, ϗ μεταξὺ τύτων τῶν δύω δοθέντων νὰ κατατάξωμεν αὐτὺς, ὁπόσοι ἂν ὦσι τὸν ἀριθμόν.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Ἡ Διαφορὰ τῦ πρώτυ ϗ ἐσχάτυ Ὅρυ διαιρεῖται διὰ τῦ ἀριθμῦ πάντων τῶν Ὅρων μονάδι (— 1) ἐλαττωθέντος, ϗ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον ἐστὶν ἡ κοινὴ τῶν Ὅρων διαφορὰ, ἥτις προστεθεῖσα εἰς τὸν ἡγύμενον Ὅρον, παρέχει τὸν ἑπόμενον Ὅρον, π. χ. Μεταξὺ τῦ 7 ϗ 13 πρέπει νὰ εὑρεθῶσιν 4 Ὅροι. οἱ Ὅροι ἄρα τῆς Προόδυ ἔσονται ἅπαντες 6, ϗ κατὰ τὸν τρίτον τύπον ποριζόμεθα τὰ ἑξῆς.

$$\delta = \frac{\omega - \alpha}{\pi - 1} = \frac{13 - 7}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$. ἡ Πρόοδος λοιπὸν ἐστιν αὕτη

$$7 : 8\frac{1}{5} : 9\frac{2}{5} : 10\frac{3}{5} : 11\frac{4}{5} : 13.$$

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

ΔΕΙ῀ΞΙΣ.

Εὑρεθείσης τῆς διαφορᾶς τῆς Προόδȣ, προσδιορίζεται πᾶσα κὶ ἡ Πρόοδος, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι διδόμενα ὁ πρῶτος κὶ ὁ ἔσχατος Ὅρος. ἀλλὰ μὴν ἡ διαφορὰ ἀποκτᾶται κατὰ τȣ῀τον τὸν Τύπον $\delta = \frac{\omega - \alpha}{\pi - 1}$, τȣπέστιν ἡ Διαφορὰ τȣ῀ πρώτȣ κὶ ἐσχάτȣ Ὅρȣ διαιρεθεῖσα διὰ τῆς πληθύος τῶν Ὅρων — 1, παρέχει τὴν κοινὴν Διαφορὰν, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λύσιν προσδιορίζονται οἱ ζητȣ́μενοι Ὅροι.

ΚΕΦΑΛΑΙΩ͂ΔΕΣ ΘΕΩ͂ΡΗΜΑ.

§. 215. Πᾶσα Γεωμετρικὴ αὔξȣσα Πρόοδος δύναται νά ἀναχθῆ εἰς τὸν ἑξῆς Τύπον.

$$a : a\Pi : a\Pi^2 : a\Pi^3 : a\Pi^4 : a\Pi^5 : a\Pi^6 : a\Pi^7 .\ \kappa.\tau.$$

ΔΕΙ῀ΞΙΣ.

Πρόοδος Γεωμετρικὴ εἶναι μία πληθὺς ἀριθμῶν, (ἢ Ποσοτήτων) ἐν τάξει λαμβανομένων, κὶ χωρȣ́ντων κατά τινα Ἴσον Γεωμετρικὸν λόγον, κὶ διαφερόντων ἀλλήλων κατὰ τὸ αὐτὸ Πηλίκον. ἔνθα κάθε ἑπόμενος Ὅρος εἶναι Ἴσος τῷ ἡγȣμένῳ πολλαπλασιασθέντι διά τȣ῀ Πηλίκȣ Π (κἀνταῦθα τὸ Π ὡς Πηλίκον τῆς Προόδȣ λαμβάνομεν). ὅθεν κάθε ἑπόμενος Ὅρος ἀναφύεται ἐκ τῆς πολλαπλασιάσεως τȣ῀ ἡγȣμένȣ μετὰ τȣ῀ Πηλίκȣ. κὶ διὰ νὰ γένη σαφέστερον τὸ λεγόμενον, ἔστω ὁ μὲν πρῶτος Ὅρος τῆς

Προόδȣ

Προόδου α, τὸ δὲ Πηλίκον Π. ὁ ἑπόμενος Ὅρος ἤδη ἔσται $\alpha\Pi$, καὶ πάλιν τούτῳ ἑπόμενος Ὅρος ἔσται $\alpha\Pi^2$; καὶ τούτῳ αὖθις λαμβανομένῳ ὡς ἡγουμένῳ, ἑπόμενος Ὅρος ἔσται $\alpha\Pi^3$, καὶ οὕτω χωρεῖ ἐπ' ἄπειρον τὸ λεγόμενον. ἑκάστη ἄρα αὔξουσα Γεωμετρικὴ Πρόοδος εἰκότως δύναται νὰ ἐκτεθῇ κατὰ τὸν προτεθέντα Τύπον.

ΠΟΡΙΣΜΑ α'.

§. 216. Ταύτην τὴν εἰρημένην Σειρὰν θεωροῦντες πάλιν δευτέρως, εὑρίσκομεν, ὅτι ἕκαστος τῶν ἑπομένων Ὅρων συνίσταται ἐκ τοῦ πρώτου Ὅρου α πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ Πηλίκον Π ὑψωμένον ὂν εἰς ἐκείνην τὴν Δύναμιν, ἥτις ἐμφαίνει τὴν πληθὺν τῶν προηγουμένων Ὅρων. ὁ δὲ τούτου λόγος εἶναι, ὅτι εἰς μίαν Πρόοδον ἅπαντες οἱ Ὅροι ἐκτὸς τοῦ πρώτου εἶναι πεπολλαπλασιασμένοι μετὰ τοῦ κοινοῦ Πηλίκου, καὶ ἡ πολλαπλασίασις διὰ τοῦ Πηλίκου γίνεται τοσάκις, ὅσοι εἶναι οἱ Ὅροι πλὴν τοῦ πρώτου. οἷον τῆς προτεθείσης Προόδου ὁ ἕκτος Ὅρος εἶναι $\alpha\Pi^5$, ὅστις συνίσταται ἐκ τοῦ πρώτου Ὅρου πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ κοινὸν Πηλίκον ἀρθὲν εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν, ἥτις ἐστὶν ἴση μὲ τὴν πληθὺν τῶν πρὸ αὐτοῦ ἡγουμένων Ὅρων, ὥσπερ καὶ ὁ δωδέκατος Ὅρος εἶναι $\alpha\Pi^{11}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 217. Ἐὰν λάβωμεν τὰ μέχρι τοῦδε εἰρημένα εἰς μίαν Ἔκθεσιν, ὡσαύτως καὶ ἕνα ἀπροσδιόριστον ἀριθμὸν τῶν Ὅρων $= \nu$, ὁ ἔσχατος Ὅρος τῆς Προόδου ἔσται τότε $= \alpha\Pi^{\nu-1}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 218. Τὸ ἐκ τῶν δύο ἄκρων (τουτέστιν ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου) Γινόμενον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ παραλήγοντος.

τάτου Ὅρου παραγόμενον, ϗ γενικῶς, τὸ ἐκ τῶν δύω ἄκρων παραγόμενον πάντοτε εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ἐκ δύω ἑτέρων Ὅρων, οἵτινες ἀφίστανται ἐπίσης ἀπὸ τῶν δύω ἄκρων. ϗ τοῦτο δείκνυται σαφῶς ἐν τῇ προτεθείσῃ σειρᾷ. ἐπειδὴ τὸ μὲν ἐκ τοῦ πρώτου ϗ ὀγδόου Ὅρου παραγόμενον εἶναι $\alpha^2\Pi^7$. τὸ δὲ ἐκ τοῦ δευτέρου ϗ ἑβδόμου παραγόμενον ὁμοίως $\alpha^2\Pi^7$. τὸ δὲ ἐκ τρίτου ϗ ἕκτου Ὅρου πάλιν $\alpha^2\Pi^7$. τὸ δὲ ἐκ τοῦ τετάρτου ϗ πέμπτου ὡσαύτως $\alpha^2\Pi^7$. ὁ δὲ λόγος τούτου εἶναι, ὅτι κάθε Πρόοδος εἶναι μία πληθὺς Ὅρων ἀναλόγων, ϗ εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ ἐκ τῶν ἄκρων παραγόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν μέσων παραγόμενον, ὅθεν ἕπεται κατ' ἀνάγκην τὸ παραγόμενον τὸ ἐκ τῶν δύω ἄκρων νὰ εἶναι πάντοτε ἴσον τῷ παραγομένῳ. κ. τ. οἷον ἐν τῇ Προόδῳ ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64. τὰ παραγόμενα τὰ ἐκ τῶν ἐπίσης ἀφισταμένων Ὅρων εἰσὶν 64 X 2 = 128. 32 X 4 = 128. ϗ 8 X 16 = 128. εἰ δὲ ϗ ὁ ἀριθμὸς τῶν Ὅρων τύχῃ νὰ εἶναι περιττὸς, τότε ὁ μεσαίτατος, ϗ μόνος ἐγκαταλειπόμενος Ὅρος πολλαπλασιάζεται ἐφ' ἑαυτὸν, ϗ ἑπομένως τὸ τετράγωνον τούτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ παραγόμενον τῶν Ὅρων τῶν ἐπίσης ἀπεχόντων.

ΠΌΡΙΣΜΑ γ'.

§. 218. Ἐκ ταύτης τῆς γενικῆς Ἐκθέσεως ἕπεται, ὅτι ὁ πρῶτος Ὅρος ἔχει πρὸς τὸν τρίτον τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου. οἷον ὁ πρῶτος Ὅρος α ἔχει πρὸς τὸν τρίτον $\alpha\Pi^2$, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου α^2 πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου $\alpha^2\Pi^2$. ἐπειδὴ ϗ εἰς τοὺς δύω τούτους λόγους εἶναι τὸ Πηλίκον Π^2. ϗ εἶναι ἄρα ἐνταῦθα μία ἀληθὴς ἀναλογία, ὅτι ὁ πρῶτος Ὅρος ἔχει πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς ὁ κύβος τοῦ πρώτου Ὅρου πρὸς τὸν κύβον τοῦ δευτέρου. ἐπειδὴ $\alpha : \alpha\Pi^3$ ∺ $\alpha^3 : \alpha^3\Pi^3$. κ. τ.

ΠΌΡΙΣΜΑ δ'.

§. 219. Ἂν εἰς αὐτὴν τὴν γενικὴν Ἔκθεσιν ὁ πρῶτος Ὅρος α εἶναι = 1, τότε ἡ Πρόοδος $\alpha : \alpha\Pi^1 : \alpha\Pi^2 : \alpha\Pi^3$ μετατρέπεται

εἰς

εἰς τὸν $1 : 1\Pi^1 : 1\Pi^2 : 1\Pi^3$. δηλαδὴ $1 : \Pi^1 : \Pi^2 : \Pi^3$. κ. τ. καὶ ἐπειδὴ κάθε Ποσότης, ἢ Ὅρος, τοῦ ὁποίου ὁ δυναμοδείκτης εἶναι $= 0$, εἶναι καθ' ἑαυτὸν $= 1$ (§. 48), δυνάμεθα διὰ τοῦτο ἀντὶ τῆς μονάδος νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸ Π^0, καὶ νὰ βάλωμεν αὐτὸ εἰς τὸν τόπον αὐτῆς, κἀντεῦθεν ἅπασα ἡ Πρόοδος δύναται νὰ ἐκτεθῇ οὕτω $\Pi^0 : \Pi^1 : \Pi^2 : \Pi^3$. κ. τ. ὅθεν γίνεται φανερὸν ὅτι αἱ μὲν δυνάμεις τῶν ποσῶν ἵστανται ἐν Γεωμετρικῇ Προόδῳ, οἱ δὲ δυναμοδείκται κατὰ Πρόοδον ἀριθμητικήν.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

§. 220. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων περὶ τῶν Προόδων καὶ Γεωμετρικῶν ἀναλογιῶν προκύπτουσι καὶ ἕτεροι Τύποι, οἵτινες συμβάλλουσιν εἰς λύσιν Γεωμετρικῶν Προβλημάτων, ἀναφορὰν ἐχόντων πρὸς τὰς Προόδους. διότι ἐπειδὴ κάθε Πρόοδος εἶναι πλῆθύς τις λόγων ἐπίσης καὶ κατὰ τάξιν προαγομένων, διὰ τοῦτο καὶ εἰς μίαν τοιαύτην Πρόοδον τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν ἡγουμένων Ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων, τὸν ὁποῖον ἔχει κάθε ἡγούμενος, ἢ πρῶτος Ὅρος πρὸς τὸν ἑπόμενον, ἢ δεύτερον Ὅρον (§. 172). ἀλλὰ μὴν εἰς μίαν Πρόοδον ἕκαστος Ὅρος πλὴν τοῦ ἐσχάτου εἶναι ἡγούμενος λόγου, καὶ ὁμοίως ἕκαστος Ὅρος πλὴν τοῦ πρώτου, εἶναι ἑπόμενος τοῦ αὐτοῦ λόγου, ἔστι δὲ καὶ τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν Ὅρων τῆς Προόδου $= \kappa$. ἄρα τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν Ἡγουμένων εἶναι αὐτὸ τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν Ὅρων πλὴν τοῦ ἐσχάτου, οἷον $= \kappa - \omega$. ὥσπερ δὴ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων εἶναι αὐτὸ τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν τῆς Προόδου Ὅρων πλὴν τοῦ πρώτου, οἷον $= \kappa - \alpha$. αὕτη τοίνυν ἡ ἀναλογία ἐκτίθεται οὕτω. $\kappa - \omega : \kappa - \alpha = \alpha : \alpha\Pi$. καὶ διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως τῶν ἄκρων καὶ μέσων Ὅρων γίνεται Ἐξίσωσις $\kappa\alpha\Pi - \omega\alpha\Pi = \kappa\alpha - \alpha\alpha$. τούτων δὲ διαιρεθέντων διὰ τοῦ α, παράγεται $\kappa\Pi - \omega\Pi = \kappa - \alpha$. ἐκ ταύτης τῆς Ἐξισώσεως δύναταί τις νὰ εὕρῃ κατὰ τοὺς τῆς Ἐξισώσεως κανόνας τὸ ποσὸν α, ὅσον καὶ ω, καὶ π, καὶ κ. καὶ διὰ νὰ γένῃ σαφὲς τὸ λεγόμενον δι' ἑνὸς παραδείγματος, ἔστω ἡ ἑξῆς Πρόοδος.

$$3 \,.\, 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187.$$

α'.) $\alpha = \omega\Pi - \kappa\Pi + \kappa$ τουτέστι $\alpha = 6561 - 9837 + 3279$ $= 3$ ὁ πρῶτος Ὅρος.

β'.) $\omega = \frac{\kappa\Pi - \kappa + \alpha}{\Pi}$ τουτέστι $\omega = \frac{9837 - 3279 + 3}{3}$ $= 2187$ ὁ ἔσχατος.

γ'.) $\Pi = \frac{\kappa - \alpha}{\kappa - \omega}$ τουτέστι $\Pi = \frac{3279 - 3}{3279 - 2187} = 3$ τὸ Πηλίκον.

δ'.) $\kappa = \frac{\omega\Pi - \alpha}{\Pi - 1}$ τουτέστι $\kappa = \frac{6561 - 3}{2} = 3279$ τὸ κεφάλαιον. Ὁ πρῶτος ϗ δεύτερος τύπος εὑρίσκεται διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν Ὅρων. ἐπὶ δὲ τοῦ τρίτου ϗ τετάρτου τύπου λύεται $\kappa\Pi - \omega\Pi$ εἰς τοὺς συνεργοὺς $(\kappa - \omega)\Pi$, ϗ $\kappa\Pi - \kappa$ εἰς συνεργοὺς $(\Pi - 1)\kappa$.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

§. 221. Κατὰ τὸ Σχόλιον (§. 217) εἶναι ἡ Ἔκθεσις τοῦ ἐσχάτου Ὅρου $= \alpha\Pi^{\nu-1}$ τουτέστιν $\omega = \alpha\Pi^{\nu-1}$. λοιπὸν δυνάμεθα εἰς τὸν τέταρτον τύπον ἀντὶ τοῦ ω νὰ βάλωμεν $\alpha\Pi^{\nu-1}$. ἀλλὰ μὴν τὸ ω εἶναι πεπολλαπλασιασμένον μετὰ τοῦ Π, πρέπει ἄρα ϗ τὸ $\alpha\Pi^{\nu-1}$ νὰ πολλαπλασιασθῇ μετὰ τοῦ Π. ἐν δὲ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν μεγεθῶν προστίθενται ϗ οἱ Ἐκθέται, ὅθεν γίνεται $\alpha\Pi^{\nu-1} \times \Pi$ $= \alpha\Pi^{\nu-1+1} = \alpha\Pi^{\nu}$, ϗ ἐκ τοῦ τετάρτου τύπου ἕπεται $\kappa = \frac{\alpha\Pi^{\nu} - \alpha}{\Pi - 1}$; ἐξ οὗ πορίζόμεθα διὰ τῆς μεταθέσεως τοὺς ἑξῆς δύω τύπους.

ε'.) $\kappa = \frac{\alpha\Pi^{\nu} - \alpha}{\Pi - 1}$ τουτέστι $\kappa = \frac{6561 - 3}{\Pi - 1} = 3279$

τὸ κεφάλαιον.

ϛ'.) $\alpha = \frac{\kappa\Pi - \kappa}{\Pi^{\nu} - 1}$ τουτέστι $\alpha = \frac{9887 - 3279}{2187 - 1} = 3$

ὁ πρῶτος Ὅρος. καὶ ἐκ τοῦ $\omega = \alpha\Pi^{\nu-1}$ πορίζομεθα διὰ τῆς μεταθέσεως καὶ ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης τὰ ἑξῆς.

ζ'.) $\omega = \alpha\Pi^{\nu-1} = 3 \times 729 = 2187$ ὁ ἔσχατος Ὅρος.

η'.) $\Pi = \sqrt[\nu-1]{\frac{\omega}{\alpha}} = \sqrt[6]{\frac{2187}{3}} = 3$ τὸ Πηλίκον.

καὶ ἐπειδὴ $\Pi^{\nu-1} = \frac{\Pi^{\nu}}{\Pi}$ ἐστὶν (§. 198), γίνεται διὰ τῆς μεταθέσεως ὁ ἑξῆς τύπος, διὰ τῆς χρήσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων μιᾶς Προόδου Γεωμετρικῆς.

θ'.) $\Pi^{\nu} = \frac{\omega\Pi}{\alpha}$.

Τουτέστι πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν ἔσχατον Ὅρον τῆς Προόδου μετὰ τοῦ ἐν αὐτῇ κοινοῦ Πηλίκου, καὶ τὸ ἐκ τούτων γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου Ὅρου τῆς ἰδίας Προόδου, καὶ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτει τι Πηλίκον. ἔπειτα λαμβάνομεν τὸ κοινὸν τῆς Προόδου Πηλίκον, καὶ προάγοντες ὑψόνομεν αὐτὸ συνεχῶς εἰς Δυνάμεις ἀλληλοδιαδόχους, ἕως οὗ νὰ φθάσῃ τοῦτο τὸ Πηλίκον νὰ ἐξισωθῇ κατὰ τὸ σημαινόμενον μὲ τὸ ἐκ τῆς ἀνωτέρω Διαιρέσεως προκύψαν Πηλίκον, καὶ τότε οὕτως αἱ ἀριθμηθεῖσαι δυνάμεις δεικνύουσι τὴν πληθὺν τῶν Ὅρων. ἐπειδὴ τοσοῦτοι ἔσονται οἱ Ὅροι τῆς Προόδου, ὅσαι δυνάμεις ἀπαιτηθήσονται διὰ νὰ ἐξισωθῇ τὸ κοινὸν τῆς Προόδου Πηλίκον μὲ τὸ ἐκ τῆς ῥηθείσης διαιρέσεως προκύψαν Πηλίκον. καὶ διὰ νὰ γίνωσι σαφέστερα τὰ λεγόμενα, ἔστω ἐν ἀριθμοῖς μιᾶς Βραχείας Προόδου διδόμενος ὁ πρῶτος Ὅρος 3, ὁ ἔσχατος 48, καὶ τὸ κοινὸν Πηλίκον 2, καὶ ζητηθήτω ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων. ὅθεν ἂν οὖν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἔσχατος Ὅρος 48 μετὰ τοῦ κοινοῦ Πηλίκου 2, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γενόμενον 96 διαιρεθῇ διὰ τοῦ πρώτου Ὅρου 3, προκύπτει ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον ὁ ἀριθμὸς 32, ἔπειτα ὑψώνομεν συνεχῶς τὸ κοινὸν Πηλίκον 2 εἰς δευτέραν, τρίτην, τετάρτην, καὶ πέμπτην Δύναμιν, οἷον 2^5 (ὅπερ ἐστὶ = 32), ἕως οὗ βλέπομεν, ὅτι τοῦτο τὸ Πηλίκον ὑψωθὲν εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν, σημαίνει ἕνα ἀριθμόν, ὅστις εἶναι Ἴσος μὲ τὸ ἀνωτέρω ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαν Πηλίκον 32, ὅθεν καὶ ἡ ζητουμένη πληθὺς τῶν Ὅρων πρέπει νὰ εἶναι = 5, καθὼς καὶ ἐκ τοῦ Ἰδίου προτεθέντος Παραδείγματος γίνεται κατάδηλον. οἷον 3 : 6 : 12 : 24 : 48.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛʹ.

§. 222. Ὁ Πέτρος βάζει εἰς τὸ δημόσιον Λαχεῖον (*) τὴν πρώτην φορὰν 1 Γρόσ., τὴν δευτέραν 2 Γρόσ., τὴν τρίτην φορὰν 4 Γρόσ., καὶ οὕτω ....., ζητεῖται λοιπόν, πόσα Γρόσια ἔβαλεν οὗτος τὴν δωδεκάτην φοράν, ἔπειτα πόση ἔσται ὅλη ἡ Ποσότης τῶν Γροσίων, ὁποῦ ἔβαλε.

οἱ τρεῖς ἐγνωσμένοι Ὅροι εἰσὶν $\alpha = 1$, $\Pi = 2$, $\pi = 12$. ω καὶ κ ζητεῖται. κατὰ τὸν ἕβδομον τύπον εἶναι

$\omega = \alpha\pi^{\nu-1}$. ὁ ἔσχατος Ὅρος $= 1 \times 2^{11} = 2048$.

κατὰ

(*) Οὕτως εὗρον οἰκειότερον κατὰ τὴν κρίσιν καὶ ἄλλων πεπαιδευμένων νὰ ὀνομάσω ἐκεῖνο, ὅπερ κοινότερον λέγομεν λόττον ἢ λοτερίαν.

κατὰ δὲ τὸν τέταρτον τύπον $x = -\frac{\omega\pi - \alpha}{\pi - 1}$ τουτέστι

$x = \frac{4096 - 1}{1} = 4096$ ὅλη ἡ Ποσότης,

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ ιά.

Περὶ Συζυγίας, ἢ Συνδυασμοῦ.

ΟʹΡΙΣΜΟʹΣ.

§. 223. Συνδυασμοῦ μέθοδος καλεῖται ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ποσαχῶς δύνανται νὰ συνδεθῶσι, καὶ διαφόρως νὰ μετατεθῶσι δεδομένα τινα (ἔστωσαν ταῦτα ἢ γράμματα, ἢ ἀριθμοί, ἢ ὁποιαδηποτοῦν πράγματα), ἀνὰ δύω, ἀνὰ τρία, ἀνὰ τέσσαρα, ἢ ἀνὰ πλείονα λαμβανόμενα.

ΣΧΟʹΛΙΟΝ.

§. 224. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τοῦ σκοποῦ εὐχερέστερον, εἶναι ἀναγκαῖον, εὐθὺς ἀρχόμενοι τοῦ ἔργου, νὰ μεταχειρισθῶμεν μικροὺς τινας ἀριθμοὺς πραγμάτων, ἢ μεγεθῶν, ἐξ οὗ ἀποκαλύπτονται καὶ γίνονται φανεροὶ οἱ νόμοι, τοὺς ὁποίους ἀκολουθοῦσιν αἱ συζυγίαι εἰς τὰ κατὰ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν μεγέθη.