Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἀναλογίᾳ λαμβάνονται αἱ ἡμέραι μετὰ τοῦ ἤδη εὑρεθέντος ἀριθμοῦ, οἷον

$$\overset{\text{ἡμ.}}{2} : \overset{\text{ἡμ.}}{3} = \overset{\text{Ὀργ.}}{140} : \chi = \overset{\text{Ὀργ.}}{210}$$

Εἰς δὲ τὴν τρίτην ἀναλογίαν τίθενται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὡρῶν μετὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ, οἷον

$$\overset{\text{ὡρ.}}{7} : \overset{\text{ὡρ.}}{4} = \overset{\text{Ὀργ.}}{210} : \chi = \overset{\text{Ὀργ.}}{120}$$

Ὀ(?)πόσας Ὀργυιὰς κτίσουσιν Οἰκοδ. 5. κ. τ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 185. Δυνάμεθα ἔτι νὰ ἀποκτῶμεν τὴν ἐπίλυσιν ἑκάστου προβλήματος, εἰς σύνθετον Μέθοδον κειμένου, καὶ κατὰ ἄλλον τρόπον εὐκολώτερον, τουτέστι πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς πρώτους λόγους (ὡστόσον πρέπει πρότερον οὗτοι οἱ λόγοι νὰ καταστάττωνται εἰκότως κατὰ τὴν Συνθήκην τοῦ Προβλήματος, καθὼς ἀνωτέρω κατετάχθησαν) μετ' ἀλλήλων, καὶ ἐκ τῶν γινομένων συγκροτοῦμεν ἕνα μόνον λόγον, ἔπειτα τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ὅστις Ὁμοειδὴς τυγχάνει μὲ τὸν ζητούμενον, θέτομεν εἰς τὸν τρίτον τόπον τῆς ἀναλογίας, καὶ οὕτω ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τέταρτόν τινα ἀριθμὸν, ὅστις εἶναι τὸ ζητούμενον. ὅθεν εἰς τὸ προτεθὲν Πρόβλημα ποιοῦμεν οὕτω, πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν Οἰκοδ. μετὰ τῶν ἡμερῶν καὶ ὡρῶν, καθ' ἃς οὗτοι ἐργάζονται, ἔπειτα τὰ ἐκ τούτων Γινόμενα θέτομεν εἰς ἀναλογίαν, ὥστε τὸ μὲν ἓν Γινόμενον νὰ ἔχῃ τὸν πρῶτον τόπον, τὸ δὲ ἕτερον νὰ ἔχῃ τὸν δεύτερον, ὁ δὲ δοθεὶς ἀριθμὸς τῶν Ὀργ., ὅστις εἶναι Ὁμοειδὴς μὲ τὸν ζητούμενον, τίθεται εἰς τὸν τρίτον τόπον οἷον

$$\begin{array}{lcl} \text{Οἰκ.} & 3 : 5 & \\ \text{Ἡμ.} & 2 : 3 & \\ \text{Ὡρ.} & \underline{7} : \underline{4} & = \overset{\text{Ὀργ.}}{84} : = \chi \quad \overset{\text{Ὀργ.}}{120} \\ & 42 : 60 & \end{array}$$

εὑρηται ἄρα τὸ $\chi = 120$ Ὀργ. καὶ εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ὅστις καὶ κατὰ τὴν ἄλλως προτεθεῖσαν διδασκαλίαν εὑρηται.

ὉΡΙΣ-

ὉΡΙΣΜΟ͂Σ β΄.

§. 189. Μέθοδος Ἑταιρείας (Συντροφίας) καλεῖται ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου, εὑρίσκομεν διαφόρους Ποσότητας, αἱ ὁποῖαι ἀναλογικῶς ἀνήκουσιν εἴς τινας, οἵτινες συντροφικῶς κατέθεντο ἕκαστός τινα Ποσότητα, ἔπειτα ἐμπορευτάμενοι ἐπί τινα χρόνον, μοιράζουσιν ἀναλόγως τὸ ἐκ τῆς ὅλης Ποσότητος κέρδος, ἢ ζημίαν, ὥστε κερδαίνει, ἢ ζημιοῦται ἕκαστος κατὰ τὴν κατατεθεῖσαν αὐτοῦ Ποσότητα.

ΠΡΟ͂ΒΛΗΜΑ γ΄.

§. 190. Νὰ εὕρωμεν εἰς τὴν Μέθοδον ἑταιρείας ἀναλόγους Ὅρους, ἢ Ποσότητας.

ΠΡΑΚΤΕ͂Α, ἢ ΛΥ͂ΣΙΣ.

α΄.) Συνάπτομεν ἀλλήλας τὰς κατατεθείσας Ποσότητας, καὶ ἀποτελοῦμεν ἐκ τούτου ἓν κεφαλαιῶδες ἄθροισμα, ἔπειτα κάμνομεν μίαν τοιαύτην ἀναλογίαν, οἷον ὡς τὸ ἐξ ἁπασῶν τῶν Ποσοτήτων συγκείμενον (ἄθροισμα) πρὸς τὴν ἰδίαν Ποσότητα ἑκάστου, οὕτω καὶ ὅλον τὸ κέρδος (ἢ ἡ ζημία) πρὸς τὸ ζητούμενον κέρδος, τὸ ἀνῆκον ἑκάστῃ Ποσότητι,

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ά.

Συνέμποροι τρεῖς συντροφίαν ποιησάμενοι, κατέβαλον καθ' ὑπόθεσιν ὁ μὲν πρῶτος Γρόσ. 5000, ὁ δὲ δεύτερος 3000, ὁ δὲ τρίτος αὖθις 2000. καὶ ἐκέρδησαν 15000 Γρόσ. ὅθεν ζητεῖται, πόσον κέρδος ἀνήκει νὰ λάβη ἕκαστος τούτων. ὅλη ἡ Ποσότης τῶν Γροσίων, ὁπῦ κατέβαλον οὗτοι εἶναι 10000, ὅθεν

10000:5000=15000:χ=7500. { τὸ κέρδος τὸ ἀνῆκον εἰς τὸν πρῶτον

10000:3000=15000:χ=4500. { τὸ τοῦ δευτέρου

10000:2000=15000:3000. { τὸ τοῦ τρίτου

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

Τρεῖς ἠγόρασαν ὁμοῦ 4000 μέτρα σίτου διὰ 500, φέρ' εἰπεῖν, Γρόσια, καὶ ὁ πρῶτος ζητεῖ νὰ λάβη ἐξ αὐτῶν διὰ λογαριασμόν του 1300 μέτρα, ὁ δὲ δεύτερος 1460, καὶ ὁ τρίτος 1240. πόσα λοιπὸν Γρόσια πρέπει νὰ πληρώση ἕκαστος διὰ ὅσα μέτρα σίτου ἔλαβεν;

μέτρα. μέτρα. Γρόσ. Γρόσ.
4000 : 1300 = 500 : 162½. { τόσα Γρόσια πρέπει νὰ πληρώση ὁ πρῶτος.

μέτρ. μέτρ. Γρόσ. Γρόσ.
4000 : 1460 = 500 : 182½. { τόσα ὁ δεύτερος

μέτρ. μέτρ. Γρόσ. Γρόσ.
4000 : 1240 = 500 : 155. { ὁ δὲ τρίτος τόσα

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ ά.

§. 191. Α'ν δὲ πλείονες τῶν τριῶν τύχωσιν οἱ τὴν συντροφίαν ποιήσαντες, τὴν αὐτὴν οὐδεὶς τρόπον μεταχειριζόμεθα, τοσαύτας δηλαδὴ συγκροτοῦμεν ἀναλογίας, ὅσοι εἰσὶν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί·

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 192. Εἰς ἐντελεστέραν πληροφορίαν μεταχειριζόμεθα ἐνίοτε καὶ βάσανον (τουτέστι δοκιμὴν) μετὰ τὴν λύσιν τοῦ Προβλήματος. Συνάπτομεν ἀλλήλοις τοὺς εὑρεθέντας ἀριθμοὺς, οἷον τὸν (τοῦ πρώτου Παραδείγματος) 7500, καὶ τὸν 4500, καὶ τὸν 3000 ἀριθμὸν, καὶ ἐὰν ἐκ τῆς Συνάψεως προκύψῃ ἀριθμὸς ἴσος μὲ τὸ ὅλον κέρδος 15000, ἡ πρᾶξις καὶ ἡ Ἐπίλυσις τότε εἶναι ὑγιής.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 193. Εἰσὶν ἔτι καὶ ἄλλαι διάφοροι Συνθῆκαι καὶ περιστάσεις, ὡς εἴρηται προλαβόντως περὶ τῆς Συνθέτου Μεθόδου, οἷον κοντὰ εἰς τὴν Διαφορὰν καὶ ἀνισότητα τῶν παρ' ἑκάστου καταβαλλομένων Ποσοτήτων, θεωρεῖται καὶ τις διαφορὰ τοῦ χρόνου, κατὰ τὸν ὁποῖον ἕκαστος τῶν συνεμπόρων κατέθετο τὴν Ποσότητά του. ὅθεν ὅταν προβληθῶσιν εἰς λύσιν τοιαῦται περιστάσεις, πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὴν Ποσότητα ἑκάστου μετὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τοῦ χρόνου, ὁ ὁποῖος θεωρεῖται καὶ ἀναφέρεται εἰς τὴν αὐτὴν Ποσότητα, ἔπειτα συνάπτομεν τὰ ἐκ τούτων Γινόμενα εἰς ἓν ὁλικὸν ἄθροισμα, καὶ τέλος ἀποτελοῦμεν μίαν ἀναλογίαν, καθὼς ἐν τοῖς ἑξῆς δηλοῦται σαφέστερον.

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Ἐπειδὴ τὰ ζητούμενα κέρδη ἔχουσι λόγον καὶ πρὸς τὰς καταβληθείσας Ποσότητας, καὶ πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦ Χρό-

νου,

ὖν, εἶναι πρόδηλον, ὅτι ἔχουσι λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν αὐτῶν, καὶ ἑπομένως ἔχουσιν ὡς οἱ ὑπ' αὐτῶν Γινόμενοι ἀριθμοί.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

Συνέμποροι τρεῖς ἐκέρδησαν Γρόσια 200, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ μὲν εἶχε βάλει Γρόσ. 20 πρὸ 3 Μηνῶν, ὁ δὲ δεύτερος Γρόσια 40 πρὸ 2 Μηνῶν, καὶ ὁ τρίτος 24 πρὸ 6 Μηνῶν. ὅθεν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, πόσον κέρδος ἀνήκει ἑκάστῳ,

Γρόσ.	20	40	24	60
Μῆν.	3	2	6	80
	60	80	144	144
				284

ὡς 284 : πρὸς 60 $=$ οὕτω 200 : πρὸς $42+\frac{72}{284}$

$284 \;:\; 80 = 200 \;:\; 56+\frac{96}{284}$

$284 \;:\; 144 = 200 \;:\; 101+\frac{116}{284}$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. δ'.

Γεώργιός τις, δὸς εἰπεῖν, καὶ Δημήτριος, καὶ Ἰωάννης οἱ τρεῖς ὁμοῦ ἔκαμον συντροφίαν, καὶ ὁ μὲν Γεώργιος κατέθετο εἰς τὴν συντροφίαν Γρόσ. 100. διὰ 19 Μῆνας.
ὁ δὲ Δημήτριος κατέβαλεν 130. διὰ 10 Μῆνας.
ὁ δὲ Ἰωάννης . . . . . . 300. διὰ 6 Μῆνας.

τὸ δὲ κέρδος ἐγένετο 10000. ζητεῖται λοιπὸν, πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος τούτων;

ἡ Ποσότης τοῦ πρώτου 100 πολλαπλασιασθεῖσα μετὰ τοῦ 16 ἀριθμοῦ γίνεται 1900

ἡ δὲ τοῦ δευτέρου 1300

ἡ δὲ τοῦ τρίτου 1800

5000

ὅθεν 5000 : 1900 = 10000 : 3800. { τόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ὁ πρῶτος.

5000 : 1300 = 10000 : 2600. { τόσον ὁ δεύτερος.

5000 : 1800 = 10000 : 3600. { τόσα ὁ τρίτος.

ΣΧΟΛΙΟΝ γ΄.

§. 194. Περὶ ἐκείνων, ὅπου συνηθίζουσιν οἱ ἀριθμητικοὶ νὰ προσθέτωσιν ἔτι ἐνταῦθα, ἡμεῖς ὡμιλήσαμεν, ὅτε ἐν τῷ (§. 160) ἐπραγματευόμεθα.

ΟΡΙΣΜΟΣ γ΄.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς ψευδοῦς ὑποθέσεως.

§. 195. Μέθοδος ψευδοῦς ὑποθέσεως καλεῖται, ὅταν λαμβάνωμεν, ἀντὶ τῶν ἀγνώστων καὶ ζητουμένων ἀριθμῶν, ἄλλους τινὰς ἀριθμοὺς ὑποθετικοὺς καὶ ἀναλόγους μὲ τοὺς ζητουμένους, διὰ νὰ ἀποκτήσωμεν τὴν ἀληθῆ ἐπίλυσιν τοῦ προβαλλομένου.

ΠΑΡΑ'-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

Προβάλλεται πρῶτον, ὅτι τρεῖς ἄνθρωποι ἔχουσι νὰ μοιράσωσιν 1300 Γρόσια, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος πρέπει νὰ λάβῃ πενταπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος διπλάσιον τῶν τοῦ τρίτου. ἔπειτα ζητεῖται πόσα Γρόσια πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Ὅθεν ἂν ὑποτεθῇ νὰ λάβῃ ὁ τρίτος 1, πρέπει καὶ ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ 2, κατὰ τὴν τοῦ Προβλήματος συνθήκην, καὶ ἑπομένως ὁ πρῶτος 10. τούτους δὲ τοὺς ἀριθμοὺς Συνάψαντες ὁμοῦ, ποιοῦμεν τὸν 13 ἀριθμόν, ἔπειτα συγκροτοῦμεν τὰς ἑξῆς ἀναλογίας.

$13:10=1300:\chi=1000$ ὅπερ ἐστὶ τὸ μέρος τοῦ πρώτου.
$13:2=1300:\psi=200$ τὸ μέρος τοῦ δευτέρου.
$13:1=1300:\varphi=100$ . . . τοῦ τρίτου.

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Εἶναι φανερὸν ἐκ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξ ὑποθέσεως ληφθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι ὁ 13 πρὸς τὸ μερίδιον (ὅπου ὑποθετικῶς λαμβάνει ὁ πρῶτος) εἴτ' οὖν πρὸς τὸν 10, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει καὶ ὁ δοθεὶς τῶν Γροσίων ἀριθμός, εἴτ' οὖν 1300, πρὸς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν Γροσίων (τὰ ὁποῖα ἀληθῶς πρέπει νὰ λάβῃ ὁ πρῶτος) τουτέστι πρὸς τὸν 1000. καὶ οὕτω διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη ἀναλογία εἶναι ἀληθής.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ

Περὶ Προόδων.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 195. Πρόοδος καλεῖται σειρά τις Ποσοτήτων ἢ πλῆθυς ἀριθμῶν τινων κατὰ τινας Ἴσους λόγους χωρούντων, ἢ γραφομένων. αὕτη δὲ εἶναι διττὴ, ἀριθμητικὴ δηλαδὴ, καὶ Γεωμετρική. καὶ ἀριθμητικὴ μὲν Πρόοδος εἶναι, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ χωρῶσι κατά τινα ἀριθμητικὸν λόγον, τοὺς ὁποίους καὶ διὰ τοῦτο Μεγέθη, ἢ ἀριθμοὺς Ἰσοδιαφέροντας ὀνομάζουσί τινες. Γεωμετρικὴ δὲ εἶναι, ὅταν αἱ Ποσότητες κατατάττωνται ἐν Γεωμετρικῷ τινι λόγῳ, καὶ διὰ τοῦτο ὀνομάζονται σειρὰ μεγεθῶν τὸ αὐτὸ Πηλίκον ἐχόντων: καὶ τὰς δύω ταύτας Προόδους ἐκθέτομεν δι' ἀριθμῶν οὕτω.

Ἀριθμ.

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22. κτ.

Γεωμ.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. κτ.

Ο'ΡΙΣ-

ὉΡΙΣΜΟ͂Σ β.

§. 196. Αὔξουσα Πρόοδος λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας οἱ ἑπόμενοι Ὅροι διηνεκῶς χωροῦσιν αὐξάνοντες, ϗ ἑπομένως εἶναι μείζονες τῶν Ἡγουμένων, καθὼς αἱ ἀνωτέρω δύω προτεθεῖσαι. Μειουμένη δέ, ἢ Ἐλαττουμένη Πρόοδος εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας οἱ Ὅροι χωροῦσιν ἐλαττούμενοι, ϗ ἑπομένως ὁ Ἡγούμενος Ὅρος εἶναι πάντοτε μείζων τοῦ ἑπομένου. διὰ τοῦτο ϗ μιᾶς μὲν αὐξούσης Προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ Ἐλάττων, ὁ δὲ ἔσχατος εἶναι ὁ μείζων τῶν ἄλλων. εἰς δὲ τὴν Ἐλαττουμένην Πρόοδον ἀκολουθεῖ τὸ ἀνάπαλιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 197. Ἐκ τῶν εἰρημένων εἶναι καταφανὲς, ὅτι ἡ ἀρχὴ ϗ ἡ Πηγὴ τινὸς Προόδου εἶναι μία συνεχὴς ἀναλογία, ἥτις διὰ τῆς ζητήσεως τοῦ ἑπομένου Ὅρου χωροῦσα κατὰ τοὺς ἤδη γνωστοὺς κανόνας, Πρόοδός τις ἀποκαθίσταται. ἂν π. χ. λάβωμεν πρῶτον μίαν συνεχῆ ἀναλογίαν, οἷον τὴν ÷ 1, 4, 7, ϗ ἔπειτα εἴπωμεν, ὡς 4 πρὸς 7, οὕτω 7 πρὸς 10, κτώμεθα τὸν τέταρτον Ὅρον. ϗ πάλιν ἂν ἀκολουθήσωμεν τὸ αὐτὸ ἐπὶ πλέον, λέγοντες, ὡς 7 πρὸς 10, οὕτως 10 πρὸς 13, πορίζόμεθα τὸν πέμπτον Ὅρον, ϗ οὕτω χωροῦμεν ἐπ' ἄπειρον. τὸ ἴδιον ἀκολουθεῖ ϗ εἰς μίαν Γεωμετρικήν. π. χ. 1 : 2 ∷ 2 : 4 & 2 : 4 ∷ 4 : 8 ϗ 4 : 8 ∷ 8 : 16. κ. τ. ἐξ ὧν γίνεται 1 : 2 : 4 : 8 : 16. κ. τ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 198. Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τινὰ σύγχυσιν, θέλομεν πραγματευθῆ ἐν τοῖς ἑξῆς μόνον περὶ τῆς αὐξούσης Προόδου. ἐπειδὴ ὅταν θελήσωμεν νὰ μεταβάλωμεν μίαν αὔξουσαν εἰς Ἐλαττωμένην Πρόοδον, ἠμποροῦμεν εὐκόλως νὰ τὴν μεταβάλωμεν διὰ τῆς ἐναντίας μεταθέσεως τῶν Ὅρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 199. Κάθε αὔξουσα ἀριθμητικὴ Πρόοδος δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τοῦτον τὸν τύπον.
$\div\ \alpha \,.\, \alpha + \delta \,.\, \alpha + 2\delta \,.\, \alpha + 3\delta \,.\, \alpha + 4\delta \,.\, \alpha + 5\delta$. κ. τ.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἀριθμητικὴ Πρόοδος εἶναι μία συνεχὴς σειρὰ Ποσοτήτων, ἢ ἀριθμῶν (§. 195), οἱ ὁποῖοι χωροῦσι κατά τινα ἴσην διαφοράν. ἄρα ἕκαστος Ἑπόμενος Ὅρος εἶναι μείζων τοῦ Ἡγουμένου κατά τινα προσδιωρισμένην καὶ ἴσην διαφοράν. ὅθεν ὅταν ὑποτεθῇ ὁ πρῶτος Ὅρος μιᾶς ἀριθμ. Προόδου α. ὁ δεύτερος Ὅρος ἔσται τότε αὐτὸς ὁ πρῶτος μετὰ τῆς δοθείσης διαφορᾶς, τουτέστιν $\alpha + \delta$, ὁ δὲ τρίτος ἔσται ὁ ἴδιος Ἡγούμενος δεύτερος μετὰ τῆς ἰδίας διαφορᾶς. τουτέστιν $\alpha + \delta + \delta$, ἢ $\alpha + 2\delta$. ὁ δὲ τέταρτος ἔσται πάλιν αὐτὸς ὁ Ἡγούμενος τρίτος μετὰ τῆς διαφορᾶς, οἷον $\alpha + 2\delta + \delta$, ἢ $\alpha + 3\delta$. καὶ οὕτω καθεξῆς. ἑκάστη ἄρα αὔξουσα ἀριθμητικὴ Πρόοδος κ.τ. ἥτις διὰ τῶν ἀριθμῶν παρισταμένη, προάγεται οὕτως.

$2 \,.\, 2 + 3$

$2 . 2 + 3 . 2 + 6 . 2 + 9 . 2 + 12 . 2 + 15 . 2 + 18 .$

$2 . \quad 5 \quad . \quad 8 \quad . \quad 11 \quad . \quad 14 \quad . \quad 17 \quad . \quad 20$

ἐπὶ δὲ τῆς ἐλαττουμένης Προόδου οἱ Ὅροι ἀκολουθοῦσιν οὕτως·

$\kappa . \alpha - \delta . \alpha - 2\delta . \alpha - 3\delta .$ κ. τ.

ΠΟΡΙΣΜΑ α΄.

§. 100. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕκαστος δύναται νὰ καταλάβῃ σαφέστατα, ὅτι κάθε ἑπόμενος Ὅρος μιᾶς αὐξούσης Προόδου συνίσταται ἐκ τοῦ πρώτου Ὅρου καὶ τῆς δοθείσης διαφορᾶς, πολλαπλασιασθείσης μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ τὴν πληθὺν τῶν προηγουμένων Ὅρων, ἢ μὲ ἀριθμὸν μονάδι Ἐλάττονα τῆς κατ' αὐτὸν τὸν ζητούμενον Ὅρον πληθύος, τουτέστιν ὁ τέταρτος, φέρ' εἰπεῖν, Ὅρος τῆς ἀνωτέρω Προόδου (§. 199) σύγκειται ἐκ τοῦ α καὶ τῆς διαφορᾶς δ, πολλαπλασιασθείσης μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3. Ὅστις εἶναι ἴσος μὲ τὴν πληθὺν τῶν προηγουμένων Ὅρων. οἷον $\alpha + 3\delta$. ὁ δὲ ἕκτος Ὅρος εἶναι $\alpha + 5\delta$. καὶ ἐπομένως ὁ εἰκοστὸς Ὅρος συνίσταται ἐκ τοῦ $\alpha + 19\delta$. Ὅθεν ἂν ὁ πρῶτος Ὅρος ὑποτεθῇ ἴσος μὲ τὸν 2, καὶ ἡ διαφορὰ 3, τότε ὁ εἰκοστὸς Ὅρος $2 + 3 \times 19 = 2 + 57 = 59$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β΄.

§. 101. Ὅταν θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν Διαφορὰν μεταξὺ τοῦ Πρώτου, καὶ ἐσχάτου Ὅρου τῆς Προόδου; ἀφαιροῦμεν τότε τὸν πρῶτον Ὅρον ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου. π. χ. ἔσχατος Ὅρος μιᾶς Προόδου ἔσω ὁ ἕβδομος Ὅρος, ὅτ' οὖν ὁ $\alpha + 6\delta$. ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ ὁ πρῶτος Ὅρος α, ἐγκαταλείπεται μόνον 6δ, ὅπερ ἐστὶν ἡ διαφορὰ ἡ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τούτου τοῦ ἐσχάτου Ὅρου θεωρουμένη. Ὅθεν ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου εἶναι ἴση μὲ τὴν κοινὴν διαφορὰν δ, πολλαπλασιασθεῖσαν μετὰ τῆς πληθύος τῶν Ὅρων Μονάδι Ἐλαττωθείσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ΄.

§. 201. Τὸ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου ἄθροισμα εἶναι ἴσον, μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ προεσχάτου, τουτέστι τοῦ παραλήγοντος Ὅρου, ὡσαύτως καὶ τὸ ἄθροισμα ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ προεσχάτου Ὅρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ τοῦ Ὅρου τοῦ κειμένου πλησίον τοῦ Προεσχάτου, τουτέστι τοῦ προπαραλήγοντος. π. χ. ἔστω τις Πρόοδος ἀριθμητικὴ ἀπὸ ἓξ Ὅρων συνισταμένη, οἷον ἡ $\alpha.\ \alpha+\delta.\ \alpha+2\delta.\ \alpha+3\delta.\ \alpha+4\delta.\ \alpha+5\delta$. τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἐσχάτου Ὅρου, τουτέστι τὸ $\alpha+\alpha+5\delta$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\alpha+\delta+\alpha+4\delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πέμπτου Ὅρου, ὡσαύτως καὶ τὸ ἄθροισμα ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ πέμπτου, τουτέστι τὸ $2\alpha+5\delta$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $2\alpha+5\delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου Ὅρου, εἰ δὲ καὶ τύχῃ ἡ Πρόοδος ἐκ πλειόνων Ὅρων συνισταμένη, πάλιν τὸν αὐτὸν τρόπον μεταχειριζόμεθα, ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου ἀρχόμενοι, ὥστε γενικῶς πρέπει νὰ θεωρῶνται τὰ ἑξῆς. ὅτι, εἰς ἑκάστης ἀριθμητικῆς Προόδου τὸ Κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ Κεφάλαιον ἐκείνων τῶν Ὅρων, οἵτινες ἐπίσης ἀφίστανται ἀπὸ τῶν ἄκρων. Ὅτε ὅμως ἡ Πρόοδος ἐκ περιττῶν (*) Ὅρων συνίσταται, τότε ὁ μεσαίτατος Ὅρος τῆς Προόδου μένει μόνος του καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλησιέστατα περὶ αὐτὸν δύω κειμένων Ὅρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τούτου τοῦ μεσαιτάτου Ὅρου.

ΠΟΡΙΣΜΑ δ΄.

§. 203. Ἐπειδὴ πάντα ταῦτα τὰ ἀθροίσματα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ἐντεῦθεν μανθάνομεν, πῶς νὰ εὑρίσκωμεν εὐκόλως τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν Ὅρων τῆς τυχούσης Προόδου. πολλαπλασιάζομεν

μεν

(*) Περιττὰ ἐνταῦθα λέγονται τὰ ἄζυγα, οἷον τὸ ἕν, τὰ τρία, τὰ πέντε, τὰ ἑπτά. κ. τ.

μεν δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ πάντων τῶν Ὅρων, καὶ τότε τὸ ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως Γενόμενον εἶναι τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν Ὅρων. ἢ ἄλλως πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου μεθ' ὅλου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν Ὅρων, ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ Γενόμενον διὰ τοῦ 2. καὶ τότε τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Πηλίκον ἔσται Ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν Ὅρων. π. χ. Ἔστω δοθεῖσα αὕτη ἡ Πρόοδος. 2.5.8.11.14.17.20,23. λοιπὸν θέλοντες νὰ εὕρωμεν πόσον εἶναι ὅλον τὸ ἄθροισμα πάντων τούτων τῶν Ὅρων, λαμβάνομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου, τουτέστι τὸ $2+23$, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ πάντων τῶν Ὅρων, τουτέστι μὲ τὸν 4, καὶ τὸ ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως Γενόμενον εἶναι ὅλον τὸ ἄθροισμα τῶν Ὅρων, οἷον $(2+23)^4 = 100$. ἢ κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον $(2+23)\frac{8}{2} = 100$.

ΠΟΡΙΣΜΑ ί.

§. 104. Ὅθεν δὴ ἐφ' ἑκάστης Προόδου θεωροῦνται πέντε τινά.

1) Ὁ πρῶτος Ὅρος τῆς Προόδου, ὅστις ἐστὶν ὁ πλέον μικρότερος (ἐνταῦθα ὑποτίθεται Πρόοδος αὔξουσα) τῶν ἑπομένων Ὅρων.

2) Ὁ ἔσχατος Ὅρος, ὅστις ὑπάρχει καὶ μείζων τῶν ἄλλων.

3) Ἡ διαφορά, καθ' ἣν οἱ Ὅροι διαφέρουσι μεταξύ των ἐπίσης.

4) Ἡ πληθύς, ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν Ὅρων.

5) Τὸ Κεφάλαιον, ἢ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν Ὅρων. τὰ ὁποῖα οὕτως εἰσὶν συνδεδεμένα, ὥστε ἂν δοθῶσιν ἐξ αὐτῶν μόνον τὰ τρία, εὐθὺς καὶ τὰ λοιπὰ δύω προσδιορίζονται ἐξ αὐτῆς τῆς Συνθήκης, καὶ εὑρίσκονται εὐκολώτατα. π. χ. ἂν εἰς μίαν Πρόοδον προσδιορισθῇ ὁ πρῶτος Ὅρος 2, ὁ ἔσχατος 23, καὶ ἡ διαφορὰ 3, εὐθὺς ἐξ αὐτῆς τῆς Συνθήκης προσδιορίζεται, καὶ ὅτι (μ' ὅλον ὅπου φαίνεται εἰς ἡμᾶς ἔτι ὡς ἀπροσδιόριστον καὶ ἄδηλον) ἡ μὲν πληθὺς τῶν Ὅρων εἶναι ὀκτώ, τὸ δὲ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Ὅρων ἑκατόν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 205. Δι' αὐτῶν τῶν πέντε εἰρημένων Ἰδιοτήτων, ἂν τὰς συσχηματίσωμεν ἀλγεβραϊκῶς διὰ Γραμμάτων, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ἀλγεβραϊκοὺς τινας, καὶ γενικοὺς Τύπους, τοὺς ὁποίους δύναται ἕκαστος νὰ μεταχειρίζηται εἰς κάθε Ἰδιαιτέραν περίστασιν, ὥστε ἀφ' οὗ δοθῶσι καὶ προσδιορισθῶσιν ἐξ αὐτῶν τρία, νὰ εὑρίσκῃ τὰ λοιπὰ δύω. καὶ δὴ

ὁ πρῶτος Ὅρος τῆς Προόδου ὀνομασθήτω α
ὁ δὲ ἔσχατος . . . . . . ω
ἡ δὲ διαφορὰ . . . . . . δ
ἡ δὲ πληθὺς . . . . . . π
τὸ δὲ κεφάλαιον . . . . . . κ

κατὰ τὸ πρῶτον Πόρισμα (§. 200) ἕκαστος ἑπόμενος Ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον Ὅρον σὺν τῇ διαφορᾷ πολλαπλασιασθείσῃ μετὰ τῆς πληθύος τῶν Ὅρων κατὰ Μονάδα ἐλαττωμένης, τουτέστι μετὰ τῆς $\pi - 1$. λοιπὸν ἕκαστος Ὅρος εἶναι $= \alpha + \pi\delta - \delta$. Κατὰ δὲ τὸ δεύτερον Πόρισμα ἡ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου διαφορὰ $\omega - \alpha$ εἶναι ἴση μὲ τὴν κοινὴν τῶν Ὅρων διαφορὰν πολλαπλασιασθεῖσαν μετὰ τῆς πληθύος τῶν Ὅρων Μονάδι ἐλαττωμένης τουτέστι μετὰ τοῦ $\pi - 1$, ὅπερ γίνεται $\pi\delta - \delta$. λοιπὸν $\omega - \alpha = \pi\delta - \delta$. Κατὰ τὸ τέταρτον Πόρισμα ποριζόμεθα τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν Ὅρων, πολλαπλασιάζοντες τὸ Κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου, ἤτοι $\alpha + \omega$ μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πληθύος τῶν Ὅρων τουτέστι μὲ τὸ $\frac{\pi}{2}$. λοιπὸν τὸ Κεφάλαιον τῶν Ὅρων εἶναι ἴσον μὲ τοῦτον τὴν Ἀλγεβραϊκὴν Ἔκθεσιν $\frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$, οἷον $\kappa = \frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$:
αὗται αἱ εἰρημέναι Ἐκθέσεις χρησιμεύουσι πρὸς λύσιν τοῦ ἀκολούθου Προβλήματος.

ΠΡΟ-

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ά.

§. 206. Νὰ ἀποκαταστήσωμεν Ἐκθέσεις τινας, ἢ Τύπους γενικοὺς, διὰ τῶν ὁποίων, ὅταν δοθῶσι τρεῖς Ἰδιότητες μιᾶς Προόδου, νὰ ἠμποροῦμεν νὰ εὑρίσκωμεν εὐκόλως καὶ τὰς λοιπὰς δύω.

Διὰ νὰ σαφηνίσωμεν ἐπὶ πλέον τὰ πρακτέα καὶ τὰς λύσεις διά τινος Παραδείγματος, μεταχειριζόμεθα ταύτην τὴν ἀκόλουθον Πρόοδον. 1.4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Εἰς τὸ προτεθὲν Σχόλιον προέκυψεν ἐκ τοῦ δευτέρου Πορίσματος ἡ Ἀλγεβραϊκὴ Ἔκθεσις $\omega - \alpha = \pi\delta - \delta$. ἂν λοιπὸν λάβωμεν τὰ τῆς Ἐξισώσεως ταύτης, καὶ κατὰ τοὺς περὶ Ἐξισώσεως Κανόνας μεταθέσωμεν τὰ μὲν τρία διδόμενα εἰς τὸ ἓν μέρος, τὸ δὲ ἕτερον ζητούμενον εἰς τὸ ἄλλο μέρος, ἀποκτῶμεν οὕτω τέσσαρας διαφόρους Τύπους, τῶν ὁποίων τὸν μὲν πρῶτον μεταχειριζόμεθα εἰς εὕρεσιν τοῦ πρώτου Ὅρου α, τὸν δὲ δεύτερον εἰς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου Ὅρου ω, τὸν δὲ τρίτον εἰς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς δ, καὶ τὸν τέταρτον εἰς εὕρεσιν τῆς πληθύος τῶν Ὅρων π. οἷον.

ΤΥ'ΠΟΣ ά.

Ἐὰν δοθῇ ὁ ἔσχατος Ὅρος ω, καὶ ἡ διαφορὰ δ, καὶ ἡ πληθὺς π, καὶ ζητῆται ὁ πρῶτος Ὅρος α, ποιοῦμεν οὕτω $\omega - \pi\delta + \delta = \alpha$, τουτέστι $34 - 36 + 3 = 1$.

ΤΥ.

ΤΥ'ΠΟΣ β'.

Ε'ὰν δὲ δοθῆ τὸ π, τὸ δ, τὸ α, κ̀ ζητῆται τὸ ω, μεταχειριζόμεθα ταύτην τὴν Ε'ξίσωσιν

$\pi\delta - \delta + \alpha = \omega$, τυτέστι $36 - 3 + 1 = 34$.

ΤΥ'ΠΟΣ γ'.

Ο'ταν δὲ ὦσι διδόμενα τὸ ω, α, π, κ̀ ζητῆται ἡ διαφορὰ δ, ποιῦμεν ὕτω

$$\frac{\omega - \alpha}{\pi - 1} = \delta \text{ τυτέστι } \frac{34 - 1}{12 - 1} = 3.$$

ΤΥ'ΠΟΣ δ'.

Ο'ταν δὲ ὦσι διδόμενα τὸ ω, α, δ, κ̀ ζητῆται τὸ π, τότε ποιῦμεν ὕτω

$$\frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta} = \pi, \text{ τυτέστι } \frac{34 - 1 + 3}{3} = 12$$

Ω'σαύτως εἰς τὸ προτεθὲν Σχόλιον προέκυψε κατὰ τὸ τέταρτον Πόρισμα αὕτη ἡ Ε'κθεσις $\kappa = \frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$. ἂν λοιπὸν εἰς αὐτὴν τὴν Ε'ξίσωσιν ζητηθῆ, ὡς πρότερον, ἡ Ε'κθεσις τῦ κ, α, ω, κ̀ τῦ π, δύνανται νὰ προκύψωσιν ἄλλοι τρεῖς γενικοὶ Τύποι. οἷον,

ΤΥΠΟΣ έ.

Ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος Ὅρος, ὁ ἔσχατος, καὶ ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων, καὶ ζητῆται τὸ Κεφάλαιον, τότε μεταχειριζόμεθα εἰς εὕρεσιν τὴν ἑξῆς Ἔκθεσιν

$$\frac{\alpha\pi+\omega\pi}{2}=\kappa,\ \text{τυπέστι}\ \frac{1\times12+34\times12}{2}=210$$

ΤΥΠΟΣ ς'.

Ὅταν δὲ δοθῇ τὸ Κεφάλαιον, ἡ πληθὺς, καὶ ὁ ἔσχατος, καὶ ζητῆται ὁ πρῶτος, μεταχειριζόμεθα τὴν Ἔκθεσιν κατὰ τοῦτον τὸν Τύπον.

$$\frac{2\kappa}{\pi}-\omega=\alpha\ \text{τυπέστι}\ \frac{420}{12}-34=1.$$

ΤΥΠΟΣ ζ'.

Ὅταν δὲ δοθῇ τὸ Κεφάλαιον, ἡ πληθὺς, καὶ ὁ πρῶτος Ὅρος, καὶ ζητῆται ὁ ἔσχατος, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον κατὰ τὸν ἑξῆς γενικὸν Τύπον.

$$\frac{2\kappa}{\pi}-\alpha=\omega\ \text{τυπέστι}\ \frac{420}{12}-1=34.$$

ΤΥΠΟΣ ή.

Ὅταν δὲ δοθῇ τὸ Κεφάλαιον, ὁ πρῶτος Ὅρος, καὶ ὁ ἔσχατος, καὶ ζητῆται ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων, τότε ποιοῦμεν κατὰ τὸν ἑξῆς Τύπον

$$\frac{2\kappa}{\alpha+\omega}=\pi\ \text{τυπέστι}\ \frac{420}{1+34}=12$$

Διὰ τῶν ἀνωτέρω εὑρεθεισῶν δυνάμεων προκύπτουσιν ἄλλοι δώδεκα γενικοὶ Τύποι. οἷον,

ΤΥΠΟΣ θ'.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου μεταχειριζόμεθα.

$$\frac{2\varkappa+\delta\pi^2-\delta\pi}{2\pi}=\omega, \text{ τουτέστι } \frac{420+432-36}{24}=34$$

ΤΥΠΟΣ ι'.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς Διαφορᾶς μεταχειριζόμεθα.

$$\frac{2\omega\pi-2\varkappa}{\pi^2-\pi}=\delta \text{ τουτέστι } \frac{816-420}{144-12}=3$$

ΤΥΠΟΣ ια'.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ Κεφαλαίου μεταχειριζόμεθα

$$\frac{2\omega\pi-\delta\pi^2+\delta\pi}{2}=\varkappa \quad \frac{816-432+36}{2}=210.$$

ΤΥΠΟΣ ιβ'.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλήθους τῶν Ὅρων μεταχειριζόμεθα.

$$\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\delta^2}+\frac{\omega}{\delta}+\frac{1}{4}-\frac{2\varkappa}{\delta}\right)}+\frac{\omega}{\delta}+\frac{1}{2}=\pi.$$

ὅπερ δι' ἀριθμῶν ἐμφαίνομεν $\sqrt{\left(\frac{1156}{9}+\frac{34}{3}+\frac{1}{4}+\frac{420}{3}\right)}+\frac{34}{3}+\frac{1}{2}=12.$

ΤΥ-

ΤΥΠΟΣ ιγ΄.

Πρὸς εὕρεσιν αὖθις τῆς πληθύος τῶν Ὅρων μεταχειριζόμεθα.

$$\sqrt{\left(\frac{2\kappa}{\delta}+\frac{\alpha^2}{\delta^2}-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{1}{4}\right)}-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{1}{2}=\pi.$$

ὅπερ δὲ ἀριθμῶν $\sqrt{\left(\frac{420}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}$ $-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=12.$

ΤΥΠΟΣ ιδ΄.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ πρώτου Ὅρου μεταχειριζόμεθα

$\frac{2\kappa}{2\pi}-\frac{\pi\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\alpha$. καὶ δὲ ἀριθ. $\frac{420}{24}-\frac{36}{2}$ $+\frac{3}{2}=1.$

ΤΥΠΟΣ ιε΄.

Εἰς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς μεταχειριζόμεθα

$$\frac{2\kappa-2\alpha\pi}{\pi^2-\pi}=\delta,\ \text{τουτέστι}\ \frac{420-24}{144-12}=3.$$

ΤΥΠΟΣ ις΄.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου μεταχειριζόμεθα

$$\frac{\pi^2\delta-\pi\delta+2\pi\alpha}{2}=\kappa.\ \frac{432-36+24}{2}=210.$$