σταται εἰς τὸ Πρόβλημα. ἐπειδὴ ὅλος ὁ συμμιχθεὶς οἶνος πρέπει νὰ εἶναι 20 μέτρα. τὸ ἴδιον συμβαίνει, ϗ ἂν ληφθῇ τὸ $\psi=2$, ἢ $=3$. εἰ δὲ ληφθῇ τὸ $\psi=4$, ἔσαι $\varphi=14$, ϗ $=2$, ἡ τιμὴ ἄρα ἔσται $4\chi+8\varphi+20\psi$. ἤτοι $8+112+80=200$. εἰ δὲ λάβωμεν τὸ $\psi=5$, ἔσαι $\varphi=10$, ϗ $\chi=5$. ϗ ἡ τιμὴ ἄρα $20+80+100=200$. ϗ αὖθις ἂν ληφθῇ $\psi=6$, ἔσται $\varphi=6$, ϗ $\chi=8$, ϗ ἡ τιμὴ ἄρα $32+48+120=200$. ϗ πάλιν ἂν τεθῇ $\psi=7$, ἔσαι $\varphi=2$, ϗ $\chi=11$, ϗ ἡ τιμὴ $44+16+140=200$. ἂν ὅμως ληφθῇ τὸ $\psi=8$, γίνονται τότε τὸ φ, ϗ χ ἀποφατικὰ, ϗ ἐπομένως ἡ λύσις ἔσται ἀδύνατος. μόνον λοιπὸν αὗται αἱ τέσσαρες λύσεις εἰσὶν ἁρμόδιαι εἰς τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ δ'.

Ἠγόρασέ τις χοίρους, αἶγας, ϗ ἀρνία ὅλα ὁμοῦ τὸν ἀριθμὸν 30 διὰ Γρόσ. 75, ἕκαστος δὲ τῶν χοίρων τιμᾶται 5 Γρόσ. τῶν δὲ αἰγῶν ἑκάστη Γρόσ. 3. τῶν δὲ ἀρνίων Γρόσ. 2. ὅθεν ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς ἑκάστου εἴδους.

$$\chi+\varphi+\psi=30. \qquad \chi=30-\varphi-\psi.$$

$$5\chi+3\varphi+2\psi=75 \qquad \chi=\frac{75-3\varphi-2\psi}{5}.$$

$$150-5\varphi-5\psi=75-3\varphi-2\psi$$

$$150-75=5\varphi-3\varphi+5\psi-2\psi$$

$$75=2\varphi+3\psi$$

$$75-3\psi=2\varphi$$

$$\varphi=\frac{75-3\psi}{2}$$

ἐὰν

ἂν μὲν ἀπὸ τῆς Μονάδος μέχρι τῶν 16 λάβωμέν τινα τούτων τῶν ἀριθμῶν ἴσον μὲ τὸ ψ, τότε ἡ Δύναμις τοῦ φ, ἔσται ἤτοι Κλασματώδης, ἢ πολλὰ μείζων διὰ νὰ λύσῃ τὸ Πρόβλημα· εἰ δὲ ληφθῇ τὸ $\psi = 17$, ἔσται $\varphi = \frac{24}{2} = 12$. καὶ $\chi = 1$. καὶ αὖθις ληφθέντος τοῦ $\psi = 18$, προκύπτει Κλάσμα. ἂν ὅμως ὑποτεθῇ $\psi = 19$, καὶ $\psi = 21$, καὶ $\psi = 23$, ἀναφύονται αἱ ἑξῆς Δυνάμεις, καὶ τέσσαρες τρόποι ἀναλύσεως τοῦ Προβλήματος.

$\psi = 17$	$\varphi = 12$	$\chi = 1$
19	9	2
21	6	3
23	3	4

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 128. Ἐνταῦθα δὲν ἀπαιτεῖται ἄλλη νεωτέρα ἀπόδειξις. ἐπειδὴ κατὰ τοὺς προαποδειχθέντας Κανόνας ζητοῦμεν τὴν Δύναμιν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου Ποσοῦ, τὴν δὲ Δύναμιν τοῦ ἑτέρου λαμβάνομεν κατὰ τὸ δοκοῦν, καὶ οὕτω ζητοῦμεν νὰ ἀποκτήσωμεν τὴν λύσιν τοῦ Προβλήματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ ζ'.

§. 129. Πλήρης, ἢ Ἐντελὴς Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις εἶναι, ἔνθα ἡ ἄγνωστος Ποσότης ὑψώνεται μόνον εἰς δευτέραν Δύναμιν, καὶ ἐπομένως πρόκειται ἓν Ἐντελὲς Τετράγωνον. ὡς $\chi^2 = \alpha\alpha$. ἀτελὲς δὲ ἐστιν, ὅταν τῶν τελείων Ὅρων (οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦνται εἰς ἓν Διμελὲς Τετρά-

Τετράγωνον, καθὼς ἐν τῷ περὶ Δυνάμεων εἴρηται) ἐλλείπῃ ὁ ἔσχατ☉, ἢ λείπῃ τὸ Τετράγωνον τοῦ δευτέρου Μέλους, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάγκη νὰ προστίθεται πρὸ τῆς λύσεως, διὰ νὰ γένῃ οὕτω τὸ Τετράγωνον Ἐντελές. ὡς $\chi\chi + \alpha\chi = \beta\beta$, ἢ $\chi\chi + 17\chi = 60$, ἢ $\chi\chi + \chi = 100$.

ΠΡΟ´ΒΛΗΜΑ ι.

§. 130. Νὰ λύωμὲν τινα Τετραγωνικὴν Ἐξίσωσιν Ἐντελῆ.

ΠΡΑΚΤΕ´Α, ἢ ΛΥ´ΣΙΣ.

α.) Θέτομεν τὰς μὲν ἀγνώστους Ποσότητας εἰς τὸ ἓν μέρ☉, τὰς δὲ Ἐγνωσμένας εἰς τὸ ἕτερον.

β. Ἐὰν εἰς τὸ Τετράγωνον τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ πρόσκειται Συνεργός τις, ἢ Διαιρέτης, ἐξαλείφομεν αὐτὸν διὰ τῆς ἐναντίας πράξεως.

γ.) Ἐὰν τὸ Τετράγωνον ὑπάρχῃ ἀποφατικὸν, ποιοῦμεν αὐτὸ Καταφατικὸν, μεταθέτοντες εἰς τὸ ἄλλο μέρ☉ τῆς Ἐξισώσεως. ἐπειδὴ εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρχῃ ἀποφατικὸν Τετράγωνον, καθὼς δεδήλωται (§. 41).

δ.) Τέλ☉ ἐξάγομεν καὶ ἐκ τῶν δύω μερῶν τὴν Τετραγωνικὴν ῥίζαν.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ. ά.

$\frac{100 - \chi\chi}{2} = 20 - 2$, διὰ τῆς Ἐξαλείψεως τοῦ Διαιρέτου γίνεται $100 - \chi\chi = 40 - 4$. διὰ δὲ τῆς Μεταθέσεως τῶν ἀγνώστων γίν. $100 - 40 + 4 = \chi\chi$, ἤτοι $60 + 4 = 64 = \chi\chi$· ϗ διὰ τῆς Ἐξαγωγῆς τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης $\chi = 8$.

ΠΑΡΑΔΕΙ'ΓΜΑ β'.

$$8_2 + 2\chi\chi = 180$$
$$2\chi\chi = 180 - 82$$
$$\chi\chi = \frac{98}{2} = 49$$
$$\chi = \sqrt{49}, \text{ ἄρα } \chi = 7.$$

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ς'.

§. 131. Νὰ λύωμεν Ἐξίσωσίν τινα Τετραγωνικὴν ἁπλῆ.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

ά.) Μεταφέρομεν τὰ μὲν ἄγνωστα Ποσὰ εἰς τὸ ἓν μέρος οὕτως, ὥστε τὸ μὲν ἀποφατικὸν Τετράγωνον τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ χ νὰ ἀποπλῇ τὸ πρῶτον Μέλος, τὸ δὲ ἕτερον ἄγνωστον Ποσὸν χ, μετὰ τοῦ ἑαυτοῦ Συνεργοῦ νὰ ἐπέχῃ τὸν τόπον τοῦ δευτέρου Μέλους. τὰ δὲ Ἐγνωσμένα

Ποσὰ

Ποσὰ θέτομεν ὅλα εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς Ἐξισώσεως.

β.) Ὁ Συνεργὸς τοῦ δευτέρου Ποσοῦ χ, διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, καὶ τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Κλάσμα Τετραγωνισθὲν, προστίθεται καὶ εἰς τὰ δύω μέρη τῆς Ἐξισώσεως.

γ.) Ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν ἐκ τοῦ πρώτου Μέλους, καὶ προσθέτομεν τὸ Ποσὸν χ, καὶ τὸν προτεθέντα Συνεργὸν μετὰ τοῦ ἑαυτοῦ παρονομαστοῦ, παραιτούμενοι τὸ διπλάσιον Γενόμενον, τὸ ἴδιον ποιοῦμεν καὶ εἰς τὸ δεύτερον Μέρος τῆς Ἐξισώσεως.

δ.) Τὴν δ' ἄλλην ῥίζαν, ἥτις ὑπόκειται εἰς τὸ ἄγνωστον Ποσὸν χ, μεταφέρομεν εἰς τὸ ἄλλο μέρος τῆς Ἐξισώσεως, καὶ οὕτω λυθήσεται τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α.

$$10\chi = 600 - \chi^2$$

$\chi^2 + 10\chi = 600$ ἡ ἄλλη ῥίζα $\frac{10}{2}$, καὶ τὸ ἐξ αὐτῆς Τετράγωνον $\frac{100}{4}$.

$$\chi^2 + 10\chi + \frac{100}{4} = 600 + \frac{100}{4}$$

$$\chi + \frac{10}{2} = \sqrt{625}$$

$$\chi = 25 - 5 = 20$$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

$\chi^2 + \frac{2}{3}\chi = \frac{1}{3}$ ἡ δὲ ἄλλη ῥίζα $\frac{2}{3} : 2 = \frac{2}{6}$

$= \frac{1}{3}$ καὶ τὸ ἐξ αὐτῆς Τετράγωνον $\frac{1}{9}$. λοιπὸν

$$\chi^2 + \frac{2}{3}\chi + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$\chi + \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$\chi = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$, ἤτοι $\chi = \frac{1}{3}$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

$\chi^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)\chi = \delta^2$. ἡ δὲ ἄλλη ῥίζα $\frac{\alpha-\beta}{2\gamma}$

$$\chi^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{\iota\gamma}\right)\chi + \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{4\gamma^2} = \delta^2$$

$$+ \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{4\gamma^2}$$

$\chi - \frac{\alpha-\beta}{2\gamma} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{4\gamma^2} + \delta^2}$ τυπῖσι

$$\chi = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{4\gamma^2} + \delta^2} + \frac{\alpha-\beta}{2\gamma}$$

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν ἁπλοῦν Τετράγωνον συνίσταται ἐκ τοῦ Τετραγώνου τῆς πρώτης ῥίζης, ϗ ἐκ τοῦ διπλασίου Γινομένου τῶν ῥιζῶν, αἵτινες πολλαπλασιάζονται μετ' ἀλλήλων. διὰ νὰ γένῃ λοιπὸν ἓν Ἐντελὲς Τετράγωνον πρέπει νὰ προστεθῇ ϗ ἡ δευτέρα ῥίζα. ἐπειδὴ ἐν τῷ διπλασίῳ Γινομένῳ, τουτέστιν ἐν τῷ χ μετὰ τοῦ ἑαυτοῦ Συνεργοῦ ὄντι ἐμπεριέχονται δύω ῥίζαι, ϗ ἐπειδὴ τῆς μιᾶς ῥίζης Παράγων εἶναι τὸ χ, διὰ τοῦτο ϗ τῆς ἑτέρας πρέπει νὰ εἶναι Παράγων ὁ ἴδιος Συνεργός. ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ Γινόμενον εἶναι τὸ διπλάσιον, διὰ τοῦτο λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ Συνεργοῦ (ἢ ἄλλως, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ 2), ϗ τοῦτο Τετραγωνίσαντες, ἀποκτῶμεν τὸ ἐλλεῖπον, ϗ τούτου προστεθέντος, ἔσται ἡ Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις Ἐντελής. ἀλλὰ διὰ νὰ φυλαχθῇ ἡ Ἐξίσωσις ἀκριβῶς, ϗ νὰ μὴ λυμανθῇ, ϗ κολοβωθῇ, πρέπει τοῦτο τὸ εὑρεθὲν Ἐλλεῖπον νὰ προστεθῇ ϗ εἰς τὰ δύω μέρη τῆς Ἐξισώσεως. Ὅταν δὲ δύω Τετράγωνα εἶναι ἴσα ἀλλήλοις, πρέπει ϗ ἐξαχθεῖσαι ῥίζαι νὰ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. διότι ἐπειδὴ τὰ Τετράγωνα συνίστανται διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτόν, διὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον νὰ εἶναι αἱ ῥίζαι μεταξύ των Διάφοροι, ὅταν τὰ Τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις ὑπάρχωσι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γ'.

Τὸ μὲν Συμποσούμενον δύω ἀριθμῶν εἶναι 17, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον εἶναι = 60, ποῖον ἄρα εἰσὶν οὗτοι οἱ δύω ἀριθμοί;

τὸ Συμπεσόμενον $\chi+\varphi=17$. $\chi=17-\varphi$

τὸ Γενόμενον $\chi\varphi=60$. $\chi=\frac{60}{\varphi}$

$$17-\varphi=\frac{60}{\varphi}$$

$$17\varphi-\varphi^2=60$$

$-60=\varphi^2-17\varphi$ ἡ δευτέρα ῥίζα $\frac{17}{2}$ τὸ δὲ Τετράγωνον $\frac{289}{4}$

$$\frac{289}{4}-60=\varphi^2-17\varphi+\frac{289}{4} \text{ ἤγουν}$$

$$\frac{289}{4}-\frac{240}{4}=\varphi^2-17\varphi+\frac{289}{4}$$

$$\frac{49}{4}=\varphi^2-17\varphi+\frac{289}{4}$$

$$\frac{7}{2}=\varphi-\frac{17}{2}$$

$\frac{17}{2}+\frac{7}{2}$ ἤτοι $\varphi=12$. καὶ τὸ χ ἄρα $=5$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 232. Ἐπειδὴ τὸ διπλάσιον Γενόμενον 17φ εἶναι ἀποφατικὸν, διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη καὶ θάτερον τῶν Παραγόντων, ἢ τὸ $\frac{17}{2}$, ἢ τὸ φ νὰ εἶναι ἀποφατικόν. καθὼς εἰς τὴν λύσιν ἡ μὲν Δύναμις τοῦ φ εἶναι Καταφατικὴ, ἡ δὲ τοῦ $\frac{17}{2}$ ἀποφατική. ἂν ὅμως ὑποτεθῇ τὸ φ ἀποφατικὸν, καὶ τὸ $\frac{17}{2}$. Καταφατικὸν, ἔσται ἡ Ἐξίσωσις $\frac{7}{2}=\frac{17}{2}-\varphi$.

$-\phi$, ϐ διὰ τῆς μεταθέσεως $\phi = \frac{17}{2} - \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5$. τὸ ϕ ἄρα $= 5$, τὸ $\chi = 12$. ἐντεῦθεν γίνεται φανερὸν, ὅτι τῦτο τὸ Πρόβλημα, ἢ ϗ ἐν γένει κάθε Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις δύναται νὰ λυθῇ διττῶς. ἐπειδὴ ἑνὸς μονομερῦς Τετραγώνυ ἔςαι ἡ ῥίζα ἤτοι Καταφατικὴ, ἢ ἀποφατικὴ. ἔπειτα τῆς ῥίζης ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθείσης, συνίςαται Τετράγωνον πάντοτε Καταφατικόν. ὅθεν ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^2 = \alpha$ τὸ ἴδιον ὑπάρχει νὰ εἶναι ἡ ῥίζα $+\chi$, ἢ $-\chi$. εἰς ἓν δὲ διμελὲς Ποσὸν, ἐὰν τὸ διπλάσιον Γενόμενον εἶναι Καταφατικὸν, αἱ ῥίζαι ἔσονται ἤτοι Καταφατικαὶ, ἢ ἀποφατικαί. ἐὰν δὲ τῦτο τὸ Γενόμενον εἶναι ἀποφατικὸν, ἐξ ἀνάγκης ἕπεται τότε ἢ ἡ μία, ἢ ἡ ἄλλη ῥίζα νὰ εἶναι ἀποφατική. ἀλλ' εἴτε κατ' ἐκείνην τὴν αὔξησιν, εἴτε κατὰ ταύτην εἶναι τὰ προτιθέμενα, τὸ Πρόβλημα πάντοτε λύεται ϗ κατὰ τὰς δύω τρόπυς ὀρθῶς. μ' ὅλον ὁπῦ ἐνίοτε ἕνα μόνον τρόπον δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ί.

Νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, τῦ ὁποίυ τὸ Τετραπλάσιον ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῦ Τετραγώνυ τῦ ἰδίυ ἀριθμῦ, ἐγκαταλείπεται ὁ 21 ἀριθμός.

$\chi^2 - 4\chi = 21$ ἡ δευτέρα ῥίζα $\frac{4}{2} = 4$, ὅθεν

$\chi^2 - 4\chi + 4 = 21 + 4$, $\chi^2 - 4\chi + 4 = 25$

$\chi - 2 = 5$ ἢ $2 - \chi = 5$

$\chi = 7$ $2 - 5 = \chi$, ϗ $-3 = \chi$

λοιπὸν $\chi = 7$, ϗ $\chi = -3$ εἶναι δύω Δυνάμεις ἀρκῦσαι πρὸς τὴν Ὑπόθεσιν, ὅθεν ἂν λάβωμεν τὴν πρώτην Δύναμιν ἀντὶ τῦ χ, ἔςαι τὸ Τετράγωνον 49, τὸ δὲ Τετραπλάσιον 28. ϗ τύτυ ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῦ 49 Τετραγώνυ, ἐναπολείπεται 21, οἷον $49 - 28 = 21$. ἂν ὅμως λάβωμεν τὴν δευτέραν Δύναμιν ἀντὶ τῦ χ, ἔσται τὸ Τετράγωνον τῦ $-3=9$. τὸ δὲ Τετραπλάσιον $-3\times 4=-12$, τὸ ὁποῖον ἀφαιρύμενον ἀπὸ τῦ Τετραγώνυ, πρέπει νὰ γένῃ Καταφατικὸν $+12$, ὅθεν $9+12=21$.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ ϛ΄.

Ε῎στω τὸ ἄθροισμα δύω ἀριθμῶν $=10$. ἡ δὲ Διαφορὰ τῶν Τετραγώνων $=40$, ποῖοι ἄρα εἰσὶν ὗτοι οἱ δύω ἀριθμοί;

$$\chi+\varphi=10,\ \chi=10-\varphi,\ \text{ϗ}\ \chi^2=100-20\varphi+\varphi^2$$

$$\chi^2-\varphi^2=40,\ \chi^2=40+\varphi^2$$

$$100-20\varphi+\varphi^2=40+\varphi^2$$

$$100-40=20\varphi+\varphi^2-\varphi^2$$

$$60=20\varphi$$

$$3=\varphi \qquad \chi=7$$

$$7+3=10 \qquad 49-9=40$$

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ ζ.

Νὰ εὕρωμεν δύω ἀριθμὺς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα δίδοται $=10$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν Τετραγώνων $=58$,

$$\chi+\varphi=10,\ \chi=10-\varphi,\quad \chi^2=100-20\varphi+\varphi^2$$

$$\chi^2+\varphi^2=58 \qquad \chi^2=58-\varphi^2$$

$$100-20\varphi+\varphi^2=58-\varphi^2$$

$$2\varphi^2-20\varphi=58-100$$

$$\varphi^2-\frac{20\varphi}{2}=\frac{58-100}{2},\ \text{ἡ δευτέρα ῥίζα}\ \frac{20}{4}=5$$

$$\varphi^2-10\varphi+25=25-21$$

$$\varphi-5=\sqrt{4},\ \text{ἢ}\ 5-\varphi=\sqrt{4}$$

$$\varphi-5=2 \qquad 5=2+\varphi$$

$$\varphi=7 \qquad 3=\varphi$$

$$\chi=3 \qquad 7=\chi$$

$$7+3=10 \qquad 49+9=58.$$

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 133. Ὅσον ἔτι προσήκει νὰ ὁμιλήσωμεν περὶ τῆς Ἐξισώσεως τῶν ἄλλων Δυνάμεων, παραπεμφθήσεται εἰς τὴν ὑψηλοτέραν Μαθηματικήν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ ζ'.

Περὶ λόγων.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 134. Λόγος ὀνομάζεται ἡ Παράθεσις, ἢ ἡ Σχέσις, τὴν ὁποίαν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα δύω Ὁμοειδῆ Ποσά. οὗτος δὲ ὁ λόγος θεωρεῖται διττῶς, τουτέστιν ἢ εἶναι ὁ λόγος ἀριθμητικός, ἢ Γεωμετρικός· καὶ ἀριθμητικὸς λόγος καλεῖται, ὅταν παρεξετάζωμεν τὴν Διαφορὰν μεταξὺ δύω Ποσῶν, ἥτις διὰ τῆς ἀφαιρέσεως λείπεται· π. χ. παραβάλλοντες μίαν Στήλην τριῶν Ποδῶν πρὸς ἄλλην τινὰ Ποδῶν δώδεκα, θεωροῦμεν, ὅτι ἡ μία Στήλη εἶναι μείζων τῆς ἄλλης 9 Πόδας, καὶ ἐπομένως ἡ μεταξὺ τῶν δύω Στηλῶν Διαφορὰ εἶναι 9 Πόδες, καὶ αἱ Στῆλαι τότε εἶναι ἐν ἀριθμητικῷ λόγῳ, τὸν ὁποῖον καὶ διὰ τοῦ τῆς ἀφαιρέσεως Σημείου ἐμφαίνομεν, παρενθέντες τὸ σημεῖον μεταξὺ τῶν παραβαλλομένων Ποσοτήτων. οἷον 3—12, ἢ οὕτως α . β. Γεωμετρικὸς δὲ λόγος ὀνομάζεται, ὅταν παρεξετάζωμεν, ποσάκις μία Ποσότης ἐμπεριέχεται εἰς τινα ἄλλην, τὸ ὁποῖον καὶ διὰ τῆς Διαιρέσεως ἀνακαλύπτεται. π. χ. παραβάλλοντες πρὸς ἀλλήλας τὰς ἀνωτέρω δύω Στήλας, θεωροῦμεν, ὅτι ἡ μία ἐμπεριέχεται εἰς τὴν ἄλλην τετράκις, καὶ αἱ Στῆλαι τότε εἰσὶν ἐν Γεωμετρικῷ λόγῳ, τὸν ὁποῖον καὶ διὰ τῶν τῆς Διαιρέσεως Συμβόλων παρασταίνομεν, ὡς 3 : 12, ἢ $\frac{3}{12}$, καὶ ἐν γένει α : β, ἢ $\frac{α}{β}$, ὅλα δὲ ταῦτα τὰ Σύμβολα ἐκφωνοῦνται οὕτω „ 3 πρὸς 12.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 135. Ἐφ' ἑκάστου τῶν λόγων θεωροῦνται τρία τινὰ, πρῶτον, τὸ Παραβαλλόμενον Ποσὸν, δεύτερον, τὸ ἄλλο Ποσὸν, πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ πρῶτον παραβάλλεται, τρίτον, ἡ ἐν ἀριθμητικῷ λόγῳ θεωρουμένη Διαφορὰ, ἢ τὸ ἐν Γεωμετρικῷ λόγῳ Πηλίκον. ταῦτα οὕτως ἀλλήλοις συνακολουθοῦσιν, ὥστε ὅταν δοθῶσι τὰ δύω, τὸ τρίτον εὐκόλως εὑρίσκεται. ἔστω τὸ μὲν μεῖζον α, τὸ δὲ ἔλαττον β, ἡ δὲ τούτων Διαφορὰ δ. ὅθεν τὸ μὲν μεῖζον ἔσται $α = β + δ$, τὸ

δὲ

δὲ ἔλαττον $β = α - δ$, καὶ ἡ Διαφορὰ $δ = α - β$. ἂς διορισθῇ δὲ $α = 10$. $β = 6$. $δ = 4$. ὅθεν ἔσαι $10 = 6 + 4$, καὶ $6 = 10 - 4$, καὶ $4 = 10 - 6$. πρὸς τούτοις ἐν τῇ τῶν λόγων Παραθέσει, εἴτε τὸ προτιθέμενον Ποσὸν, εἴτε τὸ ἐπιτιθέμενον μεῖζόν ἐσιν, οὐδὲν κωλύει. ἐπειδὴ ἡ $2 - 6$, ἢ $6 - 3$, ἡ Διαφορὰ εἶναι ὁ 4. καθὼς καὶ ἐν Γεωμετρικῷ τινι λόγῳ, ἤτοι $3 : 12$, ἢ $12 : 3$, τὸ Πηλίκον εἶναι 4. Ὅταν μὲν τὸ πρῶτον Μέλος εἶναι ἔλαττον τοῦ δευτέρου, τότε ὁ λόγος καλεῖται αὔξων. ὅταν δὲ μεῖζον τοῦ δευτέρου τυγχάνῃ, τότε ὀνομάζεται ὁ λόγος Μειούμενος, ἢ Ἐλαττούμενος, ἢ φθίνων.

ὉΡΙΣΜΌΣ β.

§. 136. Τὰ παραβαλλόμενα Ποσὰ ὀνομάζονται Ὅροι τοῦ λόγου, τῶν ὁποίων ὁ μὲν προτιθέμενος καλεῖται Ἡγούμενος, ἢ Πρῶτος Ὅρος, ὁ δὲ ἐπιτιθέμενος λέγεται Ἑπόμενος, ἢ Δεύτερος Ὅρος. ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅσις ἐν τῷ ἀριθμητικῷ λόγῳ παρασαίνει τὴν μεταξὺ τῶν δύω Ποσοτήτων Διαφορὰν, ὀνομάζεται Διαφορὰ, τὸ δὲ ἐπὶ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου διὰ τῆς Διαιρέσεως τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου προκύπτον καλεῖται Πηλίκον, ἢ Ἐκθέτης τοῦ λόγου.

ΠΌΡΙΣΜΑ α.

§. 137. Ἐπειδὴ ἕκασον Γεωμετρικὸν λόγον ἀποκτῶμεν διὰ τῆς Διαιρέσεως. ἕκασον δὲ Κλάσμα εἶναι μία Διαίρεσις. ἄρα καὶ ἕκασον Κλάσμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς Γεωμετρικός τις λόγος.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 138. Ἐκ τῶν εἰρημένων ὡσαύτως ἀκολουθεῖ, ὅτι ἐπὶ μὲν ἀριθμητικοῦ λόγου οἱ Ὅροι μόνον διὰ τῆς Διαφορᾶς διακρίνονται, ἐπὶ δὲ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου μόνον διὰ τοῦ Πηλίκου. διὰ τοῦτο καὶ τὸν μείζονα Ὅρον ἀποκτῶμεν, ὅταν ἐν μὲν τῷ ἀριθμητικῷ λόγῳ τὴν Διαφορὰν μετὰ τοῦ Ἐλάττονος Ὅρου συνάπτωμεν, ἐν δὲ τῷ Γεωμετρικῷ τὸν ἐλάττονα Ὅρον μετὰ τοῦ Πηλίκου πολλαπλασιάζωμεν· ἐὰν ὑποτεθῇ ὁ Ἡγούμενος Ὅρος 2, ἡ δὲ Διαφορὰ 3, ἔσται τότε ὁ Ἑπόμενος $2 + 3 = 5$. καὶ πάλιν ἐὰν ὑποτεθῇ ὁ Ἡγούμενος 2, τὸ δὲ Πηλίκον 3, ἔσται τότε ὁ Ἑπόμενος Ὅρος $2 \times 3 = 6$. ὅθεν γενικῶς ὁ Ἑπόμενος Ὅρος ἐπὶ μὲν ἀριθμητικοῦ λόγου, οὐδὲν ἄλλο ἐστίν, εἰ μὴ αὐτὸς ὁ Ἡγούμενος μετὰ τῆς Διαφορᾶς. ἐπὶ δὲ Γεωμετρικοῦ λόγου εἶναι αὐτὸς ὁ Ἡγούμενος Ὅρος πεπολλαπλασιασμένος μετὰ τοῦ Πηλίκου.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ'.

§. 139. Ὅθεν ὅταν θελήσωμεν νὰ ἀποκτήσωμεν γενικῶς μίαν Ἀλγεβραϊκὴν Ἔκθεσιν ἀριθμητικοῦ λόγου, καὶ νὰ ὀνομάσωμεν τὸν μὲν Πρῶτον Ὅρον α, τὴν δὲ Διαφορὰν δ, ἔσται τότε ὁ δεύτερος Ὅρος $\alpha + \delta$. ἂν δὲ ὁ Πρῶτος Ὅρος ὑποτεθῇ β, ἔσται τότε καὶ ὁ Δεύτερος $\beta + \delta$, καὶ οὕτω καθεξῆς. καθὼς καὶ ἐπὶ Γεωμετρικοῦ λόγου ἂν ὀνομασθῇ ὁ Πρῶτος Ὅρος α, τὸ δὲ Πηλίκον Π, ἔσται ὁ Δεύτερος Ὅρος $\alpha\pi$. εἰ δὲ ὀνομασθῇ ὁ Πρῶτος β, ἔσται ὁ Δεύτερος $\beta\pi$. καὶ οὕτω καθεξῆς. ὁ γενικὸς λοιπὸν Τύπος (Ἔκθεσις) τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου εἶναι $\alpha \,.\, \alpha + \delta$, ἢ $\beta \,.\, \beta + \delta$, ἢ $\gamma \,.\, \gamma + \delta$. τοῦ δὲ Γεωμετρικοῦ λόγου οὗτος $\alpha : \alpha\pi$, ἢ $\beta : \beta\pi$, ἢ $\gamma : \gamma\pi$. καὶ ἐν γένει δυνάμεθα ἀντὶ τοῦ Δευτέρου Ὅρου νὰ μεταχειριζώμεθα τὸν Πρῶτον Ὅρον μετὰ τῆς Διαφορᾶς $+ \delta$, ἢ μετὰ τοῦ Πηλίκου $\times \pi$. τὸ ὁποῖον καὶ ἐκφράζεται διὰ τῶν ἑξῆς δύο Θεωρημάτων.

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ ά.

§. 140. Ἐπὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου τὸ ἐκ τοῦ ἐλάσσονος Ὅρου καὶ τῆς Διαφορᾶς Συμποσούμενον, τουτέστι τὸ τούτων Κεφάλαιον εἶναι Ἴσον μὲ τὸν μείζονα Ὅρον.

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ β'.

§. 141. Ἐπὶ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου τὸ Γινόμενον ἐκ τοῦ Ἐλάττονος Ὅρου καὶ τοῦ Πηλίκου Ἴσον ἐστὶ μὲ τὸν μείζονα Ὅρον.

Ἡ Δεῖξις τούτων τῶν Θεωρημάτων ἀναφύεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω Πορισμάτων.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 142. Ἂν τύχῃ νὰ εἶναι ὁ Πρῶτος Ὅρος μείζων, τότε ἐπὶ μὲν τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου ὁ Δεύτερος Ὅρος εἶναι αὐτὸς ὁ Πρῶτος $-\delta$, καὶ ὁ λόγος ἔσται $\alpha \,.\, \alpha - \delta$. ἐπὶ δὲ Γεωμετρικοῦ λόγου ὁ Δεύτερος Ὅρος εἶναι αὐτὸς ὁ Πρῶτος διῃρημένος διὰ τοῦ Πηλίκου, καὶ ὁ Τύπος ἔσται $\alpha : \frac{\alpha}{\pi}$.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ γ'.

§. 143. Ἴσοι λόγοι εἰσὶν ἐκεῖνοι, οἵτινες ἔχουσι τὴν αὐτὴν Διαφορὰν, ἢ τὸ αὐτὸ Πηλίκον

κον π. χ. 7—3, καὶ 9—5 εἰσὶν Ἴσοι λόγοι. ἐπειδὴ καὶ εἰς τοὺς δύω τούτους λόγους ἡ Διαφορὰ εἶναι ὁ 4. καὶ ἑπομένως ὁ 7 ἔχει πρὸς τὸν 3 τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ 9 πρὸς τὸν, 5. α. α+δ, καὶ β. β+δ εἰσὶν Ἴσοι λόγοι. ὡσαύτως καὶ 3 : 15, καὶ 2 : 10 εἰσὶν Ἴσοι λόγοι. ἐπειδὴ ἔχουσι τὸ αὐτὸ Πηλίκον 5. καὶ ὁ 3 ἔχει πρὸς τὸν 15 τὸν Ἴδιον λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ 2 πρὸς τὸν 10. α : απ, καὶ β : βπ, εἰσὶν Ἴσοι λόγοι. ἄνισοι δὲ λόγοι εἰσὶν, ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουσι τὴν αὐτὴν Διαφορὰν, μήτε τὸ αὐτὸ Πηλίκον.

ΟΡΙΣΜΟΣ δ'.

144. Ὅταν εἰς δύω Ἴσους λόγους οἱ Ἡγούμενοι Ὅροι εἶναι μείζονες, ἢ ἐλάττονες τῶν Ἑπομένων, τουτέστιν, ὅταν ὁ ἐν τῷ πρώτῳ λόγῳ Ἡγούμενος Ὅρος ἔχῃ πρὸς τὸν Ἴδιον Ἑπόμενον τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ ἐν τῷ δευτέρῳ λόγῳ Ἡγούμενος πρὸς τὸν Ἑπόμενον, ἢ ὅταν εἶναι καὶ οἱ δύω λόγοι αὔξοντες, ἢ Μειούμενοι, οἱ λόγοι τότε καλοῦνται Ὀρθοὶ, ἢ Εὐθεῖς. οἷον 7—3, καὶ 9—5 εἰσὶν ἐν Ὀρθῷ

λόγῳ,

λόγῳ. καθὼς ϗ $3 : 15$, ϗ $2 : 10$. ὅταν δὲ ὁ ἐπὶ τȣ̃ πρώτȣ λόγȣ Ἡγȣ́μενος τυγχάνῃ μείζων τȣ̃ Ἰδίȣ Ἑπομένȣ, ὁ δὲ τȣ̃ δευτέρȣ λόγȣ Ἡγȣ́μενος Ὅρος εἶναι ἐλάττων τȣ̃ Ἰδίȣ Ἑπομένȣ, ἢ ἀνάπαλιν ὁ πρῶτος ἐλάττων, ϗ ὁ Δεύτερος μείζων. τȣτέστιν ὅταν ὁ τȣ̃ πρώτȣ λόγȣ Ἡγȣ́μενος Ὅρος πρὸς τὸν Ἴδιον Ἑπόμενον ἔχῃ λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ τȣ̃ δευτέρȣ λόγȣ Ἑπόμενος Ὅρος πρὸς τὸν Ἡγȣ́μενον, ἢ ὁ μὲν ἕνας λόγος τυγχάνῃ αὔξων, ὁ δὲ ἕτερος Ἐλαττȣ́μενος, οἱ λόγοι τότε ὀνομάζονται ἀντίστροφοι, οἷον $7 - 3$, ϗ $5 - 9$. $\alpha . \alpha + \delta$, ϗ $\beta + \delta . \beta$ εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντιστρόφῳ καθὼς ϗ $3 : 15$, ϗ $10 : 2$. $\alpha : \alpha\pi$, ϗ $\beta\pi : \beta$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 145. Δυνάμεθα ὡστόσον νὰ μεταβάλωμεν κάθε ἀντίστροφον λόγον εἰς Ὀρθὸν, μετατεθέντες τȣ̀ς Ὅρȣς τȣ̃ ἑνὸς, ἢ τȣ̃ ἄλλȣ λόγȣ, διὰ νὰ ἔλθωσιν ὅπȣ οἱ μεταφερθέντες Ὅροι εἰς τὴν αὐτὴν τάξιν, ὁπȣ̃ ἔχȣσιν οἱ ἄλλοι Ὅροι. ϗ τότε ἔσονται ϗ οἱ δύω λόγοι ἤτοι αὔξοντες, ἢ Ἐλαττȣ́μενοι.

ὉΡΙΣΜΌΣ ι.

§. 146. Λόγος Ἰσότητος ὀνομάζεται, ὅτε ὁ Πρῶτος ϗ Δεύτερος Ὅρος συνίσταται ἐξ Ἴσων ϗ τῶν αὐτῶν Ποσοτήτων, ὡς 6 = 6 . α : α. Διπλάσιος δὲ Γεωμετρικὸς λόγος λέγεται, ὅταν ὁ δεύτερος Ὅρος ἐμπεριέχηται δὶς ἐν τῷ πρώτῳ Ὅρῳ, ἢ Ὅταν τὸ Πηλίκον τυγχάνῃ ὁ 2, ὡς 6 : 3, ϗ 10 : 5 . 8 : 4, ϗ 20 : 10. Τριπλάσιος δὲ λόγος ἐστὶν, ὅταν ὁ δεύτερος Ὅρος ἐμπεριέχηται τρὶς εἰς τὸν πρῶτον Ὅρον ὡς 6 : 2, ϗ 12 : 4. Τετραπλάσιος δὲ λόγος καλεῖται, ὅτε αὖθις ὁ δεύτερος τετράκις ἐμπεριέχεται ἐν τῷ πρώτῳ, ὡς 20 : 5, ϗ 8 : 2 . ϗ οὕτω καθεξῆς.

ὉΡΙΣΜῸΣ ϛ.

§. 147. Ἐὰν οἱ Ὅροι δύω, ἢ πλειόνων Γεωμετρικῶν λόγων μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσιν, τουτέστιν οἱ Ἡγούμενοι μετὰ τῶν Ἡγουμένων, ϗ οἱ Ἑπόμενοι μετὰ τῶν Ἑπομένων, τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον ὀνομάζεται λόγος Σύνθετος. οἱ δὲ ἁπλοῖ λόγοι λέγονται Συντιθέντες, ἢ Συνθετικοὶ λόγοι. οὕτως ἐκ τῶν λόγων 2 : 9, ϗ 4 : 7 γίνεται Σύνθετος λόγος 8 : 63, ϗ ἐκ τῶν 3 : 6 : ϗ 4 : 16. προκύπτει Σύνθετος λόγος 12 : 96. τὸ δὲ Πηλίκον (ὁ Ἐκθέτης) ἑνὸς Συνθέτου λόγου

εἶναι