τὰ δὲ Μίλλια τοῦ Πρώτου $= \beta$, τὰ δὲ τοῦ Δευτέρου $= \gamma$ καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $= \chi$, ἔσαι

$$\beta\chi + \gamma\chi = \alpha$$
$$(\beta + \gamma)\,\chi = \alpha$$
$$\chi = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \quad . \; . \; . \quad \text{Τύπος τρίτος.}$$

Ὅθεν ἐνταῦθα πηγάζει τοιοῦτος Κανὼν „ ὅτι ἂν διαιρεθῇ τὸ διδόμενον διάστημα διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν Μιλλίων τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου, τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Πηλίκον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 118. Νὰ λύωμεν Ἐξίσωσιν δύω ἀγνώστων Ποσοτήτων.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

α'.) Ζητοῦμεν καὶ ἐν ταῖς δυσὶν Ἐξισώσεσι τὴν Δύναμιν μόνον ἑνὸς καὶ τοῦ ἰδίου ἀγνώστου Ποσοῦ διὰ τῆς μεταθέσεως.

β'.) Παραβάλλομεν τὰς δύω ταύτας Δυνάμεις πρὸς ἀλλήλας, καὶ κατὰ τοὺς ἀνωτέρω Κανόνας ζητοῦμεν τὴν Δύναμιν τοῦ ἑτέρου λοιποῦ ἀγνώστου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. α'.

Νὰ εὕρωμεν δύω ἀριθμοὺς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἐστὶν $= 100$, ἡ δὲ τούτων Διαφορὰ $= 30$.
ἔσω τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν ὁ μὲν χ, ὁ δὲ φ.
κατὰ τὴν πρώτην Συνθήκην $\chi + \varphi = 100$

κατὰ

κατὰ τὴν δευτέραν Συνθήκην $\chi - \varphi = 30$

λοιπὸν ἐκ τοῦ πρώτου γίνεται $\chi = 100 - \varphi$

$$\chi = 30 + \varphi$$

ἐκ τοῦ δευτέρου $100 - \varphi = 30 + \varphi$

$$100 - 30 = \varphi + \varphi$$

$$100 - 30 = 2\varphi$$

$$\frac{70}{2} = \varphi$$

ἄρα $\varphi = 35$. ϗ ἐπειδὴ $\chi = 100 - \varphi$ ἐστὶν, ἄρα $\chi = 65$, ϗ $65 + 35 = 100$, ϗ $65 - 35 = 30$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ὑποτίθεται, ὅτι τὸ Πρόβλημα προσδιωρισμένον ἐστὶ, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι ϗ δύω Ἐξισώσεις, ἢ Συνθῆκαι (§. 106.) διαφορετικαί. ὅθεν ζητοῦντες ϗ εἰς τὰς δύω Ἐξισώσεις τὴν Δύναμιν τοῦ Ποσοῦ χ, ἀποκτῶμεν δύω Δυνάμεις, αἵτινες εἰσὶ μὲν διαφόρως ἐκτεθέμεναι, εἰσὶν ὅμως Ἴσαι τῷ ἰδίῳ Ποσῷ χ. ϗ ἐπειδὴ δύω πράγματα, τὰ ὁποῖα εἰσιν Ἴσα ἑτέρῳ τινὶ, εἰσὶ ϗ ἀλλήλοις Ἴσα, ἄρα ϗ αἱ δύω Δυνάμεις αὗται αἱ διαφόρως ἐκτεθέμεναι, εἰσιν Ἴσαι ἀλλήλαις. ὅθεν δυνάμεθα διὰ τούτων τῶν δύω Δυνάμεων νὰ σχηματίσωμεν μίαν ἄλλην Ἐξίσωσιν, ἀφ᾽ οὗ τοιούτῳ τρόπῳ ἀποβληθῇ ἡ ἄλλη ἄγνωστος Ποσότης. ἔπειτα τὴν εὑρεθεῖσαν Δύναμιν τοῦ φ, θέτομεν εἰς τὴν πρώτην Ἐξίσωσιν εἰς τὸν τόπον τοῦ φ, ϗ οὕτως ἀποκτῶμεν τὴν Δύναμιν τοῦ Μεγέθους χ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 119. Ἂν ἀναλύσωμεν διὰ τῶν Γραμμάτων τὸ ἀνωτέρω Πρόβλημα, ἀποκτῶμεν πάλιν ἕνα Κοινὸν Τύπον, ἢ Ἔκθεσιν, διὰ νὰ

εὑρίαεὑρίσκωμεν δύω ἀριθμοὺς, τῶν ὁποίων τὸ Κεφάλαιον καὶ ἡ Διαφορὰ εἶναι διδόμενα. ἂν οὖν ληφθῇ τὸ Κεφάλαιον $= \kappa$ ἡ δὲ Διαφορὰ $= \delta$, ἀποκτῶμεν τὰ ἑξῆς.

$$\chi + \phi = \kappa$$
$$\chi - \phi = \delta$$

$$\chi = \kappa - \phi$$
$$\chi = \delta + \phi$$

$$\kappa - \phi = \delta + \phi$$
$$\kappa - \delta = 2\phi$$
$$\frac{\kappa - \delta}{2} = \phi, \text{ ἢ } \frac{1}{2}\kappa - \frac{1}{2}\delta = \phi$$

ἂν ζητῆται τὸ Ποσὸν χ γίνεται οὕτως

$$\phi = \kappa - \chi$$
$$\chi - \delta = \phi$$

$$\kappa - \chi = \chi - \delta$$
$$\kappa + \delta = 2\chi$$
$$\frac{\kappa + \delta}{2} = \chi, \text{ ἢ } \frac{1}{2}\kappa + \frac{1}{2}\delta = \chi$$

λοιπὸν ἂν προσθέσωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ Κεφαλαίου εἰς τὸ ἥμισυ τῆς Διαφορᾶς, ἀποκτῶμεν τὸν μείζονα ἀριθμόν. ἂν δὲ ἀφέλωμεν τὸ ἥμισυ τῆς Διαφορᾶς ἐκ τοῦ ἡμίσεως Κεφαλαίου, ἀποκτῶμεν τὸν ἐλάσσονα ἀριθμόν. εἰς τὸ προτεθὲν Παράδειγμα τὸ ἥμισυ τοῦ Κεφαλαίου ἐστὶ $= 50$. καὶ ἡ ἡμιδιαφορὰ $= 15$. ὅθεν $50 + 15 = 65$. καὶ $50 - 15 = 35$, ἡ ἀλήθεια αὕτη ἐκθέτεται ἐν τῷ ἀκολούθῳ Θεωρήματι.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ ἡμιδιαφορὰ συναπτομένη μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ Κεφαλαίου, παρέχει τὸν μείζονα ἀριθμόν. ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ αὕτη ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ Κε-

φαλαίου,

φαλαίε, προκύπτει ὁ ἐλάχιστων ἀριθμὸς, ἢ Ποσόν.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ ά.

§. 120. Ταῦτα τὰ Προβλήματα δύνανται νὰ λυθῶσι ϗ᾽ ὅτω, δηλαδὴ τὴν ἐν τῇ πρώτῃ Ἐξισώσει ἑυρεθεῖσαν Δύναμιν τȣ Ποσȣ χ, θέτομεν παρευθὺς εἰς τὴν δευτέραν Ἐξίσωσιν εἰς τὸν τόπον τȣ χ. ϗ ἐυρίζομεν κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ Ποσὸν χ. οἷον ἐν τῷ προειρημένῳ τεθέντι Προβλήματι ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως ἐςὶν $\chi = 100 - \varphi$. ὅθεν ἐν τῇ δευτέρᾳ Ἐξισώσει $\chi - \varphi = 30$ εἰς τὸν τόπον τȣ χ γράφομεν τὴν ἐν τῇ πρώτῃ Ἐξισώσει ἑυρεθεῖσαν Δύναμιν $100 - \varphi$, ϗ ἡ Ἐξίσωσις ἔςαι $100 - \varphi - \varphi = 30$, ἤτοι $100 - 30 = 2\varphi$. ὡς ἀνωτέρω δέδεικται.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 121. Ἀφ᾽ ȣ̃ σχηματίζωμεν ὀρθῶς δύω Ἐξισώσεις διὰ τῆς προτεθείσης Συνθήκης, δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν ἐκ τȣ μέσȣ ἐν ὁποιονδήποτε τῶν δύω ἀγνώςων Ποσῶν, ἀφαιρȣ̃ντες τὸ ἓν ἐκ τȣ ἑτέρȣ, ὥςε διὰ τῶν ἐναντίως τιθεμένων Σημείων νὰ γένῃ ἄφαντος ἡ ἄγνωςος Ποσότης. ὅτως εἰσὶν ἐν τῷ πρώτῳ Παραδείγματι (§. 118) αὗται αἱ δύω Ἐξισώσεις.

$$\chi + \varphi = 100$$

$$\chi - \varphi = 30$$ ἀφαιρεθείσης ἐν ταύτης ἐκ τῆς ἀνωτέρω μένει $2\varphi = 70$.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

Πέτρος τις ϗ Παῦλος ἐκέρδησαν παίζοντες, τόσα φέρ᾽ εἰπεῖν, Γρόσια, ὥστε ἂν ὁ Πέτρος δώσῃ εἰς τὸν Παῦλον ἓν τȣ ἑαυτȣ Κέρδȣς, ἔχȣσι τότε ϗ οἱ δύω Ἴσον Κέρδος. ἂν ὅμως δώσῃ ὁ Παῦλος πρὸς τὸν Πέτρον ἓν

ἀπὸ

ἀπὸ τὸ ἐδικόν του Κέρδος, τότε ὁ Πέτρος θέλει ἔχῃ Κέρδος διπλάσιον τοῦ Παύλου. ζητεῖται λοιπὸν πόσα ἐκέρδησεν ἑκάτερος τούτων.

ἔςω τὸ τοῦ Πέτρου Κέρδος $= \chi$

τὸ δὲ τοῦ Παύλου . $= \varphi$

ὅθεν κατὰ μὲν τὴν πρώτην Συνθήκην $\chi - 1 = \varphi + 1$

κατὰ δὲ τὴν δευτέραν . . . . $\chi + 1 = (\varphi - 1)^2$

ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσ. ἔσται $\chi = \varphi + 1 + 1$ \
ἐκ δὲ τῆς δευτέρας . $\chi = 2\varphi - 2 - 1$ } ἐντεῦθεν γίνεται $\varphi + 2 = 2\varphi - 3$

ἤτοι $2 + 3 = 2\varphi - \varphi$

ἤτοι $5 = \varphi$

καὶ ἐπειδὴ τὸ $\chi = \varphi + 2$ ὑπάρχει, ἔσται ἄρα $\chi = 5 + 2 = 7$. διότι ἂν ὁ πρῶτος δώσῃ εἰς τὸν δεύτερον ἕν, θέλουσιν ἔχῃ καὶ οἱ δύω ἀπὸ 6. εἰδὲ δώσει ὁ δεύτερος εἰς τὸν πρῶτον ἕν, τότε εἰς μὲν τὸν δεύτερον ἐγκαταλείπονται 4. ὁ δὲ πρῶτος ἔχει 8, ὅπερ ἐστὶ τὸ διπλάσιον.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

Ὅλη ἡ Ποσότης τῶν χρημάτων τοῦ Πέτρου μετὰ τοῦ ἡμίσεως τῆς τοῦ Παύλου Ποσότητος εἶναι $= 20$ Γροσίοις. ἡ δὲ τοῦ Παύλου Ποσότης μὲ τὸ τρίτον μέρος τῆς τοῦ Πέτρου Ποσότητος ὑπάρχει ὡσαύτως $= 20$.

ἔστω ἡ τοῦ Πέτρου Ποσ. χ, τὸ δὲ τρίτον Μέρος ταύτης $= \frac{1}{3}\chi$, ἤτοι $\frac{\chi}{3}$.

ἡ τοῦ Παύλου Ποσ. φ, τὸ δὲ ἥμισυ $= \frac{1}{2}\varphi$, ἢ $\frac{\varphi}{2}$.

ὅθεν πρώτη Συνθήκη $\chi + \frac{\varphi}{2} = 20$. $\frac{2\chi + \varphi}{2} = 20$.

$2\chi + \varphi = 40$.

δευτέρα

δευτέρα Συνθήκη $\varphi + \frac{\chi}{3} = 20.\ \frac{3\varphi + \chi}{3} = 20.\ 3\varphi + \chi$
$= 60$

ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $\chi = \frac{40 - \varphi}{2}$

ἐκ τῆς δευτέρας $\chi = 60 - 3\varphi$ λοιπὸν

$$\frac{40 - \varphi}{2} = 60 - 3\varphi$$
$$40 - \varphi = 120 - 6\varphi$$
$$6\varphi - \varphi = 120 - 40$$
$$5\varphi = 80$$
$$\varphi = 16.\ \chi = 60 - 48.\ \chi = 12$$

ἡ τοῦ Πέτρου Ποσότης $12 + \frac{16}{2} = 20$

ἡ τοῦ Παύλου . . $16 + \frac{12}{3} = 20$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. δ΄.

Ὁδοιπόροι τινὲς δειπνήσαντες παρά τινι ξενοδόχῳ, ἠρώτησαν αὐτὸν, πόσα πρέπει νὰ καταβάλῃ ἕκαστος αὐτῶν. ὁ δὲ ξενοδόχος ἀπεκρίθη, ἂν ἦσαν εἰς τὸν δεῖπνον ἔτι τρεῖς περισσότεροι, ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ ἕκαστος ἓν Γρόσιον ὀλιγώτερον, ἂν ὅμως ἦσαν δύω ὀλιγώτεροι, ἔπρεπε νὰ καταβάλῃ ἕκαστος ἓν Γρόσ. περισσότερον. ζητεῖται τοίνυν, πόσοι ἄνθρωποι ἦσαν, καὶ πόσα Γρόσ. πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος.

ὁ τῶν δειπνησάντων ἀριθμὸς ἔστω $= \chi$. τὰ Γρόσ. ἑκάστου $= \varphi$

ὅλη ἄρα ἡ Ποσότης τῶν Γροσίων $= \chi\varphi$.

ὅσα ἕκαστος χρεωστεῖ νὰ πληρώσῃ $= \frac{\chi\varphi}{\chi}$

κατὰ τὴν πρώτην Συνθ. κατὰ τὴν δευτέραν Συνθήκην

$\frac{\chi\varphi}{\chi+3} = \varphi - 1$	$\frac{\chi\varphi}{\chi-2} = \varphi + 1$
$\chi\varphi = \chi\varphi - \chi + 3\varphi - 3$	$\chi\varphi = \chi\varphi + \chi - 2\varphi - 2$
$\chi\varphi - \chi\varphi + \chi = 3\varphi - 3$	$2\varphi + 2 = \chi\varphi - \chi\varphi + \chi$
$\chi = 3\varphi - 3$	$2\varphi + 2 = \chi$
$3\varphi - 3 = 2\varphi + 2$	$\chi = 15 - 3 = 12$
$\varphi = 5$	

ἦσαν ἄρα οἱ δειπνήσαντες $= 12$, ὅσα δὲ ἕκαστος χρεωστεῖ νὰ καταβάλῃ $= 5$, ὅλη δὲ ἡ Ποσότης $= 60$, ὅθεν ἂν ἦσαν οἱ δειπνήσαντες δέκα, ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ ἕκαστος τούτων Γρόσ. 6. εἰδὲ ἦσαν δέκα πέντε, τότε ἐχρεώστει ἕκαστος νὰ καταβάλῃ 4 Γρόσ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ί.

Ἕνας θέλει νὰ μίξῃ (ἀνακατώσῃ) ἐκ δύω εἰδῶν οἴνου 100 Ξέστας *, καὶ τοῦ μὲν πρώτου εἴδους ὁ Ξέστης τιμᾶται 42 Παράδ. τοῦ δὲ δευτέρου εἴδους ὁ Ξέστης τιμᾶται 27 Παράδ., πρέπει δὲ πρὸς τούτοις ὁ Ξέστης τοῦ μεμιγμένου οἴνου νὰ πωλῆται 30 Παράδ.. ζητεῖται λοιπὸν, πόσους Ξέστας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου τούτων τῶν εἰδῶν.

Ἔστω

* Ξέστης εἶναι εἶδος Μέτρου.

Ἔςω ὁ ἀριθμὸς τῶν Ξεστῶν, ὁποῦ πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ κρείττονος οἴνου $= \chi$ τοῦ δὲ κατωτέρου οἴνου $= \varphi$, τὸ δὲ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Ξεστῶν τοῦ μιχθέντος οἴνου $= 100$. ἡ δὲ τιμὴ τοῦ πρώτου εἴδους $= 42$. τοῦ δὲ δευτέρου $= 27$. ἅπασα δὲ ἡ τιμὴ τοῦ μιχθέντος οἴνου $= 30 \times 100 = 3000$. οἱ Ξέσται καὶ τῶν δύω εἰδῶν τοῦ μιχθέντος οἴνου $\chi + \varphi = 100$, ἡ τιμὴ $42\chi + 27\varphi = 3000$.

κατὰ τὴν πρώτην Συνθήκην $\chi = 100 - \varphi$

κατὰ τὴν δευτέραν . . . $\chi = \dfrac{3000 - 27\varphi}{42}$

$$100 - \varphi = \frac{3000 - 27\varphi}{42}$$

$$4200 - 42\varphi = 3000 - 27\varphi$$

$$4200 - 3000 = 42\varphi - 27\varphi$$

$$1200 = 15\varphi$$

$$\frac{1200}{15} = \varphi . \ 80 = \varphi .$$

Εὕρηται ἄρα, ὅτι ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους πρέπει νὰ λάβῃ Ξέστας 80. καὶ ἑπομένως ἐκ τοῦ πρώτου 20. ἡ τιμὴ τοῦ δευτέρου εἶναι $80 \times 27 = 2160$, τοῦ δὲ πρώτου $20 \times 42 = 840$. καὶ οὕτως γίνεται $2160 + 840 = 3000$.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ϛ'.

Κάπηλός τις ὁ ὁποῖος ἐπώλει προτήτερα ἕν εἶδος οἴνου πρὸς 16 Παράδας τὸ μέτρον, θέλει νὰ χύσῃ ὕδωρ εἰς κάθε μέτρον, καὶ νὰ πωλῇ εἰς τὸ ἑξῆς πρὸς 10 Παράδ. τὸ μέτρον. ζητεῖται λοιπὸν, πόσον οἶνον καὶ ὕδωρ πρέπει νὰ λάβῃ οὗτος εἰς κάθε μέτρον. ἡ ζητουμένη

Πο-

Ποσότης τοῦ οἴνου $= \chi$, τοῦ δὲ ὕδατος $= \varphi$ τὰ ὁποῖα συναφθέντα ἀλλήλοις, εἰσὶν ἴσα μὲ ἓν μέτρον δηλαδὴ $\chi + \varphi = 1$.

ἡ νέα τιμὴ τοῦ οἴνου ἔσται $= 10$ Παράπ. καὶ ἐπειδὴ τὸ μέτρον τοῦ οἴνου τιμᾶται 16 Παραδ., τοῦ δὲ ὕδατος τιμᾶται μηδενός. ἔσαι ἄρα $16\chi + \varphi \times 0 = 10$

ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $\chi = 1 - \varphi$

ἐκ τῆς δευτέρας $\chi = \frac{10 - \varphi \times 0}{16}$ δηλαδὴ $= \frac{10}{16}$.

$$1 - \varphi = \frac{10}{16}$$
$$16 - 16\varphi = 10$$
$$16 - 10 = 16\varphi$$
$$\frac{6}{16} = \varphi$$

εὕρηται ἄρα ἡ Ποσότης τοῦ ὕδατος $= \frac{6}{16}$, ἤτοι $\frac{3}{8}$, καὶ ἐπομένως πρέπει νὰ λάβῃ $\frac{5}{8}$ οἴνου διὰ νὰ γένῃ $\frac{8}{8}$ ἤγουν ἓν μέτρον.

ΣΧΟΛΙΟΝ ά.

§. 122. Ἡ ἀλήθεια ταύτης τῆς λύσεως δείκνυται καὶ ἐν τοῖς ἑξῆς ἐκ τοῦ Κανόνος τῆς ἀναλογίας.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

§. 123. Αὐτὰ τὰ Προβλήματα ὀνομάζονται μίξεως Κανόνες, καὶ λύονται ὡσαύτως ὑπὸ τῶν ἀριθμητικῶν κατά τινα Κανόνα ἰδιαίτερον, καὶ ἐν τούτοις ἁρμόδιον. οἱ Κανόνες οὗτοι εἶναι πολλὰ ἐπωρελεῖς εἰς τὰς οἰκονομίας τῶν Καπήλων, καὶ ἄλλων, εἰς τὴν φυσικὴν, καὶ Ἰατρικὴν κ. τ. ὅπου θεωρεῖται ἀνάλογος Μίξις μερῶν. ἐντεῦθεν δύναταί τις νὰ σχηματίσῃ πάλιν ἕνα γενικὸν Τύπον πρὸς λύσιν τούτων τῶν Προβλημάτων, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ μιγνύμενον, καθάπερ δὴ καὶ τὰ μικτία μέρη ἂς εἶναι ὁποιασοῦν ἀξίας. ἂς ὑποτεθῶσι τὰ Μικτία Ποσὰ χ, καὶ φ, τὸ δὲ συντιθέμενον ὅλον ἔστω α, ἡ δὲ τιμὴ τοῦ χ Ποσοῦ ἔστω β, ἡ δὲ τοῦ φ ἔστω γ, ἡ δὲ τιμὴ τῶν μιχθέντων μερῶν ἔστω δ. λοιπὸν ὅλη ἡ τιμὴ τοῦ μεμιγμένου ἔσται αδ.

$$χ + φ = α$$

$$βχ + γφ = αδ$$

$$χ = α - φ$$

$$χ = \frac{αδ - γφ}{β}$$

$$α - φ = \frac{αδ - γφ}{β}$$

$$αβ - βφ = αδ - γφ$$

$$αβ - αδ = βφ - γφ$$

$$\frac{αβ - αδ}{β - γ} \; φ$$

δηλαδὴ πολλαπλασιάζομεν τὸ προσδιωρισμένον Ποσὸν μετὰ τῆς μείζονος τιμῆς, καὶ ἐκ τούτου ἀφαιροῦμεν τὸ Γενόμενον, τὸ ὁποῖον γίνεται ἐκ τοῦ Ἰδίου Ποσοῦ πολλαπλασιαζομένου μετὰ τῆς τιμῆς τῶν Μικτίων μερῶν, εἶτα διαιροῦμεν τὸ λειπὸν διὰ τῆς Διαφορᾶς τῶν τιμῶν, καὶ τὸ Πηλίκον ἔσται Ἴσον τῷ μικροτέρῳ Μικτίῳ Ποσῷ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 124. Οἱ δὲ ἄλλοι Κανόνες τῆς Μίξεως εἰς τοὺς ὁποίους πλεονάζονται πλείονα Μικτία Μέρη, ἀνήκουσιν εἰς τὰ ἀπροσδιόριστα Προβλήματα, περὶ τῶν ὁποίων κατωτέρω θέλομεν πραγματευθῇ.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 125. Νὰ λύωμεν τινα Ἐξίσωσιν τριῶν ἀγνώστων Ποσῶν.

ΠΡΑΚΤΕ'Α

ΠΡΑΚΤΕ΄Α.

α.) Πρῶτον ἐξαλείφομεν εὐθὺς τὸ Ποσὸν χ ἐκ τῶν δύω διδομένων Ἐξισώσεων κατὰ τοὺς προτεθέντας Κανόνας, καὶ ζητοῦντες τὴν Δύναμιν τοῦ Ποσοῦ φ, ποιοῦμεθα αὐτὴν μετὰ μόνου τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ ψ.

β.) Ἔπειτα ἀποβάλλομεν ὡσαύτως τὸ Ποσὸν φ, καὶ ζητοῦντες τὴν Δύναμιν τοῦ Ποσοῦ χ, ἀποκτῶμεν αὖθις ταύτην τὴν Δύναμιν ἔχουσαν μεθ᾽ ἑαυτῆς τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ψ.

Ἐντεῦθεν θέτομεν καὶ τὰς δύω εὑρεθείσας Δυνάμεις εἰς μίαν τῶν δεδομένων Ἐξισώσεων, καὶ κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον ποιοῦμεθα τὴν μόνην ἄγνωστον Ποσότητα ψ.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ.

Ἀγοράσας τὶς τρεῖς Ἵππους, καὶ ἐρωτηθεὶς, πόσου ἕκαστον τούτων ἠγόρασεν, εἶπεν, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου Ἵππου συνάμα τῷ ἡμίσει τῆς τιμῆς τῶν ἐπιλοίπων εἶναι 25 χρυσὰ (τουτέστι φλωρία). ἡ δὲ τιμὴ τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τῶν λοιπῶν εἶναι 26 φλ.. ἡ δὲ τιμὴ τοῦ τρίτου Ἵππου μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου γίνεται 29 φλ. ζητεῖται λοιπὸν, πρὸς πόσα οὗτος ἠγόρασεν ἕκαστον τούτων τῶν Ἵππων.

πρώτη Συνθήκη $\chi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2} = 25$

δευτέρα Συνθήκη $\varphi + \frac{\chi}{3} + \frac{\psi}{3} = 26$

τρίτη Συνθήκη $\psi + \frac{\chi}{2} + \frac{\varphi}{2} = 29$

φέρομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, ἔπειτα ἀκεραιοῦμεν τὰ τούτων Κλάσματα, οἷον

$$\frac{2\chi+\varphi+\psi}{2}=25, \text{ ἤτοι } 2\chi+\varphi+\psi=50$$

$$\frac{3\varphi+\chi+\psi}{3}=26, \text{ ἢ } 3\varphi+\chi+\psi=78$$

$$\frac{2\psi+\chi+\varphi}{2}=29, \text{ ἤτοι } 2\psi+\chi+\varphi=58$$

κατὰ τὸν πρῶτον Καν. ἐκ τῆς δευτέρας Ἐξισώσ.

$$\chi=78-3\varphi-\psi$$

ἐκ τῆς τρίτης $\chi=58-2\psi-\varphi$

$$78-3\varphi-\psi=58-2\psi-\varphi$$
$$78-58=3\varphi-\varphi-2\psi+\psi$$
$$20=3\varphi-\psi$$

$\frac{20+\psi}{2}=\varphi$, ἄρα ἡ Δύναμις τοῦ φ ὑπάρχει $=\frac{20+\psi}{2}$

κατὰ τὸν δεύτερον Καν. ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσ.

$$\varphi=50-2\chi-\psi$$

ἐκ τῆς τρίτης $\varphi=58-2\psi-\chi$

$$50-2\chi-\psi=58-2\psi-\chi$$
$$2\psi+\chi-2\chi-\psi-58-50$$
$$\psi-\chi=8$$
$$\psi-8=\chi$$

λοιπὸν ἡ Δύναμις τοῦ χ ἐστὶν $=\psi-8$

κατὰ τὸν τρίτον Κανόνα εἰς τὴν πρώτην Ἐξίσωσιν γράφομεν ἤδη ἀντὶ τοῦ 2χ τὴν Δύναμιν $(\psi-8)^2$, δηλαδὴ $2\psi-16$. καὶ ἀντὶ τοῦ φ γράφομεν $\frac{20+\psi}{2}$. ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $2\chi+\varphi+\psi=50$ γίγνεται $2\psi-16$

$+$

$$+\frac{20+\psi}{2}+\psi=50, \text{ ἤτοι } \frac{4\psi-32+20+\psi+2\psi}{2}=50$$

$$4\psi-32+20+\psi+2\psi=100$$

$$7\psi-12=100$$

$$7\psi=112$$

$$\psi=\frac{112}{7}=16.$$

κ̀ ἐπειδὴ τυγχάνει $\chi=\psi-8$. ἄρα $\chi=8$, κ̀ $\varphi=\frac{20+\psi}{2}=\frac{36}{2}=18$, λοιπὸν ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου Ἵππου εὕρηται $=8$, τοῦ δὲ δευτέρου $=18$, τοῦ δὲ τρίτου $=16$.

κατὰ τὴν πρώτην Συνθήκην $8+9+8=25$.

κατὰ τὴν δευτέραν $18+2\frac{2}{3}+5\frac{1}{3}=26$.

κατὰ τὴν τρίτην $16+4+9=29$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ Δεῖξις ἐκδηλοῦται ἐκ τῶν ἑξῆς ἀξιωμάτων. „Δύο πράγματα ἑτέρῳ τινὶ τρίτῳ ἴσα ὄντα, κ̀ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα. κ̀ ἴσα πράγματα μένουσιν ἴσα, ἂν εἰς τὸν τόπον τούτων τεθῶσιν ἴσα. ἐὰν λοιπὸν τοιούτῳ τρόπῳ ἀπομακρύνωμεν τὰ ἄγνωστα Ποσὰ, θέτοντες εἰς τὸν τόπον τούτων τὴν Δύναμιν αὐτῶν, ἀποκαθίσταται ἡ Ἐξίσωσις μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον Ποσότητα, τῆς ὁποίας ἡ ἐπίλυσις λαμβάνει τόπον πλέον κατὰ τοὺς προαποδειχθέντας Κανόνας.

ΠΟ´ΡΙΣΜΑ.

§. 116. Ἐὰν δὲν παρίστανται εἰς κάθε Ἐξίσωσιν ὅλα τὰ Μέλη, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀποβάλλωμεν δύω φοραῖς τὰ ἄγνωστα Ποσὰ, ἀλλ' ἀφ' οὗ εἰς τὸν τόπον τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου Ποσοῦ θέσωμεν τὴν Δύναμιν τούτου, μανθάνομεν τότε τὴν Δύναμιν τοῦ ἄλλου, ὡς ἐν τῷ ἀκολούθῳ Παραδείγματι.

ΠΑΡΑ´ΔΕΙΓΜΑ.

Ὁ Γεώργιος, φέρ' εἰπεῖν, χρεώστης ὤν, καὶ ἐρωτώμενος, πόσα ὀφείλει, λέγει τοσοῦτον μόνον, ὅτι χρεωστεῖ τῷ Πέτρῳ καὶ Παύλῳ ὁμοῦ 10000, καὶ πάλιν τῷ Πέτρῳ καὶ Ἰωάννῃ ὁμοῦ 11000, καὶ πάλιν τῷ Παύλῳ καὶ Ἰωάννῃ ὁμοῦ 9000. ζητεῖται λοιπὸν εἰς εὕρεσιν, πόσα οὗτος ἑκάστῳ χρεωστεῖ.

$$\chi + \varphi = 10000 . \quad \chi + \psi = 11000 . \quad \varphi + \psi = 9000$$

ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $\chi = 10000 - \varphi$

ἐκ τῆς δευτέρας . . . $\chi = 11000 - \psi$

$$10000 - \varphi = 11000 - \psi$$

$$\psi - \varphi = 11000 - 10000$$

$$\psi = 1000 + \varphi$$

ἂν εἰς τὴν τρίτην Ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ μεγέθους ψ θέσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν αὐτοῦ Δύναμιν, ἀποκτῶμεν ἀντὶ τοῦ ψ τὰ ἑξῆς

$$\varphi + 1000 + \varphi = 9000$$

$$2\varphi = 9000 - 1000$$

$$\varphi = \frac{8000}{2} = 4000$$

ἐντεῦθεν πορίζομεθα $\chi = 10000 - \varphi$, δηλαδὴ 10000 $- 4000 = 6000$, κ̀ $\psi = 1000 + \varphi$, δηλαδὴ $1000 + 4000$, ἄρα $\psi = 5000$, κ̀ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἀποδείκνυται, ὅτι χρεωστεῖ εἰς μὲν τὸν Πέτρον $= 6000$, εἰς δέ τὸν Παῦλον $= 4000$, εἰς δὲ τὸν Ἰωάννην $= 5000$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ϛ'.

§. 127. Νὰ λύωμεν μίαν Ἐξίσωσιν τινὸς ἀπροσδιορίστου Προβλήματος.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

ά.) Ἀποκαθιστῶμεν τὴν Ἐξίσωσιν οὕτως, ὥστε μόνον μία ἄγνωστος Ποσότης νὰ εὑρίσκηται εἰς τὸ ἓν μέρος κειμένη, κ̀ νὰ εἶναι Ἴση μὲ τὸ δεύτερον μέρος τῆς Ἐξισώσεως, τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν ἄγνωστον Ποσότητα μετὰ τῶν Ἐγνωσμένων. ἔπειτα λαμβάνομεν ἐν τῷ δευτέρῳ μέρει μίαν Δύναμιν τῆς ἀγνώστου Ποσότητος κατὰ τὸ δοκοῦν, κ̀ ζητοῦμεν τὴν Δύναμιν τῆς πρώτης. πρέπει ὅμως ἐνταῦθα νὰ προσέχωμεν, ἂν αὕτη ἡ Δύναμις εἶναι ἁρμόζουσα εἰς λύσιν τοῦ δεδομένου Προβλήματος, κ̀ οὕτως ἀποκτῶμεν τὴν πρώτην λύσιν.

β.) Ἔπειτα λαμβάνομεν ἕνα ἄλλον ἀριθμὸν, κ̀ ζητοῦμεν, ἂν κ̀ οὗτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι προσαρμόδιος εἰς λύσιν τῆς προκειμένης ὑποθέσεως. κ̀ οὕτως ποιοῦντες, πορίζόμεθα τὴν δευτέραν λύσιν.

γ'.) Οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, ἕως οὗ νὰ φθάσῃ ἡ λύσις εἰς τὸ ἀδύνατον. τουτέστι νὰ ληφθῇ ἀριθμὸς ἢ πολλὰ μείζων, ἢ πολλὰ ἐλάσσων, ὡς ἐν τῷ Παραδ. ὁρᾶται.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. α΄.

Ἔστωσαν δύω ἀριθμοὶ εἰς εὕρεσιν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι $= 12$. ἡ Ἐξίσωσις ἔσαι $\chi + \varphi = 12$, λοιπὸν $\chi = 12 - \varphi$. ὅθεν ἂν ληφθῇ τὸ $\varphi = 1$, ἔσαι τὸ $\chi = 11$. ἂν δὲ ληφθῇ τὸ $\varphi = 2$. ἔσται τότε τὸ $\chi = 10$. εἰ δ᾽ αὖ τὸ $\varphi = 3$, ἔσαι $\chi = 9$, κ὾ οὕτω ἀκολούθως, ὥστε ἐνταῦθα εἰσὶν ἕνδεκα δυναταὶ λύσεις. ἐπειδὴ τόσας Δυνάμεις εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ φ, αἵτινες συμβάλλουσι πρὸς λύσιν τοῦ Προβλήματος. πρὸς τούτοις δυνάμεθα κ὾ διὰ κεκλασμένων ἀριθμῶν νὰ λύσωμεν τὸ Πρόβλημα, τουτέστι ἂν ληφθῇ τὸ $\varphi = \frac{1}{2}$, ἔσται $\chi = 11 + \frac{1}{2}$. εἰ δ᾽ αὖθις τὸ $\varphi = \frac{1}{4}$, ἔσται $\chi = 11 + \frac{3}{4}$. εἰ δὲ τὸ $\varphi = 6 + \frac{2}{3}$, ἔσται $\chi = 5 + \frac{1}{3}$. κ὾ οὕτω δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν λύσιν ἀδιορίσως, ὥστε ἂν ληφθῇ τὸ $\varphi = 12$, τότε ἔσται τὸ $\chi = 0$, κ὾ ἐπομένως ἡ λύσις εἶναι ἀδύνατος. ἐπειδὴ ὁ δεύτερος ἀριθμὸς κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον χάνεται. ἂν δὲ ληφθῇ τὸ $\varphi = 13$, ἔσται τὸ $\chi = -1$, ἂν δὲ $\varphi = 20$, ἔσαι $\chi = -8$, κ὾ οὕτω περαιτέρω, ὥστε διὰ τῶν ἀποφατικῶν Ποσοτήτων ἠμποροῦμεν νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν λύσιν ἐπ᾽ ἄπειρον.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. β΄.

Εἰς 30 Πτωχοὺς (ἄνδρας, γυναῖκας, κ὾ παιδία) μοιράζονται 100 γρόσ. οὕτως, ὥσε ἑκάσῳ ἀνδρὶ δίδονται 8. Γρόσ.

8 Γρόσ. ἑκάστῃ δὲ γυναικὶ 5, καὶ ἑκάστῳ παιδὶ 1 Γρόσ. ζητεῖται λοιπὸν. πόσοι ἄνδρες εἰσὶν, πόσαι δὲ γυναῖκες, καὶ πόσα παιδία·

$\chi+\varphi+\psi=30$, ὁ τῶν Πτωχῶν ἀριθμὸς

$8\chi+5\varphi+1\psi=100$, τὰ μοιραστέα Γρόσια.

ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως $\chi=30-\varphi-\psi$

ἐκ τῆς δευτέρας . . . $\chi=\dfrac{100-5\varphi-\psi}{8}$

$$30-\varphi-\psi=\frac{100-5\varphi-\psi}{8}$$
$$240-8\varphi-8\psi=100-5\varphi-\psi$$
$$240-100=8\varphi-5\varphi+8\psi-\psi$$
$$140=3\varphi+7\psi$$
$$140-3\varphi=7\psi$$
$$\frac{140-3\varphi}{7}=\psi.$$

ἐπειδὴ τὸ ψ καὶ φ εἶναι σημαντικὰ ἀνθρώπων, διὰ τοῦτο δὲν ἔχει τόπον εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος ἡ ἐν Κλάσματι παρισταμένη Δύναμις. καὶ ἑπομένως ἀντὶ τοῦ φ δὲν δύναται νὰ τεθῇ καμμία Δύναμις, ἥτις ἀπὸ τῶν 140 ἀφαιρεθεῖσα καὶ διαιρεθεῖσα διὰ τοῦ 7, παρέχει κεκλασμένον Πηλίκον. ὅθεν ἀντὶ τοῦ φ, δὲν δύνανται νὰ τεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι 1, 2, 3, 4, 5, 6. ἐπειδὴ διὰ τὸ ψ παρέχουσι ἀριθμὸν Κλασματώδη.

ἐὰν δὲ τεθῇ τὸ $\varphi=7$, ἔσται $\psi=\dfrac{119}{7}=17$. ἄρα $\chi=30-7-17=6$. καὶ $8\chi+5\varphi+\psi$. τουτέστιν $48+35+17=100$ ἡ πρώτη λύσις. οἱ λοιποὶ ἀριθμοὶ μέχρι τοῦ 14, διδόασιν αὖθις κλασματικὸν Πηλίκον. οἱ

δὲ

δὲ τεθῇ $\varphi = 14$, ἔσται $\psi = \frac{98}{7} = 14$. ὅθεν $\chi = 2$, καὶ $8\chi + 5\varphi + \psi$, ἤγουν $16 + 70 + 14 = 100$ ἡ δευτέρα λύσις. ἐὰν δ' ὅμως τεθῇ τὸ $\varphi = 21$, γίνεται τότε τὸ χ ἀποφατικόν. ἐπειδὴ ἤθελεν εἶναι τὸ $\psi = 11$, ὅθεν δὲν ὑπάρχει ἔτι πλέον ἄλλη δυνατὴ λύσις.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

Ἕνας θέλει νὰ ἑνώσῃ τρία εἴδη οἴνου, τῶν ὁποίων τοῦ μὲν πρώτου οἴνου τὸ μέτρον τιμᾶται 4 Παράδ., τοῦ δὲ δευτέρου 8, τοῦ δὲ τρίτου 20 Παράδ. καὶ πρὸς τούτοις ἐθέλει, ὅλος ὁ μιχθεὶς οἶνος νὰ εἶναι 20 μέτρα, καὶ νὰ πωλῇ πρὸς 10 Παράδ. τὸ μέτρον. ζητεῖται λοιπὸν, πόσα μέτρα οἴνου πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους εἰς μίξιν.

$$\chi + \varphi + \psi = 20$$

$$4\chi + 8\varphi + 20\psi = 200$$

$$\chi = 20 - \varphi - \psi$$

$$\chi = \frac{200 - 8\varphi - 20\psi}{4}$$

$$20 - \varphi - \psi = \frac{200 - 8\varphi - 20\psi}{4}$$

$$80 - 4\varphi - 4\psi = 200 - 8\varphi - 20\psi$$

$$8\varphi + 20\psi - 4\varphi - 4\psi = 200 - 80$$

$$4\varphi + 16\psi = 120$$

$$4\varphi = 120 - 16\psi$$

$$\varphi = 30 - 4\psi$$

ἐὰν ληφθῇ τὸ $\psi = 1$, ἔσται $\varphi = 26$. ἀλλὰ τοῦτο ἀνθί-

σταται

σταται εἰς τὸ Πρόβλημα. ἐπειδὴ ὅλος ὁ συμμιχθεὶς οἶνος πρέπει νὰ εἶναι 20 μέτρα. τὸ ἴδιον συμβαίνει, καὶ ἂν ληφθῇ τὸ $\psi=2$, ἢ $=3$. εἰ δὲ ληφθῇ τὸ $\psi=4$, ἔσαι $\varphi=14$, καὶ $=2$, ἡ τιμὴ ἄρα ἔσται $4\chi+8\varphi+20\psi$. ἤτοι $8+112+80=200$. εἰ δὲ λάβωμεν τὸ $\psi=5$, ἔσαι $\varphi=10$, καὶ $\chi=5$. καὶ ἡ τιμὴ ἄρα $20+80+100=200$. καὶ αὖθις ἂν ληφθῇ $\psi=6$, ἔσται $\varphi=6$, καὶ $\chi=8$, καὶ ἡ τιμὴ ἄρα $32+48+120=200$. καὶ πάλιν ἂν τεθῇ $\psi=7$, ἔσαι $\varphi=2$, καὶ $\chi=11$, καὶ ἡ τιμὴ $44+16+140=200$. ἂν ὅμως ληφθῇ τὸ $\psi=8$, γίνονται τότε τὸ φ, καὶ χ ἀποφατικά, καὶ ἐπομένως ἡ λύσις ἔσται ἀδύνατος. μόνον λοιπὸν αὗται αἱ τέσσαρες λύσεις εἰσὶν ἁρμόδιαι εἰς τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ δʹ.

Ἠγόρασέ τις χοίρους, αἶγας, καὶ ἀρνία ὅλα ὁμοῦ τὸν ἀριθμὸν 30 διὰ Γρόσ. 75, ἕκαστος δὲ τῶν χοίρων τιμᾶται 5 Γρόσ. τῶν δὲ αἰγῶν ἑκάστη Γρόσ. 3. τῶν δὲ ἀρνίων Γρόσ. 2. ὅθεν ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς ἑκάστου εἴδους.

$$\chi+\varphi+\psi=30. \qquad \chi=30-\varphi-\psi.$$

$$5\chi+3\varphi+2\psi=75 \qquad \chi=\frac{75-3\varphi-2\psi}{5}.$$

$$150-5\varphi-5\psi=75-3\varphi-2\psi$$

$$150-75=5\varphi-3\varphi+5\psi-2\psi$$

$$75=2\varphi+3\psi$$

$$75-3\psi=2\varphi$$

$$\varphi=\frac{75-3\psi}{2}$$

ἐὰν