τῆς ῥίζης καὶ μίαν Μονάδα· ἐπειδὴ οὕτω τὸ πρότερον Σχῆμα μετασχηματίζεται εἰς τὸ ἑξῆς $\alpha\alpha + 2\alpha + 1$ ὅθεν τὸ Τετράγωνον τοῦ 13 (τουτέστι τὸ 169) εἶναι ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τοῦ 12 (τουτέστι τῷ 144), ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ Διπλοῦν τοῦ 12 καὶ μίαν Μονάδα. ἐκ δὲ τῆς γενικῆς Ἐκθέσεως τοῦ Κύβου $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$, (ἐὰν εἶναι τὸ $\beta = 1$) γίνεται δῆλον, ὅτι ὁ Κύβος τῆς Μονάδι αὐξηθείσης ῥίζης ἴσος ἐστὶ μὲ τὸν Κύβον τῆς προτέρας ῥίζης, ἐὰν εἰς τοῦτον προστεθῇ τὸ Τριπλάσιον Τετράγωνον τῆς προτέρας ῥίζης καὶ τὸ Τριπλάσιον τῆς ῥίζης, καὶ μία Μονὰς οἷον $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$, οὕτω καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ε'.

Περὶ λογισμοῦ τῶν ῥιζικῶν Ποσῶν.

ΟΡΙΣΜΟΣ α'.

§. 80. Ῥιζικὸν Ποσὸν λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τοῦτο τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον $\sqrt{}$ πρὸ ἑαυτοῦ κείμενον ὡς $\sqrt{\alpha}$, $5\sqrt[4]{\alpha^3}$, $\delta\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$, $\sqrt{16}$, $4\sqrt[3]{20}$. κ. τ. ὁ δὲ ἀριθμὸς, ἢ τὸ Γράμμα τὸ πρὸ τούτου τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου εὑρισκόμενον λέγεται τῆς ῥίζης, ἢ ῥιζικὸς, Συνεργός. ὅταν ὅμως δὲν εὑρίσκηται γεγραμμένος κανένας τοιοῦτος Συνεργὸς, ἐννοεῖται τότε ἡ Μονάς. ὁ δὲ ἐπὶ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου

m 3 κείμενος

κείμενος ἀριθμὸς, ἢ τὸ Γράμμα ὀνομάζεται Ἐκθέτης, ἢ Δυναμοδείκτης τῆς ῥίζης. ὅταν ὅμως δὲν εἶναι μήτ' αὐτὸς ἐπιγεγραμμένος, ἐννοεῖται πάντοτε τὸ 2, ἢ ἡ Δευτέρα Δύναμις· π. χ. $\sqrt{\alpha}$ εἶναι Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ Ποσοῦ α. $\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$ εἶναι ἡ ῥίζα μ. τοῦ Ποσοῦ α ὑψωμένου εἰς τὴν ν Δύναμιν.

ΟΡΙΣΜΟΣ β.

§. 81. Ὅμοια ῥιζικὰ Ποσὰ ὀνομάζονται ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς Ἐκθέτας ἐπὶ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου, καὶ τὰ αὐτὰ μετὰ τὸ Σημεῖον κείμενα Γράμματα, οἱ δὲ τούτων Συνεργοὶ ἔστωσαν καὶ Διάφοροι. π. χ. τὸ $\mu\sqrt{\alpha}$ μὲ τὸ $\nu\sqrt{\alpha}$, καὶ $3\sqrt[\mu]{\alpha}$ μὲ τὸ $\sqrt[\mu]{\alpha}$ εἰσὶν ἀλλήλοις ὁμοιοειδῆ ῥιζικὰ Ποσά. Ἀνόμοια δὲ λέγονται, ὅτε ἔχουσιν ἢ διαφόρους Ἐκθέτας, ἢ διάφορα Γράμματα μετὰ τὸ Σημεῖον ὡς $\sqrt{\alpha}$ καὶ $\sqrt[3]{\beta}$. $\sqrt[\mu]{\alpha}$ καὶ $\sqrt[\mu]{\beta}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 82. Διὰ αὐτοῦ τῆς Ἐκθέσεως δεικνύομεν, ὅτι πρέπει νὰ ἐξαχθῇ ἡ διὰ τοῦ ῥιζικοῦ Ἐκθέτου ἐμφαινομένη ῥίζα ἐκείνου τοῦ Ποσοῦ,

τὸ

τὸ ὁποῖον κεῖται ὑποκάτω τοῦ Σημείου. ἐὰν τὸ Ποσὸν ὑπάρχῃ ἀληθὴς Δύναμις καὶ ἐπομένως ἡ ῥίζα τούτου εἶναι ἀληθής, δυνάμεθα τότε νὰ γράφωμεν τὴν ῥίζαν αὐτὴν ἀντὶ τοῦ δεδομένου Ποσοῦ. ὡς

$\sqrt{16}=4.\sqrt[3]{64}=4.\sqrt{a^2}=a$, κ. τ. εἰ δὲ καὶ δὲν δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἀκριβῶς, καὶ ἐπομένως εἶναι ἄῤῥητος ἢ ψευδής (§. 59), τότε ὀνομάζομεν τὸ τοιοῦτον Ποσὸν ἄλογον Ποσὸν ὡς

$\sqrt[3]{30}$, $\sqrt{a}$, κ. τ. Περὶ τούτων τῶν ἀλόγων Ποσῶν θέλομεν πραγματευθῇ κυρίως εἰς αὐτὸ τὸ Κεφάλαιον.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 83. Ὅστις φυλάττει εἰς τὴν μνήμην του, ὅσα ἀνωτέρω (§. 61.) ἐπραγματεύθημεν περὶ τῆς Ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν, εὐκόλως θέλει καταλάβῃ καὶ ὅσα ἔχομεν νὰ πραγματευθῶμεν ἤδη περὶ τῆς Ἐργασίας τῶν ῥιζικῶν Ποσῶν. Ἐπειδὴ ἐὰν διέλωμεν τὸν Ἐκθέτην τοῦ Ποσοῦ, ἢ τῆς μετὰ τὸ Σημεῖον κειμένης Δυνάμεως διὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς ῥίζης, ἐξάγεται οὕτως ἡ ῥίζα τοῦ δεδομένου Ποσοῦ, ἐπομένως γράφομεν τὸν τοιοῦτον Κλασματικὸν Ἐκθέτην ἐπὶ τοῦ Ποσοῦ χωρὶς νὰ πρόσκειται τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον. π. χ. ἐὰν ζητῆται ἡ Κυβικὴ

ῥίζα τοῦ a^2, πρέπει νὰ γράψωμεν $\sqrt[3]{a^2}$, τὸ ὁποῖον γενομένης

τῆς Ἐξαγωγῆς, μεταβάλλεται εἰς $a^{\frac{2}{3}}$ (§. 61.).

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ά.

§. 84. Νὰ ἀποβάλλωμεν τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον.

ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Διαιροῦμεν τὸν Δυναμοδείκτην τοῦ Ποσοῦ διὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς ῥίζης, ἢ γράφομεν τὸν Ἐκθέτην τῆς ῥίζης ὡς

Παρονομαςὴν ὑπὸ τὴν Δυναμοδείκτην (ὅςις θεωρεῖται τότε ὡς ἀριθμητὴς) τῦ μετὰ τὸ Σημεῖον προσγεγραμμένυ Ποσῦ, ϗ τὸ ἐκ τύτυ προκύπτον Πηλίκον, ἢ τὸ Κλάσμα ποιῦμεν Ἐκθέτην τῦ δεδομένυ Ποσῦ, ἀποβάλλοντες τὸ ρίζικὸν Σημεῖον, π. χ. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$. $\sqrt[\mu]{a^\nu} = a^{\frac{\nu}{\mu}}$.

Δ ΕΙ Ξ Ι Σ.

Ἡ ρίζα ἐξάγεται, ὅταν διαιρεθῇ ὁ Ἐκθέτης τῆς Δυνάμεως, ἢ τῦ διδομένυ Ποσῦ διὰ τῦ Ἐκθέτυ τῆς ζητημένης ρίζης (§. 61). ἀλλὰ μὴν ταύτην τὴν Διαίρεσιν ἐμφαίνει ὁ Κλασματικὸς Ἐκθέτης. ἄρα ἀφ' ὗ τεθῇ ὁ τοιῦτος Κλασματικὸς Ἐκθέτης ἐπὶ τῦ Ποσῦ, ἐξήχθη ἡ ρίζα αὐτῦ. ϗ τὸ ριζικὸν σημεῖον ἐξωθεῖται ὡς περιττόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 85. Ἐὰν τὸ δοθὲν Ποσὸν ὑπάρχῃ ἀληθὴς Δύναμις, τότε γράφομεν ἀμέσως τὴν ρίζαν αὐτῦ, ἄνευ τῦ ρίζικῦ Σημείυ καθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω (§. 82.). ἐὰν δὲ τὸ Ποσὸν δὲν εἶναι ἀληθὴς Δύναμις, τότε γράφομεν αὐτὸ μετὰ τῦ Κλασματικῦ Ἐκθέτυ. ἀλλ' ἐὰν τὸ δοθὲν Ποσὸν εἶναι ἓν τῶν ἀδυνάτων, ἢ τῶν κατ' ἐπίνοιαν λεγομένων Ποσῶν, ὡς ἡ ρίζα τῦ ἀποφατικῦ Τετραγώνυ $\sqrt{-a^2}$, τότε εἶναι ϗ ἡ Ἐξαγωγὴ αὐτῦ ἀδύνατος ϗ κατ' ἐπίνοιαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 86. Νὰ ἐκθέτωμεν τὴν Δύναμιν τῦ Κεκλασμένυ Ἐκθέτυ διὰ τῦ ριζικῦ Σημείυ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ὁ Παρονομαςὴς γίνεται Ἐκθέτης τῦ ῥιζικῦ Σημείυ, ᾗ ὁ ἀριθμητὴς μένει Ἐκθέτης τῆς Δυνάμεως, π. χ.

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}} : \text{ὡσαύτως ᾗ } a^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{a^{4}}$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ μὲν Παρονομαστὴς εἶναι Παραςατικὸς τῆς ῥίζης. ὁ δὲ ἀριθμητὴς τῆς Δυνάμεως κατὰ τὴν προλαβῦσαν Δεῖξιν (§. 84). δύναται ἄρα ἡ αὐτὴ ῥίζα τὴν ὁποίαν ἐμφαίνει ὁ Παρονομαστὴς, νὰ τρεπθῇ τῆς Δυνάμεως, ἣν ἐμφαίνει ὁ ἀριθμητὺς. ἐπειδὴ ᾗ αἱ δύω αὗται Ἐκθέσεις δεικνύυσιν, ὅτι εἶναι Ἐξακτία ἡ ῥίζα τῦ Ποσῦ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ'.

§. 87. Νὰ μεταβάλλωμεν τὸς Ἐκθέτυς τινὸς ῥιζικῦ Ποσῦ, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις αὐτῦ τῦ Ποσῦ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Πολλαπλασιάζομεν τόσον τὸν Ἐκθέτην τῆς ῥίζης, ὅσον ᾗ τὸν Ἐκθέτην τῦ μετὰ τὸ Σημεῖον κειμένυ Ποσῦ μετὰ τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ, ἢ Ποσῦ, ᾗ ὕτω μεταβάλλονται οἱ Ἐκθέται, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις ᾗ ἡ Σημασία τῦ Ποσῦ..

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

$$\sqrt[3]{\alpha^2} = \sqrt[3\times 2]{\alpha^{2\times 2}} = \sqrt[6]{\alpha^4}$$

$$\sqrt[\mu]{\alpha^\nu} = \sqrt[\mu\times\gamma]{\alpha^{\nu\times\gamma}} = \sqrt[\mu\gamma]{\alpha^{\nu\gamma}}.$$

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Ἡ Δύναμις ἑνὸς Κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ κ̕ ὁ ἀριθμητὴς, κ̕ ὁ Παρονομαστὴς μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ἀριθμητ. §. 70.). ἀλλὰ μὴν δύναται ὁ μὲν Ἐκθέτης τῆς ῥίζης νὰ θεωρηθῇ ὡς Παρονομαστὴς, ὁ δὲ Ἐκθέτης τοῦ Ποσοῦ ὡς ἀριθμητὴς (§. 84), ἄρα δύναται νὰ μεταβληθῶσιν οἱ Ἐκθέται τοῦ ῥιζικοῦ Ποσοῦ ἄνευ τινὸς Μεταβολῆς τῆς Σημασίας αὐτοῦ, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι κ̕ οἱ δύω διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ γ'.

§. 88. Τὸ Ἴδιον γίνεται κ̕ περὶ τῆς Διαιρέσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καθὼς εἴπομεν εἰς τὰ Κλάσματα. π. χ.

$$\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}.\ \text{ἐπειδὴ}\ \sqrt[\frac{6}{2}]{a^{\frac{4}{2}}} = \sqrt[3]{a^2}.\ \text{κ̕}\ \sqrt[8]{a^8} = \sqrt[\frac{8}{4}]{a^{\frac{8}{4}}} = \sqrt{a^2} = a.$$

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ δ'.

§. 89. Νὰ φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Ἐκθέτην ῥιζικὰ Ποσὰ ἔχοντα διαφόρους Ἐκθέτας.

ΛΥ'ΣΙΣ.

ΛΥ΄ΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕ΄Α.

Ἀποβάλλομεν πρῶτον τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον καὶ ἐμφαίνομεν τοὺς Ἐκθέτας εἰς Κλάσματα (§. 84.). ἔπειτα αὐτὰ τὰ Κλάσματα ἀνάγομεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν (ἀριθμητ. §. 77.), μετέπειτα πάλιν ποιοῦμεν τὸν Παρονομαστὴν κάθε Κλάσματος Ἐκθέτην τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου (§. 86.), καὶ οὕτω θέλουσιν ἔχῃ ὅλα τὰ δεδομένα Ποσὰ τὸν αὐτὸν ῥιζικὸν Ἐκθέτην.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ.

$\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$ καὶ $\sqrt[\pi]{\beta^{\sigma}}$ εἶναι $\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}$ καὶ $\beta^{\frac{\sigma}{\pi}}$. ἐξ οὗ γίνεται $\alpha^{\frac{\nu\pi}{\mu\pi}}$ καὶ $\beta^{\frac{\mu\sigma}{\mu\pi}}$. ἄρα $\sqrt[\mu\pi]{\alpha^{\nu\pi}}$ καὶ $\sqrt[\mu\pi]{\beta^{\mu\sigma}}$. καὶ δι' ἀριθμῶν $\sqrt[6]{\alpha^{3}}$ καὶ $\sqrt[5]{\beta^{2}}$ ἐστὶ $\alpha^{\frac{3}{6}}$ καὶ $\beta^{\frac{2}{5}}$ ἐξ οὗ γίνεται $\alpha^{\frac{15}{30}}$ καὶ $\beta^{\frac{12}{30}}$. λοιπὸν $\sqrt[30]{\alpha^{15}}$ $\sqrt[30]{\beta^{12}}$.

ΔΕΙ΄ΞΙΣ.

Ἡ Δεῖξις αὕτη κρέμαται ἀπὸ τῶν Παραγράφων, τοὺς ὁποίους ἀνωτέρω εἰς τὴν λύσιν ἀνεκαλέσαμεν, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Δείξεων τούτων τῶν Παραγράφων εἶναι ἡ Δεῖξις τούτου τοῦ Προβλήματος.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 90. Ὅταν ὁ Ἐκθέτης δὲν εἶναι γεγραμμένος μήτε ἐπὶ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου, μήτε ἐπὶ τῆς μετὰ τὸ Σημεῖον Ποσότητος, τότε ἐννοεῖ-

ἐννοεῖται, καθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω, ἐπὶ μὲν τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου τὸ 2. ἐπὶ δὲ τῆς Ποσότητος ἡ Μονάς, τὰ ὁποῖα καὶ τὰ δύω εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἐκθέσωμεν εἰς αὐτὰ τὰ Προβλήματα.

Π. χ. $\sqrt{a^3}$ ϗ $\sqrt[5]{\beta}$ εἶναι $a^{\frac{3}{2}}$ ϗ $\beta^{\frac{1}{5}}$ ἐξ οὗ γίνεται $a^{\frac{15}{10}}$ ϗ $\beta^{\frac{2}{10}}$. λοιπὸν $\sqrt[10]{a^{15}}$ ϗ $\sqrt[10]{\beta^2}$.

Ἐὰν ἀποβάλωμεν πάλιν τὰ ῥιζικὰ Σημεῖα, καὶ ἀνάγωμεν εἰς ἐλαχίστους Ὅρους τοὺς κεκλασμένους Ἐκθέτας, τότε θέλουσι προκύψει πάλιν τὰ δεδομένα Ποσά. τοῦτο δύναται νὰ μᾶς χρησιμεύσῃ ὡς Βάσανος, εἰς κάθε τοιαύτην Ἀλγεβραϊκὴν Ἐργασίαν.

Π. χ. $\sqrt[10]{a^{15}}$ ϗ $\sqrt[10]{\beta^2}$, εἶναι $a^{\frac{15}{10}}$ ϗ $\beta^{\frac{2}{10}} = a^{\frac{3}{2}} = \beta^{\frac{1}{5}}$ $= \sqrt{a^3}$ ϗ $\sqrt[5]{\beta}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ε΄.

§. 91. Νὰ θέτωμεν μετὰ τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον τὸν Συνεργὸν ἑνὸς ῥιζικοῦ Ποσοῦ, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ὑψώνομεν πρῶτον τὸν Συνεργὸν εἰς ἐκείνην τὴν Δύναμιν, τὴν ὁποίαν ἐμφαίνει ὁ Ἐκθέτης τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου, ϗ ὕστερον τὸν πολλαπλασιάζομεν διὰ τοῦ μετὰ τὸ Σημεῖον Ποσοῦ ϗ τότε θέτομεν τὸ Γινόμενον μετὰ τὸ Σημεῖον.

π. χ. $a\sqrt[3]{\beta^2} = \sqrt[3]{a^3\beta^2}$, ὡσαύτως $3\sqrt{8} = \sqrt{9\times8} = \sqrt{72}$. ἔτι δὲ $3a\sqrt{\beta}$ γίνεται $\sqrt{9a^2\beta}$. ὡσαύτως ϗ $\frac{a}{\beta}\sqrt[3]{\gamma}$ $= \sqrt[3]{\frac{a^3}{\beta^3}\gamma}$. ϗ $\frac{3a}{2\beta}\sqrt[3]{\delta} = \sqrt[3]{\frac{27a^3}{8\beta}\delta}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον ἐμφαίνει, ὅτι ἐκ τοῦ μετὰ τοῦτο τὸ Σημεῖον Κειμένου Ποσοῦ πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν ἐκείνην τὴν ῥίζαν, τὴν ὁποίαν ἐμφαίνει ὁ Ἐκθέτης τοῦ Σημείου. ἐὰν λοιπὸν ἐξαγάγωμεν πάλιν ἐκ τῆς Δυνάμεως τοῦ Συνεργοῦ ῥίζαν τῆς αὐτῆς Δυνάμεως δὲν μεταβάλλεται ἡ Δύναμις τοῦ Συνεργοῦ, καὶ ἑπομένως ἡ λύσις ἐγένετο κατὰ τὸ πρέπον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'.

§. 92. Νὰ φέρωμεν ῥιζικὰ Ποσὰ εἰς Ἐκθέσεις, ἢ Ὅρους ἐλάσσονας.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἀναλύομεν τὴν μετὰ τὸ Σημεῖον Ποσότητα εἰς Παράγοντας, καὶ ἐὰν ἐξ ἑνὸς τούτων τῶν Παραγόντων δυνώμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν, ἥτις ἐμφαίνεται διὰ τοῦ ῥιζικοῦ Ἐκθέτου, θέτομεν αὐτὸν ὡς Συνεργὸν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου,

$$\sqrt[\mu]{a^{\nu}\beta^{\mu}} = \sqrt[\mu]{a^{\nu}} \times \beta^{\mu} = \beta\sqrt[\mu]{a^{\nu}}$$

ὡσαύτως $\sqrt[3]{a^{2}\beta^{3}} = \sqrt[3]{a^{2}} \times \beta^{3} = \beta\sqrt[3]{a^{2}}$

ὡσαύτως $\sqrt{32} = \sqrt{16} \times 2 = 4\sqrt{2}$

ὡσαύτως $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8} \times 4 = 2\sqrt[3]{4}$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ Δεῖξις αὕτη κρέμαται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω Προβλήματος (§. 91.) ἐπειδὴ καθ' ὃν τρόπον συντίθεται μία Ποσότης, κατὰ τὸν αὐτὸν καὶ ἀναλύεται πάλιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ζ'.

§. 93. Ποσὰ ἔχοντα πλείω ῥιζικὰ Σημεῖα, εἰς ἕνα μόνον Ὅρον ἀγαγεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Τὸ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου Ποσὸν θέτομεν μετὰ τὸ Σημεῖον (§. 91.) καὶ τοὺς Ἐκθέτας τῶν ῥιζικῶν Σημείων πολλαπλασιάζομεν ἐπ' ἀλλήλους: π. χ.

$\sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\nu]{\frac{\gamma}{\delta}\sqrt[\rho]{\frac{\epsilon}{\vartheta}}}}$ γίνεται πρῶτον $\sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\nu\rho]{\frac{\gamma^{\rho}\epsilon}{\delta^{\rho}\vartheta}}}$

ἔπειτα $\sqrt[\mu\nu\rho]{\frac{\alpha^{\nu\rho}\gamma^{\rho}\epsilon}{\beta^{\nu\rho}\delta^{\rho}\vartheta}}$. καὶ ἐν ἀριθμ. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ τουτέστι $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{4\times2}}$, τουτέστι $\sqrt[8]{16\times4\times2}$ ὅπερ ἐστὶ $\sqrt[8]{128}$.

διὰ τῆς ἐναντίας Ἐργασίας ἀνάγομεν τὸ ῥιζικὸν Ποσὸν εἰς ἐλαχίστους Ὅρους.

$\sqrt[18]{73728}=\sqrt[18]{4096\times9\times2}=\sqrt[9]{64\times3\sqrt{2}}=\sqrt[3]{4\sqrt[3]{3\sqrt{2}}}$.

ΠΡΟ-

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ η.

§. 94. Νὰ ἀθροίζωμεν, ϗ νὰ ἀφαιρῶμεν ῥιζικὰ Ποσά.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Ε'ὰν ὦσιν ἀνόμοια τὰ Ποσὰ, ἐμφαίνεται ἡ Πρόσθεσις, ἢ ἡ ἀφαίρεσις μόνον διὰ Σημείων + ϗ —. ὅταν δὲ ὦσιν ὅμοια, τότε ἀθροίζομεν, ἢ ἀφαιρῦμεν, ἢ ἀνάγομεν τὺς Συνεργὺς κατὰ τὺς προτεθέντας Κανόνας ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ. (§. 14. κ. τ.).

ΔΕΓ ΞΙΣ.

Τὰ μὲν ἀνόμοια Ποσὰ δὲν δύνανται νὰ ἑνωθῶσιν ὕτως, ὥςε ἐξ αὐτῶν νὰ γένῃ μόνον ἕνας ὅρ@. τὰ δὲ Ο'μοια Ποσὰ ἐὰν μηδέντι κωλύῃ, δύνανται νὰ ἑνωθῶσιν εἰς ἕνα Ο'ρον, ἀλλὰ μὴν εἰς τὰ Ο'μοειδῆ Α'λγεβραϊκὰ Ποσὰ γίνεται ἡ Πρόσθεσις, ϗ ἀφαίρεσις, ἢ ἡ Ε'πιτομὴ διὰ τῶν Συμβόλων ϗ Συνεργῶν. ἄρα κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἀθροίζονται ϗ ἀφαιρῦνται τὰ ῥιζικὰ Ποσά.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

$\alpha\sqrt{\gamma}$ ϗ $\beta\sqrt{\delta}$ ἀθροίζονται ὕτως $\alpha\sqrt{\gamma}+\beta\sqrt{\delta}$. $\alpha\sqrt{\gamma}+\beta\sqrt{\gamma}$ ἐν μὲν τῇ Προσθέσει γίνεται $(\alpha+\beta)\sqrt{\gamma}$. ἐν δὲ τῇ ἀφαιρέσει γίνεται $(\alpha-\beta)\sqrt{\gamma}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 95. Ὅταν ὦσι τὰ ῥιζικὰ Ποσὰ δι' ἀριθμῶν ἐκφρασμένα, τότε πρέπει νὰ προσπαθήσωμεν νὰ τὰ ἀνάξωμεν εἰς ἐλάσσονα ϗ ἴσην Ἔκθεσιν δύω Ὅρων. ἄλλως δὲν ἠμποροῦμεν νὰ τὰ μεταβάλωμεν, εἰμὴ διὰ τῶν Σημείων. π. χ. $\sqrt{8}$ ϗ $\sqrt{18}$ γίνεται $\sqrt{4 \times 2}$ ϗ $\sqrt{9 \times 2}$, ἤτοι $2\sqrt{2}$ ϗ $3\sqrt{2}$. ἀθροιζομένων δὲ τῶν Συνεργῶν, γίνεται $5\sqrt{2}$. ϗ κατὰ τὸ πέμπτον Πρόβλημα ποιοῦμεν $\sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

§. 96. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν ῥιζικὰ Ποσά.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Ἀνάγωμεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ἕνα κοινὸν Παρονομαστὴν, ἢ Ἐκθέτην τῆς ῥίζης (§. 89), ἐὰν δὲν ἔχωσιν αὐτὸν κοινόν. ὕστερον πολλαπλασιάζομεν τοὺς Συνεργοὺς μετ' ἀλλήλων, ϗ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον εἶναι ὁ νέος Συνεργός: τέλος πολλαπλασιάζομεν μετ' ἀλλήλων ϗ τὰ μετὰ τὸ Σημεῖον κείμενα Ποσά, ϗ τὸ Γινόμενον τοῦτο εἶναι τὸ νέον Ποσὸν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τεθῇ μετὰ τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

$\sqrt{\alpha}\times\delta=\delta\sqrt{\alpha}$. καὶ $\alpha\sqrt[3]{\beta}\times\gamma\sqrt[3]{\delta}=\alpha\gamma\sqrt[3]{\beta\delta}$

ὡς. καὶ $3\sqrt{\alpha}\times4\sqrt{\beta^2}=12\sqrt{\alpha\beta^3}$

τὸ δὲ $\frac{4}{5}\sqrt[3]{\alpha^2\gamma}\times\frac{3}{8}\sqrt[3]{\alpha\gamma^4}=\frac{12}{40}\sqrt[3]{\alpha^3\gamma^5}$.

τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\nu]{\frac{\gamma}{\delta}}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}\sqrt[\mu]{\frac{\eta}{\vartheta}}=\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\mu\nu]{\frac{\gamma^{\mu}}{\delta^{\mu}}}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}\sqrt[\mu\nu]{\frac{\eta^{\nu}}{\vartheta^{\nu}}}$

$=\frac{\alpha\varepsilon}{\beta\zeta}\sqrt[\mu\nu]{\frac{\gamma^{\mu}\eta^{\nu}}{\delta^{\mu}\vartheta^{\nu}}}$

τὸ δὲ $\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ πολλαπλασιασθὲν μετὰ
τοῦ $\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

$\sqrt{9}-4\sqrt{6}$
$-5\sqrt{6}+20\sqrt{4}$

$\sqrt{9}-9\sqrt{6}+20\sqrt{4}=3-9\sqrt{6}+40$.

ἔτι $2\sqrt[2]{5}\times3\sqrt[3]{2}=2\sqrt[6]{125}\times3\sqrt[6]{4}=6\sqrt[6]{500}$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ι.

§. 97. Νὰ διαιρῶμεν ῥιζικὰ Ποσά.

ΛΥΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Πρῶτον ἀνάγομεν αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν Ἐκθέτην τῆς ῥίζης, ἐὰν δὲν ἔχωσιν τὸν ἴδιον, ὕστερον διαιροῦμεν τὸν Συνεργὸν τῦ Διαιρετέυ διὰ τῦ Συνεργῦ τῦ Διαιρέτυ, κ̀ τὸ Πηλίκον εἶναι ὁ νέος Συνεργός. πλὴν διαιρῦμεν κ̀ τὰ μετὰ τὸ ῥιζικὸν Ποσὰ, κ̀ τὸ Πηλίκον εἶναι τὸ νέον Ποσὸν, τὸ ὁποῖον θέτομεν μετὰ τὸ Ἴδιον ῥιζικὸν Ποσόν. π. χ.

$$a\sqrt[3]{\beta} : \gamma\sqrt[3]{\delta} = \frac{a}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{\beta}{\delta}}.$$

$$4\sqrt{a} : 2\sqrt{a} = 2$$

$$8\sqrt{32} : 4\sqrt{8} = 2\sqrt{4} = 2 \times 2 = 4$$

ἔπ κ̀ $\frac{\kappa}{\vartheta}\sqrt[\mu]{\frac{a}{\beta}} : \frac{\eta}{\varepsilon}\sqrt[\nu]{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\varepsilon\kappa}{\eta\vartheta}\sqrt[\mu\nu]{\frac{a^{\mu}\delta^{\nu}}{\beta^{\mu}\gamma^{\nu}}}$

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ιά.

§. 98. Νὰ ὑψώνωμεν ῥιζικὰ Ποσὰ εἰς ὁποιανδήποτε Δύναμιν, ἢ νὰ ἐξάγωμεν ἐξ αὐτῶν ὁποιανδήποτε ῥίζαν.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν Δυναμοδείκτην τῦ μετὰ τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον Ποσῦ μετὰ τῆς ζητυμένης Δυνάμεως, κ̀ ὕτως ὑψώθη τὸ ῥιζικὸν Ποσὸν εἰς τὴν ζητυμένην Δύναμιν. ἢ διαιρῦμεν τὸν Δυναμοδείκτην τῦ μετὰ τὸ Σημεῖον Ποσῦ μὲ τὴν ζητυμένην ῥίζαν, κ̀ ὕτως ἐγένετο ἡ ζητυμένη Ἐξαγωγή. π. χ. ἔστω τὸ $\sqrt[5]{a}$ ἀρτέον εἰς τὴν

πτώρτετάρτην Δύναμιν. ὅθεν γίνεται $\sqrt[5]{\alpha^4}$. ὡσαύτως καὶ τὸ $\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ ἐὰν πρέπῃ νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν τρίτην Δύναμ., γίνεται $\sqrt{\alpha^3\beta^3\gamma^3}$, ἤτοι $(\sqrt{\alpha\beta\gamma})^3$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 99. Αἱ Δείξεις τούτων τῶν λύσεων δὲν διαφέρουσιν ἀπὸ τῶν ἐν τῷ §. 15. καὶ ἑπομ. προτεθεισῶν δείξ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 100. Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἀποβάλωμεν κατὰ τὸ πρῶτον Πρόβλημα πάντοθεν τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον, τότε ὁ μετὰ τῶν ῥιζικῶν λογισμὸς γίνεται ἁπλοῦς Ἐκθετικὸς λογαριασμὸς, περὶ οὗ ἐπραγματεύθημεν ἐν τῷ §. 44. καὶ ἐν τοῖς ἑξῆς §§. διὰ τοῦτο ἐν γένει ὁ λογαριασμὸς τῶν ῥιζικῶν Ποσοτήτων δύναται νὰ καταληφθῇ σχεδὸν, ὡς περιττός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ϛ'.

Περὶ Ἐξισώσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ α'.

§. 101. Ἐξίσωσις ἐστὶ Παράθεσις δύω Ἴσων, ἢ ταυτοδυνάμων Ποσοτήτων, τὰς ὁποίας ἐκθέτομεν εἴτε διὰ τῶν Ἰδίων, εἴτε διὰ Διαφόρων Γραμμάτων. ταύτην δὲ τὴν Ἐξίσωσιν παρασαίνομεν, γράφοντες μεταξὺ τῶν δύω παραθετομένων Ποσοτήτων τοῦτο τὸ Σημεῖον τῆς Ἰσότητος = . π. χ. ὅταν θέλωμεν νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Ποσὸν α εἶναι Ἴσον, ἢ ἔχει τὴν αὐτὴν Δύναμιν μὲ τὸ β, γράφομεν οὕτως,

$\alpha = \beta$. ϗ $\chi = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ σημαίνει, ὅτι τὸ Ποσὸν χ εἶναι Ἴσον τῷ α, πολλαπλασιασθέντι πρῶτον μετὰ τοῦ β, ϗ διαιρεθέντι ἔπειτα διὰ τοῦ γ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 102. Ἐκ τούτου γίνεται δῆλον, ὅτι κάθε Ἐξίσωσις πρέπει νὰ ἔχῃ δύω Ὅρους ἢ Μέλη, τὸ ἓν πρὸ τοῦ Σημείου τῆς Ἰσότητος, ϗ τὸ ἄλλο μετὰ τὸ Σημεῖον. ϗ τὸ μὲν πρὸ τοῦ Σημείου λέγεται πρῶτον Μέλος, τὸ δὲ μετὰ τὸ Σημεῖον γραφόμενον καλεῖται Δεύτερον Μέλος.

ΣΧΟΛΙΟΝ α.

§. 103. Αἱ λέξεις Τὸ Αὐτὸ, Ἴσον, ϗ Ὅμοιον διαφέρουσιν [illegible]ων, ϗ πρέπει ἐνταῦθα νὰ προσέξωμεν καλῶς, νὰ μὴ [illegible]σωμεν ταύτας τὰς λέξεις. ἐπειδὴ Τὸ Αὐτὸ ἐκλαμβάνεται [illegible] ἓν μόνον πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἀποκλείει κάθε διαφορὰν, [illegible] Πλήθους. δὲν δύναται νὰ εἶναι ὁ Παῦλος ϗ ὁ Πέτρος τὸ αὐτὸ, ϗ οὕτως ἐκλαμβάνομεν τὴν λέξιν Τὸ Αὐτὸ διὰ ἓν ϗ τὸ Ἴδιον πρᾶγμα. Ἴσον δὲ λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ κατὰ πάντας λόγους μὲ ἓν ἕτερον, π. χ. τὸ Τετράγωνον Α εἶναι Ἴσον τῷ Τετραγώνῳ Β, ἐὰν ὅλαι αἱ Πλευραὶ ϗ αἱ τρεῖς γωνίαι ὦσιν Ἴσαι ἑκατέ-

ρα

μα ἑκατέρα. καὶ διὰ τοῦτο δύναται νὰ τεθῇ ἀδιαφόρως τὸ ἓν ἀντὶ τοῦ ἄλλου. Ταῦτα ἀμφότερα κατὰ μὲν τὸ πρᾶγμα εἶναι Τὸ Αὐτὸ, κατὰ δὲ τὸν ἀριθμὸν εἰσὶ δύω. Ὅμοιον δὲ λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ μὲ ἓν δεύτερον κατὰ πάντα λόγον ἐκτὸς τοῦ Μεγέθους. οὕτως εἶναι τὸ Τρίγωνον Α Ὅμοιον τῷ Τριγώνῳ Β, ἐὰν ὦσιν αἱ Γωνίαι Ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρα, αἱ δὲ Πλευραὶ διάφοροι.

Εἰς τὰς Ἐξισώσεις λέγομεν ἐκεῖνα τὰ Ποσὰ Ἴσα, ὁποῦ ἔχουσι τὴν αὐτὴν Δύναμιν, ἢ Σημασίαν π. χ. Τουρκικὰ Γρόσια 5 = 600 Τουρκικοῖς Παρᾶσιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ β.

§. 104. Τὸ ἀντικείμενον τῶν Ἐξισώσεων εἶναι τὸ νὰ εὑρίσκωμεν τὴν Δύναμιν, ἢ Σημασίαν ἑνὸς, ἢ καὶ πλειόνων ἀγνώστων Ποσῶν· τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον νὰ ποιηθῇ, ἐὰν δοθῶσι μόνον ἄγνωστα Ποσὰ χωρὶς τινων Ἐγνωσμένων, ὡς $\chi = \varphi$. διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη μετὰ τῶν ἀγνώστων νὰ δίδωνται πάντοτε καὶ Γνωστά τινα Ποσὰ, πρὸς τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωσι τὰ ἄγνωστα Σχέσιν, ἢ λόγον τινὰ, ὡς $3\chi = 18$ τουτέστιν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ ἄγνωστον Ποσὸν μετὰ τοῦ 3, ἔχει λόγον Ἰσότητος πρὸς τὰ 18. $\frac{3\varphi}{5} = 6$ σημαίνει, ὅτι τὸ ἄγνωστον ζητούμενον Ποσὸν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ μετὰ τοῦ 3, καὶ τὸ ἐκ τούτου Γενόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ 5, Ἰσοδυναμεῖ τῷ 6. ἐκ τούτων ἕπονται οἱ ἑξῆς Ὁρισμοί.

ὉΡΙΣΜΟΣ β.

§. 105. Τὸ Πρόβλημα μιᾶς Ἐξισώσεως εἶναι ἡ Ἐρώτησις πρὸς εὑρεσίαν Δύναμιν τινὸς Ποσοῦ, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ λόγον Ἰσότητος μὲ τὴν Γνωστὴν Σημασίαν ἑνὸς ἄλλου Ποσοῦ. Ἡ λύσις τοῦ Προβλήματος συνίσταται

ται εἰς τὴν Ἔκθεσιν αὐτὴν τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ μετά τινος Ἐγνωσμένης Δυνάμεως, ἢ Σημασίας, π. χ. Πρόβλημα εἶναι: τὸ νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, ὅστις ἐὰν προστεθῇ εἰς τὰ 56, παρέχει ἄθροισμα Ἴσον μὲ τὸ Τριπλάσιον αὐτοῦ.

Ἡ δὲ λύσις εἶναι αὕτη $\chi=28$ τουτέστιν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 28, ὅστις προστεθεὶς εἰς τὸν 56, δίδει Κεφάλαιον Τριπλάσιον τοῦ 28. ἢ $28+56=28\times 3$ ἀμφότερα εἶσιν Ἴσα μὲ τὰ 84.

ΟΡΙΣΜΟΣ γ΄.

§. 106. Ὑποθέσεις, ἢ Συνθῆκαι τοῦ Προβλήματος λέγονται αἱ Σχέσεις τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ πρὸς τὰ Ἐγνωσμένα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπολύτως ἀναγκαῖα πρὸς λύσιν τοῦ Προβλήματος. Τὰς δὲ Συνθήκας ἐκδηλοῦμεν ἢ διὰ ἀριθμητικῶν χαρακτήρων, ἢ διὰ τῶν ἀρκτικῶν Γραμμάτων α, β, γ. οἷον. ὁ Πέτρος ἀποδημήσας, ἐλαύνει καθ' ἑκάστην ἡμέραν 10 Μίλλια, καὶ ὁδεύει ἤδη πέντε ἡμέρας. ὁ δὲ Παῦλος ὁδεύει καθ' ἑκάστην 15. Μίλ., εἰς πόσας ἄρα ἡμέρας θέλει φθάσει τὸν Πέτρον. ἐνταῦθα ζητεῖται ὁ χρόνος, καθ' ὃν μέλλει νὰ συνέλθωσιν ἀμφότεροι· αἱ Συνθῆκαι εἶναι αἱ ἡμέραι ϗ τὰ Μίλλια τȣ̃ Πέτρȣ μετὰ τῶν Μιλ. τȣ̃ Παύλȣ. Ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον ὥδευσεν ὁ Πέτρος, εἶναι $10 \times 5 = 50$ Μίλ. ϗ πρέπει νὰ κάμῃ δρόμον ἔπι $10 \times \chi$, τὰ ὁποῖα ὁμȣ̃ ληφθέντα πρέπει νὰ εἶναι Ἴσα μὲ τὸν δρόμον τȣ̃ Παύλȣ $15 \times \chi$, τȣτέστιν $50 + 10\chi = 15\chi$· δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν τὰ Μίλλια τȣ̃ Πέτρȣ α ϗ τὰς ἡμέρας τȣ̃ δρόμȣ γ. τὰ δὲ Μίλλια τȣ̃ Παύλȣ β, ϗ τότε γίγνεται ἡ Ἐξίσωσις ȣ̃τως, $\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi$. ἐὰν δὲ λυθῇ αὐτὸ τὸ Πρόβλημα εἰς ἀριθμητικȣ̀ς χαρακτῆρας ἔσαι τὸ $\chi = 10$. ὥσπερ δὴ ϗ ἐν Γράμμασιν $\frac{\alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \chi$, ἢ $\frac{50}{15 - 10} = 10$, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, καθ' ἃς ὁ Παῦλος πρέπει νὰ φθάσῃ τὸν Πέτρον.

ὉΡΙΣΜΟ'Σ δ'.

§. 107. Ὡρισμένον Πρόβλημα λέγεται ἐκεῖνο, ὁπȣ̃ ἐπιδέχεται μίαν μόνην ϗ ταύτην Ὡρισμένην λύσιν τῆς προκειμένης Ἐρωτήσεως. ȣ̃τως εἶναι ἐν τῷ προτέρῳ Προβλήματι (§. 106.) ὁ ζητȣ́μενος ἀριθμὸς μόνος, ϗ ὡρισμένος

 10,