ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

16,45,92,49	| 4057
16	τὸ ἀφαιρετέον Τετράγ. τῦ ὁποίυ ἡ ῥίζα εἶναι ὁ 4.
45	ἡ ἑπομένη Κλάσις.
8	τὸ διπλάσιον τῆς ῥίζης, τὸ Πηλίκον ἐςὶν ο.
4592	ἡ ἑπομένη Κλάσις πρὸς τῇ ἀνωτέρῳ τιθεμένη.
805	τὸ διπλ. τῆς ῥίζης 40X2 μετὰ τῆς νέας ῥίζης 5.
4025	τὸ ἐκ τῦ Διαιρέτυ ϗ τῦ νέυ Πηλίκυ Γινόμενον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ.
56749	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑξῆς Κλάσεως.
8107	τὸ διπλ. τῆς ῥίζης ο X2 μετὰ τῆς νέας ῥίζης.
56749	τὸ ἀφαιρετέον Γινόμενον.
0.	

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 69. Ἡ Βάσανος (Δοκιμὴ) τῆς Ὀρθῶς ἐξαχθείσης ῥίζης γίνεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν ἐφ' ἑαυτὴν, ἢ ὑψώσωμεν αὐτὴν εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θέλομεν ἰδῆ, ἂν εἶναι τὸ Τετράγωνον τῆς ῥίζης Ἴσον τῷ δοθέντι ἀριθμῷ ὡς ἐν τῷ ἑξῆς Παραδείγματι.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ά.

9,57,90,25	3095	βάσανος	3095
9			3095
57			15475
6			27855
5790			92850
609			9579025
5481			
30925			
6185			
30925			
0			

ΠΑΡΑΔ. β.

34,69,21	589
25	
969	
108	
864	
10521	
1169	
10521	
0	

ΠΑΡΑΔ. γ'.

16,00,00	400
16	
000	
00	
0000	
000	
0	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ δʹ.

```
36,09,60,64    | 6008
36
--------
  009
  12
--------
   0960
   120
--------
    96064
    12008
    96064
--------
      0
```


ΣΧΟΛΙΟΝ γʹ.

§. 70. Ὅταν εἰς τὸ τέλος ἐγκαταλείπηταί τι λείψανον, τοῦτο εἶναι Σημεῖον, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἦτον Ἐντελὲς Τετράγωνον. ὅθεν δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποκτήσωμεν ῥίζαν ἀληθῆ (§. 59). τὸ τοιοῦτον ἐκφράζομεν διὰ τοῦ Σημείου $\sqrt{}$, οἷον $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{128}$ κ. τ. ὡστόσον δυνάμεθα διὰ τῆς Ἐξαγωγῆς νὰ εὕρωμεν τὴν ἀληθῆ ῥίζαν, ἐξακολουθοῦντες περαιτέρω διὰ τῶν Δεκαδικῶν. καὶ τοῦτο γίνεται ἐὰν προσθέσωμεν τῷ λειψάνῳ μίαν Κλάσιν ἐκ δύω Μηδενικῶν 00, καὶ οὕτω θεωρεῖται αὕτη ἡ Κλάσις ὅλη ὡς Δεκαδικὰ Κλάσματα, καὶ ἡ ἐκ ταύτης ῥίζα ὡς Δεκατημόρια. ἂν δὲ καὶ ἀπὸ αὐτῆς μένῃ κἄνένα λείψανον, προσθέτομεν ἄλλα δύω μηδενικὰ, καὶ τὸ ἐκ τούτων Πηλίκον εἶναι Ἑκατοστημόρια, οὕτω δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν ἐπὶ πλέον, προστιθέντες ἐπὶ τῆς Διαιρέσεως πάντοτε ἀπὸ ἓν 0 εἰς τὸν Διαιρετέον, κατ' αὐτὴν τὴν Μέθοδον ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν ἀπὸ 1129 καὶ 5340. ὡς θέλομεν ἰδῆ ἐν τοῖς ἑξῆς Παραδείγμασι.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ α', ϗ β'.

```
1,29    | 11,35 κ. τ.        5,40    | 22,23 κ. τ.
1                            4
———                          ———
 29                          140
 21                           43
 21                          129
————                         —————
 8,00                         11,00
 223                          462
 669                          924
—————                        ——————
 13100                        17600
  2265                         4543
 11325                        13929
—————                        ——————
  1775                         3671
```

ΣΧΟΛΙΟΝ ε'.

§. 71. Εἰς Τετραγωνικὰ Κλάσματα πρέπει ϗ ἐκ τοῦ ἀριθμητοῦ ϗ ἐκ τοῦ Παρονομαστοῦ νὰ ἐξάγωμεν τὴν ῥίζαν π. χ. $\frac{4}{25}$ δίδωσι ῥίζαν $\frac{2}{5}$. ϗ $\frac{36}{81}$ τὴν $\frac{6}{9}$. εἰς δὲ τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα γίνεται ἡ Πρᾶξις καθὼς εἰς τὰ Ὁλόσχερη. πρέπει ὅμως εἰς τὰ Δεκαδικὰ νὰ προσέχωμεν νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν χαρακτήρων πάντοτε ἄρτιος, εἰ δὲ ϗ εἶναι Περιττὸς, προστίθεμεν ἓν Μηδενικὸν 0. εἰς τὸ τέλος, ϗ οὕτω γίνεται ἄρτιος, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις τοῦ Κλάσματος (§. 90. ἐν ἀριθμητικῇ). ἡ δὲ αἰτία τούτου εἶναι, ὅτι τὸ Δεκαδικὸν Κλάσμα προϋποτίθεται πάντοτε νὰ ἔχῃ Παρονομαςὴν συνιςάμενον ἐκ τῆς Μονάδος καὶ τῶν Μηδενικῶν, καὶ εἰς αὐτὸν τὸν [illegible] Τετράγωνον Παρονομαςὴν, ὅπου εἶναι πάντοτε ὁ ἀριθμὸς τῶν Μηδενικῶν Σημείων ἄρτιος. καθὼς ἐκ τῶν Τετραγώνων τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν γίνεται δῆλον, π. χ. τῶν 10, 100, 1000, 10000 κ. τ. Τετράγωνα εἶσι 100, 10000, 1000000, 100000000 κ. τ. ἀλλὰ μὴν ἐν τῷ ἀριθμητῇ ὑπάρχουσι τόσοι χαρακτῆρες, ὅσα Μηδενικὰ Σημεῖα ἐν τῷ Παρονομαςῇ, πρέπει ἄρα καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν χαρακτήρων τοῦ ἀριθμητοῦ νὰ εἶναι ἄρτιος. ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι Μικτὸς, τουτέςιν ἐὰν συνίςαται ἐξ ἀκεραίων καὶ Δεκαδικῶν, τότε διαιροῦμεν αὐτὸν εἰς Κλάσεις ξεχωριςὰ τόσον τὸν ἀκέραιον, ὅσον καὶ τὸν Δεκαδικὸν, καὶ ὕςερον γίνεται ἡ Ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης κατὰ τοὺς Κανόνας τοὺς προτεθέντας ἐν τοῖς ἀνωτέρω Παραγράφοις· πρὸς ἐξήγησιν τῶν εἰρημένων, κείσθωσαν τὰ ἑξῆς Παραδείγματα διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν ἀπὸ τῶν 7.24576, καὶ 0.56644, καὶ 7487.441 τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν.

ΠΑΡΑΔ. ά.

7.,24,57,60	2.691
4	
324	
46	
276	
4857	
529	
4761	
9660	
5381	
5381	
4279 κ. τ.	

ΠΑΡΑΔ. β'.

56,64,40	0.752
49	
764	
145	
725	
3940	
1502	
3004	
936 κ. τ.	

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ γ'.

```
74,87,44,10    | 86.53
64
----
1087
 166
 996
----
 9144
 1725
 8625
----
  51910
  17303
  51909
  -----
   0 1
```

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ ι'.

§. 72. Ἐκ τοῦ δοθέντος Κύβου νὰ ἐξάγωμεν τὴν Διμερῆ ῥίζαν.

ΠΡΑΚΤΕ΄Α, ἢ ΛΥ΄ΣΙΣ.

Ἐπειδὴ κάθε Κύβος ἑνὸς Διμελοῦς Ποσοῦ συνίσταται ἐκ τοῦ Κύβου τοῦ πρώτου Μέλους, καὶ ἐκ τοῦ Τριπλοῦ Τετραγώνου ἑκάστου Μέλους πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ ἑτέρου, καὶ ἐκ τοῦ Κύβου τοῦ δευτέρου Μέλους, καθὼς φαίνεται ἐκ τοῦ Σχήματος $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$, ἀποκτῶμεν τὴν ῥίζαν, ἐὰν ἐξαγάγωμεν ἐκ τοῦ δοθέντος τὸ α καὶ β, ὕστερον σχηματίζομεν ἐκ τῆς ῥίζης α καὶ β τὰ τέσσαρα τοῦ

Κύβου

Κύβου γνωστὰ Ποσά, καὶ τὰ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου Κύβου. ἐπειδὴ εἰς τοιαῦτα ἀναλύονται, ἐξ ὧν καὶ συνετέθησαν.

Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ἀπὸ τοῦ α^3 τὴν Κυβικὴν, ῥίζαν α, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ β, ἀφ' οὗ διέλωμεν τὸ $3\alpha^2\beta$ μὲ $3\alpha^2$ τουτέστι μὲ τὸ Τριπλάσιον Τετράγωνον τοῦ πρώτου Μέλους. ἀφ' οὗ εὕρωμεν τὸ β, συντίθεμεν ἔπειτα τὰ τρία ἑξῆς Ποσὰ $3\alpha^2\beta$, $3\alpha\beta^2$, β^3 καὶ τὰ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου Ποσοῦ, καὶ οὕτω δὲν ἐγκαταλείπεται μηδέν.

$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$	$\underline{\vert\,\alpha+\beta}$
$-\alpha^3$	ὁ ἀφαιρετέος Κύβος τοῦ πρώτου Μέλους α, τὸ ὁποῖον θέτομεν εἰς τὸν τόπον τοῦ Πηλίκου.
$3\alpha^2\beta$	τὸ δεύτερον Ποσόν.
$3\alpha^2$	τὸ Τριπλοῦν Τετράγωνον τοῦ πρώτου Μέλους ὡς Διαιρ.
$-3\alpha^2\beta$	Πολλαπλασιασθὲν μετὰ τῆς νέας ῥίζης, καὶ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ δευτέρου Ποσοῦ.
$0 \quad 3\alpha\beta^2$	τὸ τρίτον Ποσόν.
$-3\alpha\beta^2$	τὸ τριπλάσιον Τετράγ. τοῦ δευτέρου Μέλους τῆς ῥίζης πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ πρώτου Μέλους καὶ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ τρίτου Ποσοῦ.
$0 \quad \beta^3$	τὸ Τέταρτον Ποσόν
$-\beta^3$	ὁ ἀφαιρετέος Κύβος τοῦ δευτέρου Μέλους τῆς ῥίζης.
0	

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'.

§. 73. Νὰ ἐξάγωμεν τὴν Κυβικὴν ῥίζαν.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

α'.) Μερίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς Κλάσεις οὕτως, ὥςε ἑκάςη Κλάσις νὰ περιέχῃ τρεῖς χαρακτῆρας ἐκτὸς τῆς πλατυτέρας πρὸς τὰ ἀριςερὰ Κλάσεως, ἥτις δύναται κατὰ περίςασιν νὰ περιέχῃ καὶ δύω, ἢ καὶ ἕνα μόνον χαρακτῆρα. ἐντεῦθεν δηλοῦται, ἐκ πόσων χαρακτήρων συνίςαται ἡ ῥίζα, ἐκ τοσούτων δηλονότι, εἰς ὅσας Κλάσεις ἐμερίσθη ὁ δοθεὶς Κύβος (§. 58).

β'.) Ἔπειτα ζητοῦμεν εἰς τὸν Πίνακα (§. 58), ἂν ἡ πρώτη Κλάσις ὑπάρχῃ Κύβος, ἢ οὔ. καὶ εἰ μὲν ὑπάρχει Κύβος, γράφομεν αὐτὸν ὑποκάτω τῆς πρώτης Κλάσεως, ἐὰν δὲ δὲν εἶναι Κύβος. λαμβάνομεν τὸν ὡς ἔγγιςα ἐλάττονα Κύβον, καὶ γράφομεν αὐτὸν ὑπὸ τὴν πρώτην Κλάσιν, τὴν δὲ ῥίζαν αὐτοῦ εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων.

γ'.) Ἀφαιροῦμεν τοῦτον τὸν Κύβον ἀπὸ τῆς πρώτης Κλάσεως, καὶ τίθεμεν πλησίον τοῦ καταλειπομένου τὴν ἑπομένην Κλάσιν.

δ'.) Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος Πηλίκου (a) ποιοῦμεν Τετράγωνον, ὅπερ πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ 3 ($= 3a^2$) γράφομεν ὑπὸ τὴν δευτέραν Κλάσιν ὡς Διαιρέτην οὕτως, ὥστε οἱ ὑπὸ τοὺς δύω ἐσχάτους χαρακτῆρας πρὸς τὰ δεξιὰ τόποι νὰ μένωσι κενοί.

ε'.) Ζητοῦμεν ὕςερον, ποσάκις ὁ Διαιρέτης περιέχεται

ἐν

ἐν τῷ ἐπ' αὐτὸν Διαιρετέῳ, τὸ δὲ Πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον Μέλος τῆς ῥίζης, ὅπερ θέτομεν εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων·

ϛʹ.) Πολλαπλασιάζομεν μετὰ τούτου τοῦ νεωστὶ εὑρεθέντος Μέλους τῆς ῥίζης (β) τὸν Διαιρέτην, τὸ δὲ Γινόμενον ($3\alpha^2\beta$) ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου ἀριθμοῦ, καὶ εἰς τὸ καταλειφθὲν γράφομεν τὸν προπλάτειον χαρακτῆρα.

ζʹ.) Ἐκ τῆς δευτέρας ταύτης ῥίζης (β) ἀποτελοῦμεν Τετράγωνον (β^2), καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ μετὰ τοῦ πρώτου Μέλους τῆς ῥίζης καὶ μετὰ τοῦ 3, καὶ οὕτω γεννᾶται τὸ Γενόμενον ($3\alpha\beta^2$), τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν πάλιν ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ, καὶ πλησίον τοῦ ἐγκαταλειπομένου προσγράφομεν τὸν πλάτειον χαρακτῆρα τῆς Κλάσεως.

ηʹ.) Ἐκ τῆς αὐτῆς ῥίζης (β) ἀποτελοῦμεν Κύβον, καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ, καὶ ἂν δὲν μείνῃ τι ἐγκαταλειπόμενον, τότε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει ἀληθὴς Κύβος, καὶ ἡ ῥίζα τούτου ἐξήχθη. π. χ. νὰ ἐξαγάγωμεν ἀπὸ τοῦ 13824 τὴν Κυβικὴν ῥίζαν.

αʹ.)		13,824	24 ἡ ῥίζα
βʹ.)	α^3	8	ὁ ὡς ἔγγιστα ἀφαιρετέος Κύβος.
γʹ.		5824	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑπομένης Κλάσεως.
δʹ.)	$3\alpha^2$	12	τὸ τριπλοῦν Τετραγ. τοῦ πρώτου Μέλους $2\times2\times3=12$.
εʹ.)	$3\alpha^2\beta$.	48	$\times$ μετὰ τοῦ ἄλλου Μέλους $\beta = 12\times3=48$, καὶ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῶν 58.

	102	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ προπλασίου χαρακτῆρος 2.
ζ'.) $3\alpha\beta^2$	96	τὸ δεύτερον Μέλος τῆς ῥίζης $4\times4=16\times3=48\times2$ (τὸ πρῶτον Μέλος τῆς ῥίζης) $=96$,
	64	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ ἐσχάτου χαρακτῆρος.
η'.) β^3	64	ὁ Κύβος τοῦ δευτέρου Μέλους τῆς ῥίζης $4=64$.
	0	

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ἀλήθεια αὐτῆς τῆς Μεθόδου τοῦ τὰς Κυβικὰς ἐξαγάγειν ῥίζας δηλοῦται ἐκ τοῦ Ἀλγεβραϊκοῦ Σχήματος (§. 72.), ἀφ' οὗ εὕρωμεν μίαν φορὰν τὸ β, τότε συνθέτομεν τὰ Μέρη, ἐξ ὧν συνίσταται ὁ Κύβος, καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὰ καθὲν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

§. 74. Ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἔχῃ πλέον, ἢ δύω Κλάσεις, καὶ ἑπομένως συνίσταται ἡ ῥίζα ἐκ πλειόνων χαρακτήρων, ἐξακολουθοῦμεν τὴν Μέθοδον ταύτην, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Τετάρτου Κανόνος, καὶ θεωροῦμεν τοὺς δύω εὑρεθέντας χαρακτῆρας τῆς ῥίζης ὡς πρῶτον Μέλος, ἐξ ὧν γίνεται διὰ τὴν Διαίρεσιν τὸ Τριπλοῦν Τετράγωνον αὐτῶν, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ β, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τοῦτο τὸ Τριπλοῦν Τετράγωνον μεθ' ὅλου τοῦ α, τουτέστι μετὰ πασῶν τῶν προτέρων ῥιζῶν, καὶ τὸ ἀφαιροῦμεν, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκονται ὅλαι αἱ ῥίζαι ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

18,399,744 | $\alpha\beta$ / 264 ἡ ῥίζα

α^3	8	ὁ ὡς ἔγγιστα ἐλάσσων Κύβος.
	10399	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑπομένης Κλάσ,
$3\alpha^2$	12	$2\times2=4\times3=12$ ὁ Διαιρέτης. τὸ Πηλίκ. $6=\beta$.
$3\alpha^2\beta$	72	12×6, ἢ $3\alpha^2\times\beta=72$.
	319	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ ἑπομένου χαρακτῆρος.
$3\alpha\beta^2$	216	$6\times6=36\times3=108\times2=216$ $=\beta^2\times3\times\alpha$.
	1039	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ ἀκολούθου χαρακτῆρος.
β^3	216	ὁ Κύβος τῆς ῥίζης 6.
	823744	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑπομένης Κλάσεως.
$3\alpha^2$	2028	$26\times26=676\times3=2028$ ὁ Διαιρέτης. τὸ Πηλίκον $4=\beta$.
$3\alpha^2\beta$	8112	$2028\times4=3\alpha^2\times\beta$.
	1254	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ προτελευταίου χαρακτ.
$3\alpha\beta^2$	1248	$4\times4=16\times3=48\times26=1248$ $=\beta^2\times3\times\alpha$.
	64	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ τελευταίου χαρακτῆρος.
β^3	64	ὁ Κύβος τοῦ 4.
	0	

Ἐὰν

Ἐὰν μεταξὺ τῆς ἐργασίας δὲν δύνηται νὰ ἀφαιρεθῇ κἀνένας ἀριθμὸς, τοῦτο εἶναι Σημεῖον, ὅτι ἐλήφθη ῥίζα μείζων τοῦ δέοντος, καὶ διὰ τοῦτο ἀνάγκη νὰ τεθῇ μικροτέρα εἰς τὸν τύπον τῶν Πηλίκων, ἀφ' οὗ δὲ τελειώσωμεν τὴν ἐργασίαν, ποιοῦμεν τὴν Βάσανον, πολλαπλασιάζοντες πρῶτον τὴν ῥίζαν μεθ' ἑαυτῆς, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸ Γινόμενον, (τὸ Τετράγωνον δηλονότι τῆς ῥίζης ταύτης) αὖθις ἐπὶ τὴν ῥίζαν. καὶ ἂν τὸ δεύτερον Γινόμενον ὑπάρχῃ ἴσον μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, εἶναι δῆλον, ὅτι ἐξήχθη ἐντελῶς ἡ Κυβικὴ ῥίζα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Βάσανος.

28,934,443	1307	438,976	176	76
27		342		76
1934		95976		456
27		147		532
1934443		882		5776
2700		777		76
18900		756		34656
4444		216		40432
4410		216		438976
343		0		
343				
0				

ΣΧΟΛΙΟΝ β.

§. 75. Ἐὰν μετὰ τὴν Ἐργασίαν μείνῃ κανένα λείψανον, εἶναι Σημεῖον, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν εἶναι ἀληθὴς Κύβος, καὶ τὴν ἀληθῆ ῥίζαν δὲν δυνάμεθα ἀκριβῶς νὰ εὕρωμεν, ὅθεν δυνάμεθα

διὰ

ια τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων καὶ ἐξαγάγωμεν τὴν ὡς ἔγγιστα ἀληθῆ ῥίζαν τούτου, προστιθέντες εἰς τὸ λεῖψανον τρία Μηδενικὰ καθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω, (§. 70). οὕτως ἐξάγεται ἐκ τοῦ 54 ἡ ὡς ἔγγιστα Κυβικὴ ῥίζα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ.		Βάσανος.	
54.	3.77	377	
27		377	
27000		2639	
27		2639	
189		1131	
810		142129	Τετράγωνον
441		377	
3690		994903	
343		994903	
		426387	
3347000		53582633	Κύβος.
4107		417367	τὸ καταλειφθέν.
28749			
47210		54,000000	
5439			
417710			
343			
417367	Καταλειφθέν.		

ΣΧΟΛΙΟΝ γ'.

§. 76. Ἐπὶ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων γίνεται ἡ Ἐργασία τῆς Ἐξαγωγῆς, καθὼς ϗ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, πρέπει δὲ νὰ σημειώσωμεν ϗ ἐνταῦθα, ὅτι τὰ Μηδενικὰ πρέπει νὰ εἶναι κατὰ τὸν ἀριθμὸν ἢ τρία, ἢ ἕξ, ἢ ἐννέα, κ. τ. καθὼς αὖθις γίνεται τοῦτο δῆλον διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Δεκαδικῶν ῥιζῶν ἐφ' ἑαυτάς. π. χ. τὸ Τετράγωνον 100 μετὰ τῆς ῥίζης 10 πολλαπλασιασθὲν, παρέχει τὸν Κύβον 1000, τρία Μηδενικά. τὸ δὲ Τετράγωνον 10000 Χ μετὰ τῆς ῥίζης 100, παρέχει τὸν Κύβον 1000000, ἕξ Μηδενικά. τὸ δὲ Τετράγ. 1000000 Χ μετὰ τῆς ῥίζης 1000, παρέχει Κύβον 1000000000 ἐννέα Μηδενικά. πρέπει λοιπὸν νὰ προσθέτωμεν ἐν τοῖς Δεκαδικοῖς Κλάσμασιν εἰς τὸ πλῆθος τόσα Μηδενικὰ Σημεῖα. ἂν δὲ τὸ δοθὲν Ποσὸν εἶναι Μικτὸν, τότε Μερίζομεν τὸ ὁλοσχερὲς ξεχωριστά, ϗ τὰ Δεκαδικὰ ξεχωριστὰ εἰς Κλάσεις, καθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω (§. 71.). νὰ ἐξαγάγωμεν ἐκ τοῦ 0,3758, ϗ 146. 37. τὴν Κυβικὴν ῥίζαν.

375,800	0.72	146.370	5.2
343		125	
32800		21370	
147		75	
294		150	
340		637	
84		60	
2560		5770	
8		8	
2552	κ. τ. λ.	5762	κ. τ. λ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ δ'.

§. 77. Ε'ὰν παρατηρήσωμεν ἀκριβέστερον τὰ Α'λγεβραϊκὰ Σχήματα τῶν Δυνάμεων, καὶ ἐξετάσωμεν τοὺς Κανόνας, καθ' οὓς τόσον οἱ Συνεργοὶ, ὅσον καὶ οἱ Δυναμοδεῖκται αὐξάνουσι, καὶ ἐλαττοῦνται, θέλομεν εὕρη, ὅτι δύναται νὰ σχηματισθῇ ἕνας Γενικὸς Κανὼν, καθ' ὃν δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τὰ Μέλη σὺν τοῖς αὐτῶν Συνεργοῖς καὶ Δυναμοδείκταις, χωρὶς νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸ διδόμενον Ποσὸν μετὰ τῆς ῥίζης πρὸς ὕψωσιν Δυνάμεων. αἱ Δυνάμεις τοῦ $\alpha+\beta$ εἰσὶν αἱ ἑξῆς.

$$\alpha'.)\quad \alpha+\beta$$
$$\beta'.)\quad \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$
$$\gamma'.)\quad \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$\delta'.)\quad \alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4. \qquad \kappa.\tau.$$

Ο' ἀριθμὸς τῶν Μελῶν, ἢ ὅρων πάντοτε εἶναι μείζων τοῦ Δυναμοδείκτου τῆς ζητουμένης Δυνάμεως Μονάδι. οἱ Δυναμοδεῖκται τοῦ α ἐλαττοῦνται κατὰ τάξιν Μονάδι, οἱ δὲ τοῦ β αὐξάνουσιν. Ο' Συνεργὸς τοῦ Δευτέρου Μέλους εἶναι πάντοτε Ἴσος μὲ τὸν Δυναμοδείκτην τοῦ πρώτου. οἱ δὲ Συνεργοὶ τῶν ἐπιλοίπων Μελῶν εἶναι τὸ Γινόμενον ἐκ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ προηγουμένου Μέλους καὶ τοῦ ἰδίου Συνεργοῦ, διαιρεθὲν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν. π. χ. ἐν τῷ $(\alpha+\beta)^4$ πρῶτον Μέλος εἶναι α^4. ὁ Συνεργὸς ἄρα τοῦ δευτέρου Μέλους ὑπάρχει ὁ 4, καὶ ὁ Δυναμοδείκτης τοῦ α εἶναι ὁ 3, τοῦ δὲ β εἶναι ἡ Μονὰς ($4\alpha^3\beta$). Ο' Συνεργὸς τοῦ τρίτου Μέλους εἶναι τὸ Γινόμενον ἐκ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ δευτέρου Μέλους, καὶ ἐκ τοῦ Συνεργοῦ αὐτοῦ, ἤτοι $3\times4=12$ διαιρεθὲν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 2, ὅπερ ἐστὶ $=6$. ὁ Δυναμοδείκτης τοῦ α εἰς τὸ τρίτον Μέλος εἶναι ὁ 2, καὶ τοῦ β ὡσαύτως ὁ 2, ($6\alpha^2\beta^2$). καὶ πάλιν ὁ Συνεργὸς τοῦ τετάρτου Μέλους εἶναι ὁ τοῦ προτέρου Μέλους Συνεργὸς Πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ αὐτοῦ Μέλους, τουτέστι $6\times2=12$, καὶ Διαιρεθεὶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 3, καὶ οὕτω προκύπτει ὁ Συνεργὸς τοῦ τετάρτου

τάρτου Μέλους ὁ 4. ὁ δὲ Δυναμοδείκτης τοῦ α εἶναι ἡ Μονάς. τοῦ δὲ β ὁ 3 ($4\alpha\beta^3$). Ϗ ἐν ἑνὶ λόγῳ ὁ Συνεργὸς τοῦ πέμπτου Μέλους εἶναι $4 \times 1 = \frac{4}{4} = 1$. Τὸ α ἔχει Ἐκθέτην τὸ 0. ἄρα $\alpha^0 = 1$, ἐπειδὴ δὲ ἡ Μονὰς δὲν γράφεται, διὰ τοῦτο μένει τὸ Τέταρτον Μέλος β^4 μόνον. Ἔστω ἡ ῥίζα $\alpha+\beta$ διὰ νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν ὀγδόην Δύναμιν ἤτοι $(\alpha+\beta)^8$, ὅθεν γράφομεν πρῶτον τὸ Ποσὸν α μετὰ τῶν Δυναμοδεικτῶν ἐλαττουμένων, οἷον $\alpha^8, \alpha^7, \alpha^6, \alpha^5, \alpha^4, \alpha^3, \alpha^2, \alpha$. ἔπειτα πλησίον τούτου τίθεμεν Ϗ τὸ β, μετὰ τῶν Δυναμοδ. αὐξανομένων, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ δευτέρου Μέλους ἕως εἰς τὸ ἔνατον. ἐπειδὴ ζητεῖται ἡ ὀγδόη Δύναμις. οἷον. $\alpha^8, \alpha^7\beta, \alpha^6\beta^2, \alpha^5\beta^3, \alpha^4\beta^4, \alpha^3\beta^5, \alpha^2\beta^6, \alpha\beta^7, \beta^8$. Ὁ μὲν Συνεργὸς τοῦ δευτέρου Μέλους εἶναι 8 = τῷ Δυναμοδείκτῃ τοῦ πρώτου. Ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ τρίτου Μέλους εἶναι ὁ προηγούμενος Συνεργὸς 8, πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ Δυναμοδείκτου 7, οἷον $8 \times 7 = 56$, Ϗ διαιρεθεὶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 2, $56 : 2 = 28$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ τετάρτου Μέλους εἶναι $= 28 \times 6 = 168$, Ϗ διαιρεθεὶς διὰ τοῦ 3 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν, $168 : 3 = 56$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ πέμπτου $= 56 \times 5 = 280 : 4 = 70$. ὁ Συνεργὸς τοῦ ἕκτου εἶναι $70 \times 4 = 280 : 5 = 56$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ ἑβδόμου εἶναι $56 \times 3 = 168 : 6 = 28$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ ὀγδόου Μέλους εἶναι $28 \times 2 = 56 : 7 = 8$, ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ ἐννάτου εἶναι $8 \times 1 = 8 : 8 = 1$. κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον πορίζόμεθα τὸ Ἀλγεβραϊκὸν Σχῆμα τῆς ὀγδόης Δυνάμεως ἄνευ Πολλαπλασιάσεως

$$\alpha^8+8\alpha^7\beta+28\alpha^6\beta^2+56\alpha^5\beta^3+70\alpha^4\beta^4+56\alpha^3\beta^5+28\alpha^2\beta^6+8\alpha\beta^7+\beta^8.$$

Εἰς ἐκεῖνο τὸ Μέλος εἰς τὸ ὁποῖον οἱ Δυναμοδεῖκται τοῦ α Ϗ τοῦ β εἶναι ἴσοι ἀλλήλοις (τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε εἰς τὸ μεσαίτατον Μέλος, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν Μελῶν τυγχάνῃ περιττὸς) ἔχει τὸν μέγιστον Συνεργόν, ἀπὸ δὲ τοῦ μεσαιτάτου τούτου Μέλους μέχρι τέλους ἐλαττοῦνται οἱ Συνεργοί, καθ' ὃν τρόπον πρότερον ηὔξησαν ἤτοι ἀπὸ τοῦ πρώτου Μέλους μέχρι τοῦ μεσαιτάτου. π. χ. εἰς τὸ προτεθὲν Παράδειγμα οἱ μὲν τέσσαρες προηγούμενοι Συνεργοί εἰσὶν 1, 8, 28, 56, ὁ δὲ μεσαίτατος 70, Ϗ ὕστερον οἱ τελευταῖοι τέσσαρες πάλιν 56, 28, 8, 1. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν Μελῶν ἄρτιος ὑπάρχῃ, ὡς εἰς τὴν ἐννάτην Δύναμιν τοῦ $\alpha + \beta$. οἷον $\alpha^9 + 9\alpha^8\beta$ +

$+ 36\alpha^7\beta^2 + 84\alpha^6\beta^3 + 126\alpha^5\beta^4 + 126\alpha^4\beta^5 + 84\alpha^3\beta^6 + 36\alpha^2\beta^7 + 9\alpha\beta^8$ $+ \beta^9$. τότε τὰ δύω μεσαίτατα Μέλη ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἢ μέγιστον Συνεργὸν, ὅθεν ἐλαττοῦνται πάλιν ἕως τέλους κατὰ τὸν λόγον καθ' ὃν ηὔξησαν ἀπ' ἀρχῆς. ἀναγκαῖον λοιπὸν νὰ διατάττωμεν τοὺς ὑπολογισμοὺς ἕως εἰς τὸν μέγιστον Συνεργὸν καὶ εἰς τὰ μετὰ τὸ μεσαίτατον Μέλη νὰ προσγράφωμεν τοὺς αὐτοὺς Συνεργοὺς, ὅμως κατ' ἀνεστραμμένην τάξιν, καθὼς ἐν τῷ προτέρῳ Παραδείγματι, οἱ τρεῖς πρῶτοι Συνεργοί εἰσιν 8, 28, 56. ὁ δὲ μέγιστος 70, ἔπειτα οἱ τελευταῖοι τρεῖς 56, 28, 8.

ΣΧΟΛΙΟΝ έ.

§. 78. Ἐὰν ἐκλάβωμεν τὴν Δύναμιν, ἢ ἀξίαν γενικῶς καὶ ἀδιορίστως, τότε τὸν Ἐκθέτην τῆς Δυνάμεως ὀνομάζομεν μ, καὶ τὸ μὲν πρῶτον Μέλος ἔσται α^{μ}. τὸ δὲ δεύτερον $\mu\alpha^{\mu-1}.\beta$. τὸ δὲ τρίτον $\frac{\mu.\mu-1}{1.2}\alpha^{\mu-2}.\beta^2$. τὸ δὲ τέταρτον $\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}\alpha^{\mu-3}.\beta^3$ κ.τ.λ. τὸ α ὅμως δύναται νὰ λείψῃ, καὶ ἡ Σειρὰ αὕτη νὰ πλειώσῃ, ἐὰν ὁ ἀπὸ τοῦ μ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ α ἀφαιρετέος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ μ. ἐπειδὴ τότε ἔσται $\alpha^{\mu-\mu} = \alpha^0 = 1$, καὶ αὕτη ἡ Μονὰς εἶναι ὁ Συνεργὸς τοῦ ἐσχάτου Μέλους τοῦ β.

ΣΧΟΛΙΟΝ ς'.

§ 79. Αὗται αἱ γενικαὶ Ἐκθέσεις χρησιμεύουσι μάλιστα εἰς τὸ νὰ ἐφευρίσκωμεν διάφορα Θεωρήματα, καὶ Ἰδιότητας, καθὼς θέλομεν ἰδῆ ἐν τῷ ἑξῆς Κεφαλαίῳ σαφέστερον. κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δυνάμεθα ἐκ τῆς γενικῆς Ἐκθέσεως τοῦ Διμελοῦς Τετραγώνου $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ νὰ συμπεραίνωμεν (ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ $\beta = 1$), ὅτι τὸ Τετράγωνον τῆς Μονάδι αὐξηθείσης ῥίζης εἶναι ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τῆς προτέρας ῥίζης, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ Διπλάσιον

τῆς

τῆς ῥίζης ἢ μίαν Μονάδα. ἐπειδὴ ὅτω τὸ πρότερον Σχῆμα μετασχηματίζεται εἰς τὸ ἑξῆς $aa+2a+1$ ὅθεν τὸ Τετράγωνον τῶ 13 (τετέςι τὸ 169) εἶναι ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τῶ 12 (τετέςι τῷ 144), ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ Διπλῦν τῶ 12 ϗ μίαν Μονάδα. ἐκ δὲ τῆς γενικῆς Ἐκθέσεως τῶ Κύβυ $a^3+3a^2\beta+3a\beta^2+\beta^3$, (ἐὰν εἶναι τὸ $\beta = 1$) γίνεται δῆλον, ὅτι ὁ Κύβος τῆς Μονάδι αὐξηθείσης ῥίζης ἴσος ἐςὶ μὲ τὸν Κύβον τῆς προτέρας ῥίζης, ἐὰν εἰς τῦτον προςεθῆ τὸ Τριπλάσιον Τετράγωνον τῆς προτέρας ῥίζης ϗ τὸ Τριπλάσιον τῆς ῥίζης, ἢ μία Μονὰς οἷον a^3+3a^2+3a+1, ὅτω ἐξ περὶ τῶν λοιπῶν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ έ.

Περὶ λογισμῦ τῶν ῥιζικῶν Ποσῶν.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ ά.

§. 80. Ῥιζικὸν Ποσὸν λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τῦτο τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον $\sqrt{}$ πρὸ ἑαυτῦ κείμενον ὡς $\sqrt{a}$, $5\sqrt[4]{a^3}$, $\delta\sqrt[\mu]{a^\nu}$, $\sqrt{16}$, $4\sqrt[3]{20}$. κ. τ. ὁ δὲ ἀριθμὸς, ἢ τὸ Γράμμα τὸ πρὸ τῦτε τῦ ῥιζικῦ Σημείου εὑρισκόμενον λέγεται τῆς ῥίζης, ἢ ῥιζικὸς, Συνεργός. ὅταν ὅμως δὲν εὑρίσκηται γεγραμμένος κἀνένας τοιῦτος Συνεργὸς, ἐννοεῖται τότε ἡ Μονάς. ὁ δὲ ἐπὶ τῦ ῥιζικῦ Σημείου