ΕΣ ἐξισῦται τῇ ΣΛ, ὥσπερ δὴ ϰ ἡ ΕΝ τῇ ΝΠ, ὅθεν τὸ σημεῖον Λ ἔσεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΠΥ, ἧς περ ἴδιον τὸ τοιῦτο, κατὰ τὸ τέταρτον Πόρισμα τῆς Παρέσης (80).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Σχημ. 64. 65. Ὁριθέντων ἐπὶ τῦ πλαγίυ ἄξονος τῆς Ἐλλείψεως ϰ τῶν ὀντικειμένων Ὑπερ-

---

Σχημ. 9. τῶν ὑπασ. 80) Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται ὅτι οἱαδήτις ὀρθὴ γωνία μλβ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων μλ, βλ, περιεχομένη, ἔσεται πρὸς τῇ τῦ Μετεωρισμῦ εὐθείᾳ ΠΥ. Πᾶσα ἄρα ὀρθὴ γωνία, ἣν αἱ ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν διὰ τῆς Ἑςίας Ε διερχομένων εὐθειῶν ἀχθεῖσαι ἐφαπτόμεναι συνιςῶσιν, ἐπὶ τῆς τῦ Μετεωρισμῦ εὐθείας συςήσεται.

81. Ἐὰν ἐφ' οἱασδή ποτε εὐθείας διὰ τῆς Ἑςίας Ε διϊκσης μβ, κάθετος ςαθῇ ἡ Ελ τῇ τῦ Μετεωρισμῦ εὐθείᾳ ΠΥ κατὰ τὸ Λ συμβάλλυσα, τὸ σημεῖον τῦτο λ ἔσεται σημεῖον συνδρομῆς τῶν ἐφαπτομένων μλ, βλ, εἰδὲ μή, αἱ ἐφαπτόμεναι ἄρα, αἱ ἀπὸ τῶν σημείων μ, β ἀχθεῖσαι συμπεσῦνται ἤτοι κατὰ τὸ Κ, ἢ κατὰ τὸ Π, συμπιπτέτωσαν ἄρα κατὰ τὸ Κ, ϰ ἔσεται δὴ ἡ ὑπὸ μΕΚ, ὀρθή· (Πόρ. Θ'. τῆς Παρέσης)· ὀρθὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως ϰ ἡ ὑπὸ μΕλ, ἄρα ἡ ὑπὸ μΕΚ ἔςαι ἴση τῇ ὑπὸ μΕλ, ὅπερ ἄτοπον. Εἰδὲ τὸ τῆς συνδρομῆς σημεῖον ὑποτεθῇ ἐν τῷ Π ἔσεται τηνικαῦτα ἡ ὑπὸ μΕΠ ἴση τῇ ὑπὸ μΕλ· ὃ δὴ ϰ αὐτὸ ἄτοπον. Τὸ λ ἄρα ἔσεται σημεῖον τῆς τῶν ἐφαπτομένων συμπτώσεως.

82. Εὐθείας τῆς ΜΕΒ διὰ τῆς Ἑςίας διϊκσης προκείσθω ἑτέραν εὐθεῖαν τὴν μΕβ ὕτω διέρχεσθαι ὡς εἶναι ΒΕΜ : βΕμ = μ : ν. Γενέσθω μ : ν ὡς ΕΛ πρὸς τετάρ-

βολῶν τῶν ὀρθογωνίων ΞΕΝ, ΝΥΞ ἴσων τῷ ἀπὸ τῆ δευτέρε συζυγῆς ἡμιάξονος ΓΒ τετραγώνῳ, ἢ τῷ τεταρτημορίῳ τῆ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΞΝ ϗ τῆς ὀρθίας ΝΣ περιεχομένου ὀρθογωνίε, ἐὰν ἀφ' ἑκατέρε τῶν σημείων Ε, Υ, ἐπιζευχθῶσιν ἐφ' οἱονδήποτε σημεῖον Μ τῆς καμπύλης. Αἱ εὐθεῖαι ΕΜ, ΥΜ, αὗται δὴ περιέξεσι μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ΘΜΖ γωνίας ἴσας τῆς ΥΜΖ, ΕΜΘ. Τὰ δὲ σημεῖα Ε, Υ καλείσθων *ΕΣΤΙΑΙ* τῶν ἠρημένων τομῶν.

Αἱ *κατὰ κορυφὴν τῆ ἄξονος ἐφαπτόμεναι* ΞΖ, ΝΟ *συμπιπτέτωσαν ἑτέρα ἐφαπτομένῃ τῇ διὰ τῆ* Μ *ἀχθείσῃ* ΜΘ *κατὰ τὰ σημεῖα* Ζ, Ο· *ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπό τε τῆς* ΞΖ *ϗ τῆς* ΝΟ *περιεχόμενον, ὅπερ ἐξισῦται τῷ ἀπὸ τῆς* ΓΒ *τετραγώνῳ*

την ζητεμένην τὴν ΕΚ, ϗ ἐν ταῖς ΕΛ, ΕΚ εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος ἡ Ελ, πρὸς ἣν ἤχθω διὰ τῆς Ε'ςίας κάθετος ἡ μ Εβ· αὕτη δὴ ἔσεται ἡ ζητεμένη εὐθεῖα. Ἐπεὶ γάρ ἐςι $\mu : \nu = ΕΛ : ΕΚ$, *ϗ αἱ ΕΛ, Ελ, ΕΚ συνεχῶς ἀνάλογον· ἄρα* $ΕΛ : ΕΚ$ *ὡς* $ΕΛ^2 : Ελ^2$· *ἀλλὰ* $ΕΛ^2 = ΜΕΒ$, *ϗ* $Ελ^2 = \mu Εβ$, *(Πορ. θ'.) ἄρα* $\mu : \nu = ΜΕΒ : \mu Εβ$, *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

(Πρότασ. ΙΘ΄.), ἐξισωθήσεται τῷ ὀρθογωνίῳ ΞΕΝ ἢ τῷ ΝΥΞ· ϗ δὴ ἔςαι ὡς ἡ ΞΖ πρὸς ΞΕ, ὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΟ· καὶ ὡς ἡ ΞΖ πρὸς ΥΞ, ὕτως ἡ ΥΝ πρὸς ΝΟ, ὅθεν ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΖΥ, ΟΥ, ϗ ΖΕ, ΕΟ ἔσεται τὸ τρίγωνον ΖΞΥ ὅμοιον τῷ ΟΥΝ, τότε ΖΞΕ, ὅμοιον τῷ ΟΝΕ (83)· ἄρα ἡ γωνία ΞΥΖ ἴση τῇ ὑπὸ ΝΟΥ (5 τῦ ς΄.) Καὶ ἐπεὶ αἱ γωνίαι ΝΟΥ, ΝΥΟ ἅμα ληφθεῖσαι ἐξισῦνται ὀρθῇ, (ὕσης ἐν τῷ τριγώνῳ ΟΝΥ ὀρθῆς), ὀρθῇ ἄρα ἐξισωθήσεται ϗ ἡ ὑπὸ ΞΥΖ (ἥτις ἐςιν ἴση τῇ ΝΟΥ) σὺν τῇ ΝΥΟ, διὰ δὴ τῦτο ὀρθὴ ἔςαι ϗ ἡ ὑπὸ ΟΥΖ.

Ὡσαύτως ἐπεὶ ἡ γωνία ΞΕΖ ἐςιν ἴση τῇ ΝΟΕ ϗ ἡ ΝΕΟ ἅμα τῇ ΞΕΖ (=ΝΟΕ) ἐξισῦται ὀρθῇ (Πορ. 6 τῆς 32 τῦ Α΄.) ὀρθὴ ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ ΖΕΟ. Ὅθεν ἡμικύκλιον ἐπὶ διαμέτρου τῆς ΖΟ καταγραφὲν, διὰ τῶν σημείων Υ, Ε διελεύσεται, τὰς ὀρθὰς γωνίας ΖΥΟ, ΖΕΟ περιέχον (31 τῦ Γ΄.)· ϗ ἀχθείσης διὰ τῦ σημείυ Ο τῆς εὐθείας ΑΟ παραλλήλου τῇ ΥΖ, ἣν τεμεῖ κατὰ τὸ Ι ἡ εὐθεῖα

83) Ἐπεὶ ἡ ΞΝ ἐςιν ἄξων τῶν ἀντικειμένων Ὑπερβολῶν ϗ τῆς ἐλλείψεως, ϗ αἱ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτόμεναι ταῖς τεταγμέναις παράλληλοι, αἱ γωνίαι ΖΞΥ, ΟΝΕ ὀρθαὶ εἰσὶ ϗ ἑπομένως ἴσαι· Ὅθεν ἐπεὶ ἐςιν ὡς ἡ ΖΞ : ΞΥ =ΥΝ : ΝΟ, ἄρα τὰ τρίγωνα ΖΞΥ, ΟΥΝ, ὅμοια (6. τῦ ς΄.). Ὡσαύτως ἐπεὶ αἱ γωνίαι ΖΞΕ, ΟΝΕ ὀρθαὶ, ϗ ὡς ἡ ΕΝ : ΝΟ=ΖΞ : ΞΕ, ἄρα ϗ τὰ τρίγωνα ΖΞΕ, ΟΝΕ ὅμοια (6. τῦ ς΄.)

ΥΜ, ἔσεται ἡ γωνία ΑΟΥ ὀρθή, ὡς ἴσον τῇ ΖΥΟ ἐναλλὰξ καὶ ἐντὸς τῶν παραλλήλων ΥΖ, ΑΙ (ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ὡς δύω ὀρθὰς ἀναπληροῦσα σὺν τῇ ὀρθῇ ΖΥΟ)· ἔςι δὲ καὶ ἡ ΑΟ ἴση τῇ ΟΙ. Εἴγε τεταγμένης τῆς ΜΚ, ἐπειέςιν ὡς ἡ ΞΘ πρὸς ΟΝ, οὕτως ἡ ΞΚ πρὸς ΚΝ (Πορ. ΙΓ΄ τῆς Θ΄.) ἔςαι καὶ ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΘΟ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς ΜΟ (84)· ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΖΘ πρὸς ΘΟ, οὕτως ἡ ΖΥ πρὸς ΑΟ, ὡς δὲ ἡ ΖΜ πρὸς ΜΟ, οὕτως ἡ ΖΥ πρὸς ΟΙ· ὡς ἄρα ἡ ΖΥ πρὸς ΑΟ, οὕτως ἡ ΖΥ πρὸς ΟΙ, ὅθεν ἡ ΑΟ ἴση τῇ ΟΙ (9 τοῦ Ε΄.) ἡ γωνία ἄρα ΟΥΙ, ἴση τῇ ΟΥΑ (85) ἐν τοῖς ἴσοις καὶ ὁμοίοις τριγώ-

---

84) Ὅτι δὲ ἔσεται ὡς ἡ $Z\Theta : \Theta O = ZM : MO$ καὶ ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς δείκνυται οὕτως. Ἐπεὶ τὰ τρίγωνα $\Xi\Theta Z$, $\Theta N O$ ἐςὶν ὅμοια, ἔσεται ὡς ἡ $\Xi\Theta : \Theta\Xi = Z\Theta : \Theta O$ καὶ συντεθέντα $\Xi\Theta + \Theta N : \Theta N = \Theta Z + \Theta O : \Theta O$, ἤτοι $\Xi N : \Theta N = ZO : \Theta O$· καὶ ἐναλλὰξ $\Xi N : ZO = N\Theta : \Theta O$ καὶ ἀνάπαλιν $ZO : \Xi N = \Theta O : N\Theta$, καὶ (διὰ τὴν τῶν τριγώνων $N\Theta O$, $K\Theta M$ ὁμοιότητα) $= OM : NK$, ὅθεν ἐναλλὰξ μὲν $ZO : OM = \Xi N : NK$, συνθέσει δὲ αὖθις $ZM : OM = \Xi K : NK$. ἀλλὰ $\Xi K : NK = \Xi\Theta : \Theta N = Z\Theta : \Theta O$, ἄρα $ZM : OM = Z\Theta : \Theta O$.

Ἄλλως. $MO : NK = \Theta O : \Theta N = \Theta Z : \Xi\Theta$, ἄρα εἷς τις ἡγέμενος MO πρὸς τὸν αὐτοῦ ἑπόμενον NK ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγεμένων MO, ΘO, ΘZ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων NK, ΘN, $\Xi\Theta$, ἤτοι ὡς MZ πρὸς ΞK, ἄρα $MZ : MO = \Xi K : NK = \Xi\Theta : \Theta N$ (Πόρ. ΙΘ.)

85) Ἡ γωνία $OYI =$ τῇ OYA· ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθη ὀρθὴ ἡ AOY, ὀρθὴ ἔσεται δὲ καὶ ἡ ἐφεξῆς αὐτῆς YOI·

νοις ΟΤΙ, ΟΤΑ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΟΤΑ γωνία ἴση ἐστι τῇ ΟΖΕ· τῷ αὐτῷ γὰρ τόξῳ ΟΕ ἄμφω ἐπιβεβήκασι (21 τοῦ Γ'.) ἄρα καὶ ἡ γωνία ΟΤΙ ἴση τῇ ΟΖΕ· καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Η, καθ' ὃ αἱ ΥΟ, ΖΕ συνέρχονται, ἐπιζευχθεῖσα ἐπὶ τὸ Μ ἡ εὐθεῖα ΗΜ, ἔσεται τῇ ἐφαπτομένῃ ΖΜ κάθετος. Εἴγε ἐπεὶ αἱ γωνίαι ΖΥΜ, ΗΖΜ εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις, κύκλος ἄρα διὰ τῶν σημείων, Η, Υ, Ζ, Μ δύναται γραφῆναι (ὑποσημ. 6), οὔσης ὀρθῆς τῆς γωνίας ΗΜΖ, ὅτε δὴ ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλλείψεως, ἀπεναντίον οὔσης τῇ ὀρθῇ ΗΥΖ, ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῇ ΗΥΖ· ὅθεν ὀρθὴ ἔσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΗΜΟ· ἧς τινος καὶ αὐτῆς ἀπεναντίον οὔσης τῇ ἑτέρᾳ ὀρθῇ ΗΕΟ (οὔσῃ ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλλείψεως ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ, ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἀπεναντίον τῇ ΟΕΗ, ἥτις ἐστὶν ἐφεξῆς τῆς ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ συνισταμένης ΟΕΖ), καὶ διὰ τῶν σημείων ἄρα Μ, Η, Ε, Ο κύκλος δύναται διελθεῖν (86). Ἄρα ἡ γωνία ΥΜΖ ἴση τῇ ΥΗΖ (ἄμ-

---

ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΟΥ ἴση τῇ ὑπὸ ΥΟΙ. Ἐπεὶ δὲ προσέτι καὶ ἡ ΑΟ = τῇ ΟΙ. ἥ τε ΟΥ κοινή, τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΥΟ = τῷ ΟΥΙ (4. τοῦ Α'.) καὶ δὴ καὶ ἡ γωνία ΟΥΑ = τῇ ΟΥΙ.

86) *Τεθέντος τοῦ τριγώνου ΗΕΟ (σχήμ. 10. ὑποσημ.) ὀρθογωνίου ἐν τῷ Ε, ἐὰν διαμέτρῳ τῇ ΗΟ κύκλος καταγραφῇ, οὗτος δὴ διὰ τοῦ σημείου Ε διελεύσεται· εἰ μὴ γάρ, διελθέτω, εἰ δυνατόν, διὰ τοῦ Ρ, καὶ δὴ τότε καὶ ἡ ὑπὸ ΗΡΟ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ οὖσα, ἔσται ὀρθὴ (31. τοῦ -*

φω γὰρ ἐπιβεβήκασι τῷ αὐτῷ τμήματι τοῦ διὰ τῶν σημείων Η, Υ, Ζ, Μ διερχομένου κύκλου), ἤτε ὑπὸ ΕΜΟ ἴση τῇ ΕΗΟ. Εἴγε ἑκατέρα ἐστὶν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τοῦ διὰ τῶν σημείων Μ, Η, Ε, Ο διερχομένου κύκλου. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΥΗΖ ἐστὶν ἴση τῇ ὑπὸ ΕΗΟ, (ἐν μὲν γὰρ τῇ ἐλλείψει ἐστὶ κατὰ κορυφὴν ἀντικειμένη ἡ πρώτη τῇ δευτέρᾳ, ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ ταυτίζεται ἡ δευτέρα τῇ πρώτῃ), ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΥΜΖ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΜΟ. Ἄρα αἱ γωνίαι, ἃς οἱ ἀπὸ τῶν Ἑστιῶν κλῶνοι πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ τῆς τομῆς Μ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης περιέχουσιν, εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις. Ο, ε, δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Διὸ δὴ αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου Υ πρὸς τὴν περίμετρον τῆς ἐλλειπτικῆς ἢ ὑπερβολικῆς τομῆς προσπίπτουσαι ἀκτῖνες ἀνακλῶνται ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως ἐπὶ τὸ ἕτερον σημεῖον Ε, ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἐπὶ τὸ Ρ οὕτως, ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ε ἀπευθύνεσθαι. Ἡ γάρ τοι γωνία τῆς ἀνακλάσεως ΡΜΨ

Γ΄.). Ἔστι δὲ ἐξ ὑποθέσεως ὀρθὴ καὶ ἡ ΗΕΟ, ἡ ἐκτὸς ἄρα γωνία ΗΡΟ ἴση ἔσται τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ΗΕΟ, ὅπερ ἀντιπίπτει τῷ πρώτῳ Πορίσματι τῆς 3ου τοῦ Α΄. Εἰδὲ ὑποτεθῇ διέρχεσθαι διὰ τοῦ ρ τότε πάλιν ἡ ΗρΟ ὀρθὴ οὖσα, ἔσεται ἴση τῇ ἐκτὸς ΗΕΟ, ὃ δὴ καὶ αὐτὸ ἀντιπίπτει τῷ αὐτῷ Πορίσματι. Διελεύσεται ἄρα διὰ τοῦ Ε.

ἐςιν ἴση τῇ τῆς προσπτώσεως ΥΜΖ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση τῇ κατὰ κορυφὴν αὐτῇ ἀντικειμένῃ ΟΜΕ (87)· καὶ ἀνάπαλιν αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου Ε ἐπὶ τὴν τομὴν ΜΝ προσπίπτουσαι ἀνακλασθήσονται ἐπὶ τὴν ἑτέραν Ἑςίαν Υ ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως, ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς οὔσης τῆς γωνίας ΦΜΨ ἴσης τῇ κατὰ κορυφὴν ἀντικειμένῃ ΥΜΖ (15 τοῦ Α'.). Ἑπομένως δὲ καὶ τῇ τῆς προσπτώσεως γωνίᾳ ΕΜΖ, ἀνακλασθήσεται ἡ ΕΜ ἐπὶ τὴν ΜΦ, ἥτις πρὸς τὸ σημεῖον Υ ἀπευθύνεται (οὕτω γὰρ δέον τὴν ἀκτῖνα ΕΜ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς ΟΜΨ προσπίπτουσαν ἀνακλᾶσθαι, ὥςε τὴν τῆς προσπτώσεως γωνίαν ΕΜΖ ἴσην εἶναι τῇ τῆς ἀνακλάσεως γωνίᾳ). Ἄρα ἐπεὶ ἡ γωνία ΦΜΨ ἐςιν ἴση τῇ ΕΜΖ, ἡ ἀκτὶς ΕΜ ἀνακλᾶται ἐπὶ τὴν ΜΦ, ἥτις μετὰ τῆς ΜΥ μίαν εὐθεῖαν συνίςησιν (88). Διὰ δὴ τοῦτο τὰ

---

87) Ὅθεν δῆλον ὅτι κύκλος δύναται διελθεῖν διὰ τῶν τεσσάρων σημείων *Μ*, *Η*, *Ε*, *Ο* τοῦ τετραπλεύρου *ΜΗΕΟ*, οὗ αἱ ἀπ' ἐναντίον γωνίαι *Ε*, *Μ* εἰσιν ὀρθαί. Ἐπεὶ γὰρ ἡ πρὸς τῷ *Ε* γωνία ἐςιν ὀρθὴ, κύκλος διαμέτρῳ τῇ *ΗΟ* καταγραφεὶς, διὰ τοῦ σημείου *Ε* διελεύσεται· ὡσαύτως ἐπεὶ ἡ γωνία *ΗΜΟ* ἐςιν ὀρθὴ, ὁ αὐτὸς κύκλος διαμέτρῳ τῇ αὐτῇ *ΗΟ* συμπληρωθεὶς, καὶ διὰ τοῦ σημείου Μ διελεύσεται (σημ. 86.). Κύκλος ἄρα διὰ τῶν σημείων *Μ*, *Η*, *Ε*, *Ο* διελεύσεται.

88) Ἐπεὶ ἡ γωνία *ΡΜΨ* $=$ τῇ *ΟΜΕ*, ἔσεται ἡ γωνία *ΡΜΨ* $+$ τῇ *ΡΜΟ* $=$ *ΟΜΕ* $+$ *ΡΜΟ*· Εἰσὶ δὲ αἱ *ΡΜΨ*, *ΡΜΟ* ἅμα ληφθεῖσαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (13. τοῦ *Α*.), ἄρα καὶ αἱ *ΟΜΕ*, *ΡΜΟ* ἅμα ληφθεῖσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι· ἄρα ἡ *ΡΜΕ* ἐςιν εὐθεῖα γραμμή. (14.

σημεῖα ταῦτα καλοῦνται Ἑστίαι, φωτὸς γὰρ ἐν τῷ ἑτέρῳ τούτων τεθέντος αἱ ἀκτῖνες ὑπὸ τῆς ἐλλειπτικῆς καμπύλης ἀνακλώμεναι, ἐπὶ θάτερον συνέρχονται. Ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς αἱ τοῦ ἐν τῇ ἑτέρᾳ Ἑστίᾳ τεθέντος ἀκτινοβόλου φωτὸς ἀκτῖνες ἀνακλώμεναι τὴν ἑαυτῶν εἰκόνα ἐπὶ τὴν ἑτέραν Ἑστίαν ἐπαναπέμπουσι. Τὸ αὐτὸ δὴ τοῦτο νοητέον ϗ περὶ τῶν ἐν τοῖς ἐλλειπτικοῖς ϗ ὑπερβολικοῖς Ἐνόπτροις ὁρωμένων ἀντικειμένων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

Αἱ τῆς Ἐλλείψεως ϗ Ὑπερβολῆς Ἑστίαι ὁρισθήσονται, ἐὰν ἐφ᾽ οἱασδήποτε ἐφαπτομένης ΟΜ μεταξὺ τῶν κατὰ κορυφὴν ἁπτομένων ΝΟ, ΞΖ ἐμπεριλαμβανομένης ὡς διαμέτρου κύκλος καταγραφῇ τέμνων τὸν ἄξονα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Υ, ἅπερ ἔσονται αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι. Αἱ γάρ τοι ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνίαι ΟΥΖ, ΟΕΖ ὀρθαὶ ἔσονται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β τοῦ δευτέρου ἄξονος προσκλιθῶσιν ἑκατέρωθεν ἐπὶ τὸν πλάγιον ἄξονα ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως εὐθεῖαι ἡ ΒΥ, ΒΕ ἑκατέρα ἴση τῷ πλαγίῳ ἡμιάξονι ΓΝ, ἢ ΓΞ, τὰ ση-

---

τοῦ *Α*.) Ὅθεν αἱ ἀκτῖνες *ΜΡ* ἀνακλασθεῖσαι ἐπὶ τὸ *Ρ* ἀπευθύνονται πρὸς τὸ σημεῖον *Ε*, ἤτοι ἐπὶ τὸ *Ε* ἐπ᾽ εὐθείας προσατενίζουσιν.

μεῖα Υ, Ε ἔσονται αἱ ζητέμεναι Ἑςίαι. Τηνικαῦτα γὰρ ἐπεὶ τὸ ὀρθογώνιον ΝΕΞ, ἢ τὸ ΞΥΝ σὺν τῷ τετραγώνῳ ἀπὸ τῆς ΓΕ, ἢ ΓΥ ἐξισῦται τῷ ἀπὸ τῆς ΓΝ τετραγώνῳ (5 τῦ Β'.) ἢ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἢ τέως τῷ ἀπὸ τῆς ΒΥ. Τὸ δὲ ἀπὸ ΒΕ ἢ ἀπὸ ΒΥ ἐξισῦται τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΓΕ, ἢ ΓΥ τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν (47 τῦ Α'.), ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΞΕΝ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ τετραγώνῳ ἐξισωθήσεται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· τό,τε ὀρθογώνιον ΝΥΞ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΥ ἐξισωθήσεται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΥ. Τοιγαρῦν τὸ ὀρθογώνιον ΞΕΝ, ὥσπερ καὶ τὸ ΝΥΞ ἔσεται ἴσον τῷ ἀπὸ τῦ δευτέρυ ἡμιάξονος ΒΓ τετραγώνῳ, ὅπερ ἀπειτεῖται εἰς τὸ τὰς Ἑςίας ὁρισθῆναι (Πρότ. Κ'.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

Ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἐὰν τῇ εὐθείᾳ ΝΒ, ἥτις τὰ πέρατα ἑκατέρυ τῦ ἄξονος ἐπιζεύγνυσιν, ἴση τεθῇ ἐπὶ τῦ προτέρυ ἄξονος ἀπὸ τῦ κέντρου Γ ἡ εὐθεῖα ΓΕ, ἢ ΓΥ, τὰ σημεῖα Ε, Υ ἔσονται αἱ ζητέμεναι Ἑςίαι. Τὸ γάρ τοι ὀρθογώνιον ΞΕΝ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΝ τετραγώνῳ ἐξισωθήσεται τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ (6 τῦ Α'.) ἢ τῷ αὐτῷ ἴσῳ ἀπὸ ΒΝ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΝ ἐξισῦται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΝ (47 τῦ Α'.)· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΞΕΝ σὺν τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ ΓΝ ἐξισωθήσεται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΝ, καὶ δὴ τὸ ὑπὸ ΞΕΝ ἔςαι ἴσον τῷ ἀπὸ ΒΓ, καὶ τῇ αὐτῇ δείξει δειχθήσεται, καὶ τὸ ὑπὸ ΝΥΞ ἴσον τῷ ἀπὸ ΒΓ, καὶ τὰ σημεῖα ἄρα Ε, Υ, ἔσονται αἱ ζητούμεναι Ἑςίαι κατὰ τὴν παροῦσαν Πρότασιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑʹ.

Ἐὰν οἱῳδήποτε κλώνῳ ΕΜ ἀπὸ τῆς Ἑςίας Ε πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον Μ τῆς Ἐλλείψεως ἢ τῆς Ὑπερβολῆς ἀχθέντι παράλληλος ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἀχθῇ εὐθεῖα ἡ ΓΙ συμπίπτουσα τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΕ κατὰ τὸ Ι, αὕτη δὴ ἡ ΓΙ ἔσεται ἴση τῷ πλαγίῳ ἡμιάξονι ΓΞ, ἢ ΓΝ. Σχημ. 66. 67.

Ἤχθω ἀπὸ τῆς ἑτέρας Ἑςίας Υ ἡ εὐθεῖα ΥΔ ταῖς μὲν ΕΜ, ΓΙ παράλληλος, τῇ δὲ ἐφαπτομένῃ συμπίπτουσα κατὰ τὸ Δ· ἐπεζεύχθω καὶ ἡ ΥΜ, ἥτις τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΓΙ κατὰ τὸ Τ· ἤχθωσαν δὲ καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτόμεναι ΞΖ, ΝΟ. Τούτων οὕτω γενομένων, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΥΜΖ ἐςὶν ἴση τῇ ὑπὸ ΕΜΟ (29 τοῦ Αʹ.) ἄρα αἱ πλευραὶ ΥΜ, ΥΔ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, (6 τοῦ Αʹ.) ὡς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι. Καὶ ἐπεὶ προσέτι ἐςὶν ὡς ἡ ΜΙ πρὸς ΙΔ, οὕτως ἡ ΜΤ πρὸς ΤΥ (2 τοῦ ϛʹ.) (διὰ τὸ εἶναι τὰς ΓΙ, ΥΔ παραλλήλους) ἢ ἡ ΕΓ πρὸς ΓΥ (διὰ τὸν αὐτὸν λόγον), αἵτινές εἰσιν ἀλλήλαις ἴσαι (89)· ἄρα τῶν τριγώνων ΜΥΙ, ΔΥΙ ἐχόντων τὴν ΥΙ πλευρὰν κοινὴν, καὶ αἱ λοιπαὶ δύω πλευραὶ ΜΥ, ΜΙ ταῖς λοιπαῖς δυσὶ ΔΥ, ΔΙ ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα τῇ ἑκατέρᾳ· ἔνθεντοι (8 τοῦ Α΄.) καὶ αἱ γωνίαι ΜΙΥ, ΔΙΥ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, καὶ ἑπομένως ἑκατέρα ὀρθή. Ὀρθαὶ δέ εἰσι καὶ αἱ ΥΞΖ, ΥΝΟ (οὐσῶν τῶν ἐφαπτομένων ΞΖ, ΝΟ τῷ ἄξονι ΞΝ καθέτων), κύκλος ἄρα διαμέτρῳ τῇ ΥΖ καταγραφεὶς, διὰ τῶν σημείων Ξ, Ι διελεύσεται (Σημ. 87). Ὡσαύτως κύκλος ἕτερος διαμέτρῳ τῇ ΥΟ καταγραφεὶς, διὰ τῶν σημείων Ν, Ι διελεύσεται. Τοιγαροῦν ἡ γωνία ΞΙΥ ἐστὶν ἴση τῇ γωνίᾳ ΞΖΥ· ἐν τῷ αὐτῷ γὰρ τμήματι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἰσὶν ἑκατέρα (21 τοῦ Γ΄.), ἀλλ' ἡ γωνία ΞΖΥ δέδεικται (ἐν τῇ Κ΄. Προτάσει) ἴση τῇ γωνίᾳ ΟΥΝ, ἐστὶ δὲ ἴση τῇ ΝΙΟ καὶ ΟΥΝ (ἄμφω γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τοῦ διὰ τῶν σημείων Ν, Ι, Υ, Ο διερχομένου κύκλου συνεστήκατον)· ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΙΥ ἴση τῇ ὑπὸ ΝΙΟ. Ὅθεν ἐὰν ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλλείψεως προστεθῇ ἑκατέρᾳ ἡ ὑπὸ

---

89) *ΕΓ, ΓΥ* εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις, εἴγε τὸ ὀρθογώνιον *ΞΕΝ* = τῷ *ΝΥΞ* (*Πρότασ. Κ΄.*) ἄρα *ΞΕ : ΝΥ* = *ΥΞ : ΕΝ* (14. τοῦ ς΄.) καὶ ἐναλλὰξ *ΞΕ : ΥΞ* = *ΝΥ : ΕΝ* καὶ ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλλείψεως *ΞΕ* − *ΥΞ : ΥΞ* = *ΝΥ* − *ΕΝ : ΕΝ*, ἤτοι *ΥΕ : ΥΞ* = *ΥΕ : ΕΝ*· ἄρα *ΥΞ* = *ΕΝ*. Ἐπεὶ δὲ *ΓΝ* = *ΓΞ*, ἄρα *ΓΝ* − *ΕΝ* = *ΓΞ* − *ΥΞ*, ἤτοι *ΓΕ* = *ΓΥ*. Ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς *ΞΕ* + *ΥΞ : ΥΞ* = *ΝΥ* + *ΕΝ : ΕΝ*, ἤτοι *ΕΥ : ΥΞ* = *ΕΥ : ΕΝ*. Ὅθεν *ΥΞ* = *ΕΝ*· καὶ ἐπεὶ *ΓΞ* = *ΓΝ*, ἄρα *ΓΞ* + *ΞΥ* = *ΓΝ* + *ΝΕ*, ἤτοι *ΓΥ* = *ΓΕ*.

ΝΙΥ, ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς, ἀφαιρεθῇ ἑκατέρα ἀπὸ τῆς ΝΙΥ, ἔσεται ἡ ὑπὸ ΞΙΝ ἴση τῇ ὑπὸ ΥΙΟ· ἀλλ᾽ αὕτη δέδεικται ὀρθὴ, κἀκείνη ἄρα ὀρθή. Ἔνθεντοι κύκλος ἐπὶ διαμέτρου τῆς ΞΝ καταγραφεὶς, διελεύσεται διὰ τοῦ Ι (σημ. 86)· ἡ ἄρα ΓΙ ἔσεται ἀκτὶς, ἴση τῷ ἡμιάξονι ΓΞ, ἢ ΓΝ, ο, ε, δ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α'.

Ὅθεν ἔσεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ τῆς Ἑςίας ἐφ᾽ οἱονδήποτε σημεῖον τῆς καμπύλης κεκλιμένων εὐθειῶν ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως, καὶ ἡ αὐτῶν διαφορὰ ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς, ἐξισοῦται τῷ ὁλικῷ ἄξονι ΞΝ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΕΤ ἐςὶ διπλασία τῆς ΤΓ (σημ. 80)· ἔςαι δὴ καὶ ἡ ΕΜ διπλασία τῆς ΓΤ (Πόρ. 1, 4 τοῦ ϛ'.) αἱ γάρ τοι ΓΙ, ΕΜ παράλληλοι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ προσέτι ἡ ΔΜ ἐςὶ διπλασία τῆς ΜΙ (κατὰ τὴν παροῦσαν Πρότασιν), ἔσεται δὴ καὶ ἡ ΥΔ ἢ ἡ αὐτῇ ἴση ΥΜ διπλασία τῆς ΤΙ. Ἔνθεντοι ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλλείψεως ἡ ΕΜ καὶ ΥΜ ἅμα ληφθεῖσαι ἔσονται ἴσαι τῷ διπλῷ τῆς ΓΤ σὺν τῷ διπλῷ τῆς ΤΙ, τοῦτ᾽ ἔςι τῷ διπλῷ τῆς ΓΙ, ἢ τῆς ΓΞ (=ΓΙ) ὅπερ ἐςὶν ἴση τῷ ἄξονι ΞΝ· ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἡ διαφορὰ τῆς ΥΜ ᾗ διαφέρει τῆς ΜΕ, ἔςαι ἴση τῇ διαφορᾷ τοῦ διπλοῦ τῆς ΤΙ, ᾗ διαφέρει τοῦ διπλοῦ τῆς ΤΓ, (90) ὅ ἐςιν ἴση τῷ

---

90) Ἐπεὶ ἡ ΥΜ=2ΤΙ=2ΤΓ+2ΓΙ· καὶ ἡ ΜΕ=2ΓΤ, ἄρα ΥΜ+ΜΕ=2ΤΓ+2ΓΙ+2ΤΓ=2ΓΙ=2ΓΞ =ΞΝ.

διπλῷ τῆς ΓΙ ἢ τῆς ΓΞ, καὶ ἑπομένως ἴση τῷ πλαγίῳ ἄξονι ΞΝ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β'.

Ἐὰν αὖθις διὰ τοῦ κέντρου Γ ἀχθῇ τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἡ ΓΠ τέμνουσα ἑκάτερον τῶν κλώνων κατὰ τὰ σημεῖα Π, Ρ ἑκατέρα τῶν εὐθειῶν ΜΠ, ΜΡ ἔσεται ἴση τῷ αὐτῷ ἡμιάξονι. Ἐπεὶ γὰρ ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ΓΙΜΠ, ἡ ΜΠ ἐστὶν ἴση τῇ ΙΓ, καὶ ἀχθεῖσα ἡ ΓΣ παραλλήλως τῷ κλώνῳ ΡΥΜ, ἔσεται ἴση τῷ ἡμιάξονι (κατὰ τὴν παροῦσαν Πρότασιν), ταύτῃ δὲ ἴση ἡ ΜΡ ὡς ἀπεναντίον πλευρὰ ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ΡΓΣΜ, ἄρα ἡ ἑκατέρα τῶν ΠΜ, ΜΡ ἴση ἐστὶ τῷ αὐτῷ ἡμιάξονι ΓΞ, ἢ ΓΝ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ΓΙ ἢ ΓΣ ἐστὶν ἴση τῷ ΓΝ καὶ ὅτι ἀχθεῖσα ἡ ΥΙ ἔσται κάθετος τῇ ἐφαπτομένῃ, ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ΕΣ· δῆλον ὅτι ἐὰν περὶ τὴν διάμετρον ΞΝ καταγραφῇ κύκλος, εἰς ὃν αἱ ἴσαι τῇ ΓΝ εὐθεῖαι ΓΙ, ΓΣ περατωθήσονται, ἡ αὐτοῦ περιφέρεια τμηθήσεται ὑφ' οἱασδήποτε ἐφαπτομένης ΜΘ, κατὰ τὰ σημεῖα Ι, Σ· αἵτε ἀπὸ τῶν σημείων τούτων ἐπὶ τὸ κέντρον Γ ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι ΓΙ, ΣΓ παράλληλοί τε ἔσονται τοῖς ἀπὸ τῶν Ἑστιῶν Ε, Υ ἐπὶ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον Μ ἀχθεῖσι κλώνοις ΕΜ, ΥΜ ϗ δὴ ϗ τῷ ἡμιάξονι ΓΝ ἴσαι, (ἐκτὸς γὰρ τῆς περιφερείας τȣ κύκλȣ αἱ τοιαίδε παράλληλοι ȣκ ἂν ἔχοιεν τῇ ἐφαπτομένῃ συμβαλεῖν. Οὐ γὰρ ἂν εἴησαν τότε ἴσαι τῷ ἡμιάξονι), γενομένων τε τῶν γωνιῶν ΘΙΥ, ΘΣΕ ὀρθῶν, αἱ κάθετοι ΙΥ, ΣΕ κατ' αὐτὰς δὴ τὰς Ἑςίας τῷ ἄξονι συμβαλȣσιν. Ὅθεν ἕτερος τρόπος ȣτος ἀναφαίνεται τȣ τὰς Ἑςίας τῶν τομῶν τȣτων ἐξευρίσκειν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δʹ.

Ἀχθεῖσα ἀπὸ τῶν Ἑςιῶν Ε, Υ ἐφ' οἱανδήποτε ἐφαπτομένην ΜΘ, αἱ κάθετοι ΕΣ, ΥΙ, περιέξȣσιν ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τȣ δευτέρȣ ἡμιάξονος ΓΒ τετραγώνῳ, ἢ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΝΕΞ ἢ τῶν ΝΟ, ΞΖ. Προαχθείσης γὰρ ἐπὶ τὸν κύκλον τῆς ΣΕ εἰ γ' ἐπὶ τὸ Χ, ἀχθεῖσα ἡ ΓΧ, ἔσεται ἐπ' εὐθείας τῇ ἑτέρᾳ ἀκτῖνι ΓΙ· ἐπεὶ γὰρ ἡ γωνία ΙΣΧ ἐςὶν ὀρθή, τὸ τόξον ἄρα ΧΙΣ ἐςὶν ἡμιπεριφέρεια ἴση τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ΞΙΝ, ϗ ἀφαιρεθέντος ἑκατέρωθεν τȣ τόξȣ ΝΙ τὸ τόξον ΧΝ ἔςαι ἴσον τῷ τόξῳ ΞΙ ϗ ἡ γωνία ΧΓΝ ἴση τῇ ΞΓΙ, (ὅθεν ἡ ΧΓΝ+ΝΓΙ=ΞΓΙ +ΙΓΝ=δυσὶν ὀρθαῖς, ϗ ἑπομένως ἡ ΧΓ ἐςὶν ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΙ) περὶ ἃς γωνίας αἱ πλευραὶ ΧΓ, ΓΕ, εἰσὶν ἴσαι ταῖς πλευραῖς ΓΙ, ΓΥ ϗ ἡ βάσις ΕΧ ἴση τῇ βάσει ΥΙ. Διὰ ταῦτα ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΕΣ, ΥΙ ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ, τῷ ὑπὸ τῶν

ΣΕΧ, ἐπομένως δὲ ϗ τῷ ὑπὸ τῶν ΝΕΞ· (35 τοῦ Γ΄. ἐν τῇ Ἐλλείψει, ϗ Πορ. 1 τῆς 36 τοῦ αὐτοῦ ἐν τῇ Ὑπερβολῇ.)

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄.

Ἀχθείσης τῆς ΜΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐφαπτομένῃ, τμηθήσεται ὁ ἄξων ἁρμονικῶς, ἀνάλογον ὑπό τε τῶν Ἑςιῶν Υ, Ε, ϗ τῆς καθέτου ταύτης ϗ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης (91), ἤτοι ἔσεται ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΥ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΥΘ. Συνελθουσῶν γὰρ τῶν ΕΣ, ΥΜ κατὰ τὸ Ψ, ἐπεὶ ἡ ὀρθὴ γωνία ΕΣΜ ἐςὶν ἴση τῇ ΜΣΨ, ἤτε ΕΜΣ ἴση τῇ ΣΜΨ ἑκατέρα δὲ τῶν τελευταίων τούτων ἴση ἡ ΥΜΖ (Προτ. Κ΄. ϗ 15 τοῦ Α΄.) ϗ ἡ ΜΣ κοινὴ ἑκατέρῳ τῶν ἐφεξῆς τριγώνων ΜΕΣ, ΜΣΨ, ἔσονται δὴ ϗ αἱ ΕΣ, ΣΨ ἀλλήλαις ἴσαι (26 τοῦ Α΄.) ὅθεν ὡς ἡ ΕΣ πρὸς ΥΙ, οὕτως ἡ ΣΨ πρὸς ΥΙ· ἐςι

---

91) Ὅτι δὲ ἐκ τῆς ἀναλογίας *ΕΗ* : *ΗΥ* = ΕΘ : ΘΥ συμπερανθήσεται ἡ ἁρμονικὴ τομὴ τοῦ ἄξονος, δῆλον ἐκ τούτων· Ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς Ἐλλείψεως ἔσεται *ΕΘ* : ΘΥ = *ΕΗ* : *ΗΥ*. Ἔςι δὲ ἡ *ΕΗ* διαφορὰ τῶν ΕΘ, *ΗΘ*, ϗ ἡ *ΗΥ* διαφορὰ τῶν *ΗΘ*, ΘΥ, ἄρα ἡ *ΕΘ* : ΘΥ ἐςιν, ὡς διαφορὰ τῶν *ΕΘ*, *ΗΘ* πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν *ΗΘ*, ΘΥ, ϗ ἐπομένως αἱ *ΕΘ*, *ΗΘ*, ΘΥ εἰσιν ἐν συνεχεῖ ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ. Ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς· ἐπεί ἐςιν *ΗΥ* : *ΗΕ* = ΘΥ : ΘΕ, ϗ ἡ ΘΥ = *ΗΥ* − *ΗΘ*, ἤτε *ΕΘ* = ΗΘ − *ΗΕ*, ἔσεται ἄρα *ΗΥ* : *ΗΕ* = *ΗΥ* − *ΗΘ* : *ΗΘ* − *ΗΕ* ἄρα αἱ *ΗΥ*, ΗΘ, *ΗΕ* εἰσιν ἁρμονικῶς ἀνάλογον.

δὲ ὁ μὲν πρῶτος λόγος ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΕΘ πρὸς ΘΥ· ὁ δὲ δεύτερος τῷ τῆς ΣΜ πρὸς ΜΙ ἢ τῆς ΕΗ πρὸς ΗΥ, ἄρα ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΥ, ὕτως ἡ ΕΜ πρὸς ΗΥ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ ϛ.

Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΕΣ, ΥΙ, ΙΣ τετράγωνα, ὁμῦ ληφθέντα ἔσεται ἀεὶ τῇ αὐτῇ ποσότητι ἴσα ἤτοι τοῖς ἀπὸ τῶν ΝΥ, ΥΞ τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν. Ἀχθείσης γὰρ τῆς ΕΙ, ἔσεται τὰ ἀπὸ τῶν ΕΣ, ΣΙ ἅμα ληφθέντα ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΕΙ (47 τῦ Α΄.) προσκειμένυ ἄρα κοινῦ τῦ ἀπὸ τῆς ΥΙ, ἔσεται τὰ ἀπὸ τῶν ΕΣ, ΣΙ, ΙΥ, ὁμῦ ληφθέντα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΙ, ΥΙ ἅμα ληφθεῖσιν. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΙ, ΥΙ ὁμῦ ληφθέντα ἐξισῦται, ὡς ἐν τοῖς φθάσασι δέδεικται (Σχολ. ϛ΄.), τῷ δὶς ἀπὸ τῆς τὴν βάσιν ΥΕ τῦ τριγώνυ ΥΙΕ διχοτομέσης εὐθείας ΓΙ τετραγώνῳ, ἢ τῷ αὐτῷ ἴσῳ ΓΞ σὺν τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμιβάσεως ΓΥ τετραγώνῳ, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΣ, ΣΙ, ΥΙ, ὁμῦ ληφθέντα ἐςὶν ἴσα τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ΓΞ σὺν τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ΓΥ. Ἀλλὰ τὸ δὶς ἀπὸ τῆς ΓΞ σὺν τῷ δὶς ἀπὸ ΓΥ ἐςὶν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΞ, ΥΞ (10 τῦ Β΄. ἐν τῇ Ἐλλείψει· καὶ 9 τῦ αὐτῦ ἐν τῇ Ὑπερβολῇ.) ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν ΥΝ, ΥΞ, ἢ τῶς ΕΞ, ΝΕ, ἢ τῶν ΝΥ, ΝΕ (92). Τὰ

92) Ἐπεὶ ἐςιν $ΕΝ = ΥΞ$ (σημ. 89.) ἔσεται δὴ $ΕΝ + ΕΥ = ΞΥ + ΕΥ$, ἤτοι $ΥΝ = ΕΞ$· ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν

ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΣ, ΣΙ, ΥΙ, ἅμα ληφθέντα, ἐςὶν ἴσα τουτοισὶ τοῖς τετραγώνοις ἀνὰ δύω ὁμȢ̃ ληφθεῖσιν, ϗ ἑπομένως εἰσὶν ἀεὶ τȢ̃ αὐτȢ̃ μεγέθȢς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒʹ.

Σχημ. 68. 69. Ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΜΕΒ, ΜΥΒ, ἃς αἱ ἀφʹ ἑκατέρων τῶν Ἑςιῶν ἐπὶ δύω σημεῖα Β, Μ, τῆς καμπύλης προσκεκλιμέναι εὐθεῖαι περιέχȢσιν· ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως ἡ αὐτῶν διαφορὰ ἐςὶ διπλασία τῆς γωνίας ΜΛΒ, ἣν αἱ ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Β, Μ ἀχθεῖσαι ἐφαπτόμεναι περιέχȢσιν.

Ἡ γὰρ ὑπὸ ΜΕΚ γωνία ἐςὶν ἴση ταῖς δυσὶν ἐντὸς ΜΥΕ, ΕΜΥ ἅμα ληφθείσαις, ϗ προκειμένης κοινῆς τῆς ΜΥΕ, ἔσονται αἱ ΜΕΚ, ΜΥΕ ἅμα ληφθεῖσαι ἴσαι τῇ δὶς ὑπὸ ΜΥΕ σὺν τῇ ἁπλῶς ὑπὸ ΕΜΥ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΥΜΘ ἐςὶν ἴση τῇ ὑπὸ ΘΜΕ (Προτ. Κʹ.), ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΜΥ ἐςὶν ἴση τῇ δὶς ὑπὸ ΥΜΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΕΚ, ΜΥΕ ἅμα λη-

---

μερῶν ΥΞ, ΕΞ: τετράγωνα ἐξισȢ̃ται τοῖς ἀπὸ τῶν ΥΞ, ΥΝ, ἢ τῶν ΝΕ, ΝΥ ἢ τῶν ΝΕ, ΕΞ τετραγώνοις. Ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἐπεὶ ἐςὶν $ΕΝ = ΥΞ$, προσκειμένης κοινῆς τῆς ΞΝ, ἔσεται $ΕΞ = ΥΝ$, ϗ $ΕΞ^2 = ΥΝ^2$.