ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς δω τετραγώνῳ ἢ τῷ ὑπὸ τῶν ζωη ὀρθογωνίῳ μετὰ τῦ ἀπὸ τῆς δη τετραγώνυ (6 τῦ Β΄.). Κοινῦ δὲ τῦ ἀπὸ τῆς δη ἀφαιρεθέντος, ἔςαι τὸ ἀπὸ τῆς πω, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ζωη. Ἡ ἄρα πω μέση ἀνάλογος ἐν ταῖς ζω, ωη ὥσπερ δὲ ϗ ἡ ΠΩ ἐν ταῖς ΖΩ, ΩΗ.

ΠΟ´ΡΙΣΜΑ Ζ΄.

Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΟΡ, ΗΛ ὁμῦ ληφθέντα, ἐςιν ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΛΟ (Πορ. Γ΄.) τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΛΟ, ἴσον τῷ ὑπὸ ηΟΗ μετὰ τῦ ἀπὸ ΗΛ (6 τῦ Β΄.) τὸ ἄρα ἀπὸ ΟΡ ἴσον τῷ ὑπὸ ηΟΗ, ϗ ἡ ΟΡ μέση ἀνάλογος ἐν ταῖς ηΟ, ΟΗ. Προεκβληθείσης δὲ τῆς τεταγμένης ΒΖ ἐπὶ θάτερα τῆς καμπύλης κατὰ τὸ Φ, ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΣΑ, ΒΖ τετράγωνα ὁμῦ ληφθέντα ἐξισῦται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετραγώνῳ (Πορ. Ε΄.) τῦτ᾽ ἔςι τῷ ὑπὸ ὑπὸ ΦΑΖ μετὰ τῦ ἀπὸ ΒΖ (6 τῦ Β΄.), ἄρα τὸ ἀπὸ ΣΑ, ἴσον τῷ ὑπὸ ΦΑΖ, ϗ ἡ ΣΑ μέση ἀνάλογος ἐν ταῖς ΑΦ, ΑΖ.

ΠΟ´ΡΙΣΜΑ Η΄.

Ἐὰν ἄρα δύω εὐθεῖαι ΝΕ, ΜΕ ἐφαπτόμεναι τῆς Παραβολῆς συμπίπτωσιν ἀλλήλαις καθ᾽ ἕν τι σημεῖον τὸ Ε, καί τις εὐθεῖα τῇ μιᾷ τούτων παράλληλος ἡ ΦΑ τέμνῃ τὴν ἑτέραν ἐκβληθεῖσαν κατὰ τὸ Α, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τεμνούσις ὅλης καὶ τοῦ ἐκτὸς μέρους αὐτῆς τοῦ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης ἔσται πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ τμήματος τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις τέτμηται, τοῦ γινομένου μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων, ὡς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ τμήματος τῆς παρὰ τὴν τέμνουσαν ἐφαπτομένης τοῦ ἀπολαμβανομένου μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς συμπτώσεως, πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς προτέρας ἐφαπτομένης τοῦ μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς συμπτώσεως. Ἤτοι τὸ ὑπὸ ΦΑΖ ἔσται πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ, ὡς τὸ ἀπὸ ΝΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ. Ἐπεὶ γὰρ τρίγωνα ΘΝΕ, ΜΣΑ ἐστιν ὅμοια, ἔσται δὴ τὸ ΘΝΕ πρὸς τὸ ΜΣΑ, ὡς τὸ ἀπὸ ΝΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΑ. Καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ. Ὅθεν τὸ ἀπὸ ΝΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΑ ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ. Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ ΘΕ τῷ ἀπὸ ΕΜ, τὸ δὲ ἀπὸ ΣΑ τῷ ὑπὸ τῶν ΦΑΖ (Πορ. προηγ.)· ἄρα τὸ ἀπὸ ΝΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ, ὡς τὸ ὑπὸ ΦΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ. Διὰ δὴ ταῦτα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΩΗ (ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τεμνούσης ΖΩ καὶ τοῦ ἐκτὸς μέρους ΗΩ) πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΩ (τμήματος τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις τέτμηται, μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς τεμνούσης ἀπολαμβανομένου), ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΕ (τμήματος τῆς παρὰ τὴν τέμνουσαν ἐφαπτομένης μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς συμπτώσεως ἀπολαμβανομένου) πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΝ (λοιποῦ τμήματος τῆς προτέρας ἐφαπτομένης μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς συμπτώσεως γινομένου) *).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Ἐὰν ἐν Παραβολῇ τῇ ΑΝΔ, ἧς βάσις μὲν ἡ ΑΔ, διάμετρος δὲ ἡ ΝΒ, καὶ πλευρὰ ὀρθία ἡ ΝΖ, ἀχθῶσι παρὰ τὴν διάμετρον εὐθεῖαι οἱαιδήποτε αἱ ΜΕ, ΗΘ, αὗται δὴ ἔσονται ὡς τὰ ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμημάτων εἰς ἃ τεμοῦσιν τὴν βάσιν, ἤτοι ὡς τὰ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ, ΑΘΔ. Καὶ προεκβληθείσης τῆς βάσεως ἐὰν ἐκτὸς τῆς Παραβολῆς ἀχθῶσι τῇ διαμέτρῳ παράλληλοι καὶ ἕτεραι εὐθεῖαι αἱ με, ηθ, ἔσονται δὴ καὶ αὗται ὡς τὰ ὑπὸ τῶν ΑεΔ, ΑθΔ ὀρθογώνια. Σχημ. 33.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τεταγμένης τετράγωνον ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΝΖ ὀρθογωνίῳ (Πορ. Α΄. τῆς Δ΄.)· τό,τε ἀπὸ τῆς ΠΗ, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΠΝΖ. Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς πη τῷ ὑπὸ τῶν

*) $\Pi N\Omega : \Theta NE = \Pi\Omega^2 : \Theta E^2 = N\Omega^2 : EN^2$· ἄρα $\Pi\Omega^2 : N\Omega^2 = \Theta E^2 : EN^2$· ἀλλὰ $\Pi\Omega^2 = Z\Omega H$ (Πορ. ς΄.) καὶ $\Theta E^2 = ME^2$, ἄρα $Z\Omega H : N\Omega^2 = ME^2 : NE^2$.

πNZ. Καὶ ἡ ὑπεροχὴ ἄρα τῶν ἀπὸ ΒΔ, ΗΠ, τȢτ' ἔτι τῶν ἀπὸ ΒΔ, ΒΘ, ἤτοι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΘΔ ὀρθογώνιον (5 τȢ Β'.) ἴσον ἐςι τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΝΗ ϗ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἀποτεμνομένων ΒΝ, ΠΝ, τȢτ' ἔςι τῆς ΒΠ (1 τȢ Β'.) ἤτοι τῆς ΘΗ. Λέγω δὴ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΘΔ, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΝΘ, ΝΖ. Ὡσαύτως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπὸ πη εἴτ' Ȣν Βϑ, ΒΔ τȢτ' ἔςι τὸ ὑπὸ Αϑ Δ ὀρθογώνιον (6 τȢ Β'.) ἴσον ἐςι τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΝΖ ϗ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἀποτεμνομένων ϖΝ, ΒΝ εἴτ' Ȣν τῆς Βπ, τȢτ' ἔςι τῆς ϑη, ἤτοι τὸ ὑπὸ τῶν ΑϑΔ, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ηϑ, ΝΖ. Ὁμοίως δειχθήσεται ὅτι ϗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΜΕ, ΝΖ· τό,τε ὑπὸ τῶν ΑεΔ, τῷ ὑπὸ τῶν με, ΝΖ. Αἱ παρὰ τὴν διάμετρον ἄρα ἠγμέναι εὐθεῖαι ΜΕ, ΗΘ εἰσὶν ὡς τὰ ὀρθογώνια ΑΕΔ, ΑΘΔ τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς βάσεως περιεχόμενα (1 τȢ ς'.). Τὰ γὰρ ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν αὐτὴν Παράμετρον ΝΖ γινόμενα ἐξισȢται τȢτοις τοῖς ὀρθογωνίοις *). Ὡσαύτως ἐπεὶ ἐςιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑϑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑεΔ, Ȣτω τὸ ὑπὸ τῶν ηϑ, ΝΖ πρὸς τὰ ὑπὸ τῶν με, ΝΖ· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ηϑ, ΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν με, ΝΖ, Ȣτως ἡ με

---

*) Ἐπεὶ γάρ ἐςιν $AE\Delta = ME \times NZ$ ϗ $A\Theta\Delta = H\Theta \times NZ$, ἔςι δὴ $AE\Delta : A\Theta\Delta = ME \times NZ : H\Theta \times NZ$· ἀλλὰ $ME \times NZ : H\Theta \times NZ = ME : H\Theta$ (1. τȢ ς'.)· ἄρα $AE\Delta : A\Theta\Delta = ME : H\Theta$.

πρὸς τὴν ηθ, ἔστιν ἄρα ἡ με πρὸς ηθ, ὡς τὸ ὑπὸ ΑεΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑθΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Προαχθείσης δὲ τῆς ΗΠ ἐπὶ θάτερα ἄχρι τοῦ Λ, ἥτις τεμεῖ τὴν ΜΕ κατὰ τὸ Ι, ἔσται τὸ ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΙΗ, ὡς ἡ ΜΕ πρὸς τὴν ΜΙ. Ὃν γὰρ τρόπον τὸ ὑπὸ τῶν ΜΕ, ΝΖ, ἰσοῦται τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ, οὕτω καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΙ, ΝΖ ἰσωθήσεται τῷ ὑπὸ τῶν ΛΙΗ· καὶ ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΙΗ, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΜΕ, ΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΜΙ, ΝΖ· ὅθεν καὶ ὡς ἡ ΜΕ πρὸς ΜΙ (ι τοῦ ϛ´.). Προαχθείσης δὲ καὶ τῆς ηπ ἐπὶ τὸ λ ἥτις τεμεῖ τὴν με κατὰ τὸ ι, ἔσται τὸ ὑπὸ ΑεΔ, ὅπερ ἰσοῦται τῷ ὑπὸ τῶν με, ΝΖ, πρὸς τὸ ὑπὸ λιη, ὅπερ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μι, ΝΖ, ὡς ἡ με πρὸς μι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ´.

Ἐὰν ἐν Ἐλλείψει ἢ ἀντικειμέναις τομαῖς εὐθεῖα οἱαδήτις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΜΓ ἀχθῇ, προαχθεῖσα συμπεσεῖται ἐπὶ θάτερα τῇ Ἐλλείψει ἢ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων κατὰ τὸ Σ, καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ κέντρον· καὶ αἱ ἀπὸ τῶν Μ, Σ ἀχθεῖσαι ἐφαπτόμεναι τῆς Σχημ. 34. 35.

Ἐλλείψεως ἢ τῶν ἀντικειμένων, ἔσονται ἀλλήλαις παράλληλοί τε ἴσαι.

Ἀπὸ τῦ Μ τετάχθω ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον ΝΞ ἡ εὐθεῖα ΜΚ, ϗ τῇ ΓΚ ἴση ληφθήτω ἡ ΓΖ· πρὸς δὲ τῷ Ζ τετάχθω ἐπὶ θάτερα τῆς διαμέτρυ ἡ ΖΣ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΣΓ. Ἐπεὶ ὖν ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπὸ ΓΝ, ΓΚ, τῦτ' ἔςι τὸ ὑπὸ ΝΚΖ ὀρθογώνιον (5 τῦ Β'. ἐν τῇ Ἐλλείψει ϗ 6 τῦ αὐτῦ ἐν ταῖς ἀντικειμέναις) ἐξισῦται τῇ ὑπεροχῇ τῶν ἀπὸ ΓΖ, ΓΞ τῶν αὐτοῖς ὁμολόγως ἴσων, τῦτ' ἔςι τῷ ὑπὸ ΝΖΞ ὀρθογωνίῳ (5 ϗ 6 τῦ αὐτῦ). ϗ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ΜΚ, ΖΣ τετράγωνά ἐςιν ὡς τὰ εἰρημένα ὀρθογώνια (Προτασ. Ε', ὡς πρὸς τὴν Ὑπερβολὴν ϗ ς'. ὡς πρὸς τὴν Ἔλλειψιν), τὰ τετράγωνα ἄρα ταῦτα ἐςὶν ἴσα ἀλλήλοις· καὶ ἑπομένως ἡ ΜΚ ἴση τῇ ΖΣ. Ἔςι δὲ ἐκ κατασκευῆς ϗ ἡ ΓΚ ἴση τῇ ΓΖ, ἤτε ὑπὸ ΜΚΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΣΖΓ. Εἰσὶ γὰρ ἐναλλὰξ ἐντὸς τῶν παραλλήλων· καὶ ἡ ΓΜ ἄρα βάσις τῦ τριγώνυ ΓΚΜ ἴση ἐςὶ τῇ ΓΣ βάσει τῦ τριγώνυ ΓΖΣ (4 τῦ Α'.), καὶ ἡ ὑπὸ ΜΓΚ ἴση τῇ ὑπὸ ΣΓΖ· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΚΓΜ μετὰ τῆς ὑπὸ ΜΓΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἐξισῦται (13 τῦ Α'.), δυσὶν ὀρθαῖς δὲ ἐξισῦται ϗ ἡ ὑπὸ ΖΓΣ μετὰ τῆς ὑπὸ ΣΓΚ, δυσὶν ὀρθαῖς ἄρα ἐξισωθήσεται ϗ ἡ ΣΓΖ μετὰ τῆς ὑπὸ ΖΓΜ. ἡ ΣΓ ἄρα ἐπ' εὐθείας κεῖται τῇ ΓΜ (14 τῦ Α'.)· ἡ ΜΓ ἄρα προαχθεῖσα συμπίπτει ἐπὶ θάτερα τῇ τομῇ κατὰ τὸ

Σ. καὶ ἡ ΜΓΣ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ κέντρον Γ.

Α'χθεισῶν δὲ τῶν ἐφαπτομένων ΜΘ, ΣΠ, ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΘΚΓ ὀρθογώνιον ἐςὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ΓΝ τετραγώνῳ (Προ. ΙΑ'. τῆς Θ'.)· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΖΓΠ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΞ (διὰ τὸν αὐτὸν λόγον), ϗ ἡ ΓΝ ἴση τῇ ΓΞ ϗ δὴ ϗ τὸ ἀπὸ ΓΝ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΞ, ἄρα ϗ τὸ ὑπὸ ΘΓΚ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΓΠ (ἤτοι $\Theta\Gamma \times \Gamma K = Z\Gamma \times \Gamma\Pi$)· ἴση δὲ ἡ ΓΚ τῇ ΓΖ, ἴση ἄρα ϗ ἡ ΘΓ τῇ ΓΠ· ἴση δὲ ϗ ἡ ΜΓ τῇ ΓΣ· ϗ δὴ ϗ ἡ ὑπὸ ΣΓΠ τῇ ὑπὸ ΜΓΘ, ἄρα ϗ ἡ ΘΜ ἴση τῇ ΠΣ (4 τȣ Α'), ἀλλὰ δὴ ϗ παράλληλοι· εἴγε αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΜΘΓ, ΣΠΓ ἀλλήλαις ἴσαι ἅτε πλευραῖς ἴσαις ταῖς ΜΓ, ΓΣ ἀντικείμεναι. Ταῦτα δὲ πρȣ̈́κειτο δεῖξαι· ἄρα κτ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α'.

Προαχθείσης δὲ τῆς ΣΖ ἐπὶ θέτερα τῆς τομῆς ἄχρι τȣ Ε, δῆλον ὅτι ἡ ΣΖ ἔσεται ἴση τῇ ΖΕ, ἄρα ϗ τῇ ΚΜ, ἥτις ἐςὶ τῇ ΖΕ παράλληλος. Ε'πιζευχθεῖσα ἄρα ἡ ΜΕ, ἔςαι τῇ ΚΖ παράλληλος ϗ ἴση (33 τȣ Α'.).

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β'.

Α'χθεῖσα δὲ διὰ τȣ κέντρȣ ϗ παρὰ τὰς τεταγμένας ΜΚ, ΕΖ ἡ ΓΗ, δίχα τεμεῖ τὴν ΜΕ κατὰ τὸ Β, ϗ δὴ ϗ ἁπάσας τὰς αὐτῇ παραλλήλας ϗ τὰ πέρατα τῶν ἴσων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΝΖ τεταγμένων ἐπιζευγνυέσας. Γενήσεται γὰρ ἡ μὲν ΒΜ ἴση τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΒΕ ἴση τῇ ΓΖ. Εἰσὶ γὰρ ἀντικείμεναι πλευραὶ τῶν παραλληλογράμμων ΓΒΜΚ, ΓΒΕΖ, ϗ ὑπόκειται ἡ ΓΖ ἴση τῇ ΓΚ. Ἄρα ϗ ἡ ΓΗ ἔςαι ϗ αὕτη διάμετρος, ἐφ' ἣν τετάξονται ϗ δίχα ὑπ' αὐτῆς τμηθήσονται αἱ τῇ ἀρχικῇ διαμέτρῳ παράλληλοι εὐθεῖαι ΜΕ, ΤΛ.

Καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη ΓΗ, διάμετρος *ΔΕΥΤΕΡΑ*, ϗ *ΣΥΖΥΓΗΣ* τῇ πρώτῃ. Ἥτις ἐν μὲν τῇ Ἐλλείψει ὁρίζεται ὑπὸ τῆς περιμέτρυ τῆς τομῆς ϗ ἔςιν· ἡ ΙΓ ἴση τῇ ΓΗ. Τέτακται γὰρ ϗ αὕτη ἐπὶ τὴν πρώτην διάμετρον ΝΞ, ϗ ἑπομένως τέτμηται ὑπ' αὐτῆς δίχα κατὰ τὸ Γ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΓΗ τετράγωνον ἐςὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρυ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΝΓΞ, τῦτ' ἔςι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΝ τετράγωνον, ὡς ἡ ὀρθία πλευρὰ ΝΥ πρὸς τὴν πλαγίαν ΝΞ (Πορ. ϛʹ. τῆς ϛʹ.), ϗ τῶν ὅρων (ΓΗ, ΓΝ) τετραπλασιασθέντων, τὸ ἀπὸ τῆς ΗΙ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΞ, ὡς ἡ ΝΥ πρὸς ΝΞ, ἤτοι ἡ ΝΥ πρὸς τὴν ΝΞ ἔχει λόγον τὸν διπλασίονα τῦ τῆς ΗΙ πρὸς ΝΞ· διὰ ταῦτ' ἄρα ἡ ΗΙ διάμετρος δευτέρα ϗ συζυγὴς, ἐςὶ μέση ἀνάλογος τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΥ ϗ τῆς ἀρχικῆς διαμέτρυ τε ἅμα καὶ πλαγίας πλευρᾶς ΝΞ. Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ διορίζεται εἴτ' ὖν πορίζεται μὲν ὡς μέση ἀνάλογος τῆς τε ὀρθίας πλευρᾶς ΝΥ ϗ τῆς πλαγίας ΝΞ, ὁριωθεῖσα δὲ τῦτον τὸν τρόπον, διατίθεται διὰ τῦ κέντρυ Γ, ὡς εἶναι τε ταῖς ἐπὶ τὴν διάμετρον ΝΞ τεταγμέναις παράλληλος, ϗ δίχα τέμνεσθαι κατὰ τὸ Γ. Οὕτω δὲ πορισθεῖσα ϗ διατεθεῖσα ἔςαι (ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς) διάμετρος δευτέρα ϗ τῇ πρώτῃ ΝΞ συζυγής.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Ἐν μὲν τῇ Ἐλλείψει τὰ ἀπὸ τῶν ἐπὶ τὴν ΗΙ δευτέραν διάμετρον τεταγμένων ΒΜ, ΡΤ τετράγωνα ἔςαι ὡς τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς αὐτῆς διαμέτρυ περιεχόμενα ὀρθογώνια ΗΒΙ, ΗΡΙ, τῦτ' ἔςιν ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπὸ ΓΗ, ΓΒ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπὸ ΓΗ, ΓΡ. Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἔςαι τὰ αὐτὰ τετράγωνα ὡς συναμφότερον τὸ ἀπὸ ΓΗ, ΓΒ πρὸς συναμφότερον τὸ ἀπὸ ΓΗ, ΓΡ. Σχημ. 34 ϗ 35.

Τὸ πρῶτον δῆλον· τεταγμένων γὰρ ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον ΝΞ τῶν εὐθειῶν ΜΚ, ΤΦ, ἔςαι ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓΞ, τῦτ' ἔςι τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΚΝ, ὕτω τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΜ, ἢ τὸ ΓΒ, ϗ ἐναλλὰξ ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΓΗ, ὕτως ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῦ πρώτυ τὸ ὑπὸ ΞΚΝ πρὸς ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῦ δευτέρυ τὸ ἀπὸ ΓΒ (55). Καὶ ὡς ἄρα λοιπὸν τὸ ἀπὸ ΓΚ ἢ ΒΜ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΗΒΙ, ὕτως ὅλον τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΓΗ (19 τῦ Ε΄.). Κατὰ δὴ τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΤΡ ἔχει πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΡΙ, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ (56). Ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ΗΙ τεταγμένων ΒΜ, ΡΤ τετράγωνα ἐςὶν ὡς τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρυ περιεχόμενα ὀρθογώνια ΗΒΙ, ΗΡΙ, ἅτινά εἰσιν ὑπεροχαὶ τῶν ἀπὸ ΓΒ, ΓΡ πρὸς τὸ αὐτὸ ἀπὸ ΓΗ (5 τῦ Β΄.)

Τὸ δὲ δεύτερον δείκνυται· ἐπεὶ γὰρ ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς, τὸ ὑπὸ ΞΚΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΜ ἢ ΓΒ ἐςὶν ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΞΝ πρὸς τὴν ὀρθίαν ΝΤ (Πορ. ϛ΄. τῆς Ε΄.), ἢ ὡς τὸ ἀπὸ ΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ (μέση γὰρ ἀνάλογος ἡ ΗΙ ἐν ταῖς ΝΞ, ΝΤ ὡς εἴρηται μετὰ τὸ Β΄. Πόρισμα τῆς ΙΒ΄), ἤ, ληφθέντος τῦ τετάρτυ ἑκατέρυ τῶν

---

55) $ΓΚ^2 + ΞΚΝ = ΓΝ$ · καὶ $ΓΒ^2 + ΗΒΙ = ΔΗ^2$ (5. τῦ Β΄.)· ἄρα ἐπείἐςι $ΓΝ^2 : ΓΗ^2 =$ ἀφαιρεθὲν ΞΚΝ : ἀφαιρεθὲν $ΓΒ^2$, ἔςαι δὴ $ΓΝ^2 : ΓΗ^2$ καὶ ὡς λοιπὸν $ΓΚ^2$ πρὸς λοιπὸν ΗΒΙ, τῦτ᾽ ἔςιν ὡς $ΒΜ^2 : ΗΒΙ$· ἡ γὰρ ΓΚ = τῇ ΒΜ.

56) $ΓΦ^2 + ΞΦΝ = ΓΝ^2$ · καὶ $ΓΡ^2 + ΗΡΙ = ΓΗ^2$ · ἐπεὶ δὲ ἐςι $ΓΝ^2 : ΓΗ^2 = ΞΦΝ : ΓΡ^2$ ἢ $ΤΦ^2$ · ἔςαι δὴ καὶ $ΓΝ^2 : ΓΗ^2 = ΓΦ^2 : ΗΡΙ = ΤΡ^2 : ΗΡΙ$ (19. τῦ Ε΄.)· ἴση γὰρ ἡ ΓΦ τῇ ΡΤ.

ἀπὸ ΞΝ, ΗΙ, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ ἡγύμενος πρὸς συναμφότερον τὸν ἑπόμενον, ὡς εἷς τῶν ἡγυμένων πρὸς τὸν αὐτοῦ ἑπόμενον, ἤτοι τὸ ὑπὸ ΞΚΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΝ, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ ΓΚ ἢ ΒΜ (6 τοῦ Β΄.) πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΗ, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ (12 τοῦ Ε΄.) (57). Ὁμοίῳ τρόπῳ δειχθήσεται ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΤΡ ἐστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΡ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΗ, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ (58). Τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ἄρα ΒΜ, ΤΡ τετράγωνα ἐστιν ὡς συναμφότερον τὸ ἀπὸ ΓΒ, ΓΗ πρὸς συναμφότερον τὸ ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ, ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Δῆλον ἄρα ὡς ἐν τῇ Ἐλλείψει τὸ ἀφ' οἱασοῦν τεταγμένης ΜΒ τετράγωνον ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου, ἐφ' ἣν τέτακται, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΗΒΙ, ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΝΞ πρὸς τὴν ὀρθίαν ΝΥ. Ἔστι καὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ

---

57) Ἔστι δειχθῆναι τὸ καὶ οὕτω· $\Xi K N : \Gamma B^2 = \Gamma N : \Gamma H$ καὶ ἐναλλὰξ $\Xi K N : \Gamma N^2 = \Gamma B^2 : \Gamma H$, καὶ συνθέντι $\Xi K N + \Gamma N^2 : \Gamma N^2 = \Gamma B^2 + \Gamma H^2 : \Gamma H^2$· καὶ πάλιν ἐναλλὰξ $\Xi K N + \Gamma N^2 : \Gamma B^2 + \Gamma H^2 = \Gamma N^2 : \Gamma H^2$· καὶ ἐπεὶ $\Xi K N + \Gamma N^2 = \Gamma K^2 = B M^2$· ἄρα $B M^2 : \Gamma B^2 + \Gamma H^2 = \Gamma N^2 : \Gamma H^2$.

58) $\Xi \Phi N : T\Phi^2 = \Xi N : N\Upsilon = \Xi N^2 : N\Upsilon^2 = \Gamma N^2 : \Gamma H^2$ ἄρα $\Xi \Phi N : \Gamma N^2 = T\Phi$ ἢ $\Gamma P^2 : \Gamma H^2$· καὶ $\Xi \Phi N + \Gamma N^2 : \Gamma N^2 = \Gamma P^2 + \Gamma H^2 : \Gamma H^2$· ἢ $\Xi \Phi N + \Gamma N^2 : \Gamma P^2 + \Gamma H^2 = \Gamma N^2 : \Gamma H^2$· ἀλλὰ $\Xi \Phi N + \Gamma N^2 = \Gamma \Phi^2 = T P^2$· ἄρα $T P^2 : \Gamma P^2 + \Gamma H^2 = \Gamma N^2 : \Gamma H^2$.

ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ (κατὰ τὴν παρȣ̂σαν)· ἢ τετραπλασιασθέντων τῶν ὅρων (ΓΝ , ΓΗ) ὡς τὸ ἀπὸ ΝΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ, ἅτινά ἐςιν ὡς ΝΞ πρὸς ΝΥ (μετὰ τὸ Β΄. Πορ. τῆς ΙΒ΄.)

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

Ὅθεν ἐὰν τῶν ΝΥ, ΗΙ, ΝΞ ποριϑῇ τετάρτη ἀνάλογος ἡ ΗΧ, αὕτη δὴ ἔςαι πλευρὰ ὀρθία τῆς συζυγȣ̂ς διαμέτρȣ ΗΙ. Ἐναλλάσσοντι γὰρ ἀπὸ τῆς ἀναλογίας (ΝΥ : ΗΙ = ΝΞ : ΗΧ) ἔςαι ἡ ΗΧ πρὸς ΗΙ, ὡς ἡ ΝΞ πρὸς ΝΥ. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΝΞ πρὸς ΝΥ, ὕτω τὸ ἀπὸ ΒΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΒΙ, καὶ τὸ ἀπὸ ΤΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΡΙ. Τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ἄρα τετράγωνα πρὸς τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρȣ, ἐφ᾽ ἣν τετάχαται περιεχόμενα ὀρθογώνια ἐςὶν ὡς ἡ ΗΧ πρὸς ΗΙ, τȣ̂τ᾽ ἔςιν ὡς ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν (59).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

Ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἐπεί ἐςιν ἐκ τῆς παρȣ́σης Προτάσεως τὸ ἀπὸ ΜΒ πρὸς συναμφότερα τὰ

---

59) Ὅτι ἡ ΗΧ ἐςὶν ὀρθία πλευρὰ ἢ Παράμετρος τῆς συζυγȣ̂ς διαμέτρȣ ΗΙ δῆλον καὶ ἐκ τȣ̂ εἶναι ταύτην τρίτην ἀνάλογον τῶν ΗΙ, ΝΞ κατὰ τὰ ῥηθέντα μετὰ τὸ Β Πορ. τῆς ΙΒ΄. Ἐπεὶ γάρ ἐςι $NY : HI = N\Xi : HX$ (ἐκ κατασκευῆς), ἔςαι ἐναλλάσσοντι καὶ $N\Xi : NY = HX : HI$· ἀλλὰ $N\Xi : NY = N\Xi^2 : HI^2$, ἄρα $N\Xi^2 . HI^2 = HX : HI$· καὶ ἀνάπαλιν $HI^2 : N\Xi^2 = HI : HX$· ὅθεν $HI : N\Xi = N\Xi : HX$.

ἀπὸ ΓΒ, ΓΗ, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, ἢ ὡς ἡ ΝΞ πρὸς ΝΥ (μετὰ τὸ Β΄. Πόρ. τῆς ΙΒ΄.), ἤ, ληφθείσης τῆς ΗΧ τετάρτης ἀναλόγȣ τῶν ΝΥ, ΗΙ, ΝΞ, ὡς αὐτὴ ἡ ΗΧ πρὸς ΗΙ· δῆλον ὅτι ἡ ΗΧ ἔςαι πλευρὰ ὀρθία ἢ παράμετρος τῆς δευτέρας διαμέτρȣ ΗΙ (60).

Ἐὰν δὲ διὰ τῆς ΗΙ γραφῶσι ϗ ἕτεραι ἀντικείμεναι αἱ ηΗα, ιΙΥ, ἡ μὲν ΗΙ ἔςαι τȣ́των διάμετρος ϗ πλαγία πλευρά· αἱ δὲ ἀντικείμεναι καλείσθων ΣΥΖΥΓΕΙΣ ταῖς προτέραις ΝΜΥ, ΣΞΛ. Οὔσης τῆς πλαγίας τȣ́των συζυγȣ̃ς τῇ ἐκείνων πλαγίᾳ· αἱ τέτταρες δὲ ὁμȣ̃, κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

Καὶ ἐπεὶ ταχθείσης τῆς ΑΡ ἐντὸς τῆς μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΗΙ, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΡ τετράγωνον ἐςὶ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΗΡ ὀρθογώνιον, ὡς ἡ ὀρθία πλευρὰ ΗΧ πρὸς τὴν πλαγίαν ΗΙ (Πορ. ς΄. τῆς Ε΄.), ϗ ἡ ΗΧ πρὸς ΗΙ, ὡς τὸ ἀπὸ ΤΡ πρὸς συναμφότερα τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ (Πορ. Β΄. τῆς παρȣ́σης), ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΤΡ ἢ

60) *Δῆλον δὲ τȣ̃το ϗ χρησαμένοις τῇ αὐτῇ δείξει ᾗ ἐχρησάμεθα ἐν τῇ 59 Σημειώσει. Δειχθήσεται γὰρ ἡ ΗΧ τρίτη συνεχῶς ἀνάλογον μετὰ τὴν ΗΙ πλαγίαν πλευρὰν τῶν συζυγῶν Ὑπερβολῶν ηΗα, ιΙΥ, ϗ τὴν ΝΞ ἥτις ἐςὶν ὡς πρὸς ταύτας συζυγὴς διάμετρος.*

τῆς ΛΡ πρὸς συναμφότερα τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΡΗ.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Ε΄.

Ε᾿πεὶ δὲ ἐκ τοῦ ἡγουμένου Πορίσματός ἐςι τὸ ἀπὸ ΛΡ πρὸς συναμφότερα τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΡΗ. Ε᾿ναλλὰξ μὲν ἔςαι ὡς τὸ ἀπὸ ΛΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΡ, οὕτω συναμφότερα τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΡΗ ὀρθογώνιον (ὅπερ ὀρθογώνιον ἐςὶν ὑπεροχὴ τῶν ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ). Διελόντι δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΛΑΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΡ, οὕτω τὸ δὶς ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΡΗ (*)· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ ΛΑΤ πρὸς τὸ δὶς ἀπὸ ΓΗ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΡΗ· ἀλλ᾿ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΡΗ, οὕτως ἡ ΗΧ πρὸς ΗΙ (Πορ. Β΄.), ὡς δὲ ἡ ΗΧ πρὸς ΗΙ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ (Πορ. Γ΄.) καὶ τὸ δὶς ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ δὶς ἀπὸ ΓΗ· Ω῾ς ἄρα τὸ ὑπὸ ΛΑΤ πρὸς τὸ δὶς ἀπὸ ΓΗ οὕτω τὸ δὶς ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ δὶς ἀπὸ ΓΗ· καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ἀπὸ ΓΗ ἐςὶν ἑκατέρῳ τῷ λόγῳ κοινὸν, τὸ ἄρα ὑπὸ ΛΑΤ ἴσον τῷ δὶς ἀπὸ ΓΝ. Ἤτοι τὸ ὑπὸ ΛΑΤ ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ

---

*) Διελόντι δὲ ἔςαι $ΛΡ^2 - ΑΡ^2 : ΑΡ^2 = ΓΗ^2 + ΓΡ^2 - ΙΡΗ : ΙΡΗ$· ἀλλὰ $ΛΡ^2 - ΑΡ^2 = ΛΑΤ$· εἴγε $ΛΡ^2 = ΛΑΤ + ΑΡ^2$ (6. τοῦ Β΄.) καὶ $ΓΡ^2 - ΙΡΗ = ΓΗ^2$· εἴγε $ΓΡ^2 = ΙΡΗ + ΓΗ^2$ (διὰ τὴν αὐτήν). ἀντικαταςάντων ἄρα τῶν ἴσων ἔςαι $ΛΑΤ : ΑΡ^2 = ΓΗ^2 + ΓΗ^2 : ΙΡΗ = 2ΗΓ^2 : ΙΡΗ$.

ἀπὸ τῆς ΓΝ τετραγώνȣ, καὶ πανταχȣ͂ μέγεθος ϛαθερόν.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ ϛ΄.

Ε᾽ὰν ἄρα ἐπὶ τῶν ἀντικειμένων ὑπερβολῶν τεταγμένως ἐπὶ τὸ πέρας Η τῆς διαμέτρȣ ΙΗ ἀχθῇ εὐθεῖα ἡ ΗΨ συμπίπτȣσα τῇ μιᾷ τῶν ἑτέρων συζυγῶν κατὰ τὸ Ψ, τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς τετράγωνον ἔϛαι διπλάσιον τȣ͂ ἀπὸ ΓΝ ϗ μέγεθος ϛαθερὸν ϗ αὐτὸ (61). Ε᾽πεὶ γάρ ἐϛιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΗΨ τετράγωνον πρὸς συναμφότερα τὰ ἀπὸ ΗΓ, ΓΗ, τȣτ᾽ ἔϛι πρὸς τὸ δὶς ἀπὸ ΓΗ, ȣ῞τω τὸ ἀπὸ τῆς ἑτέρας τεταγμένης ΜΒ πρὸς συναμφότερα τὰ ἀπὸ ΒΓ, ΓΗ (ἐκ τῆς παρȣ́σης Προτάσεως). Ω῾ς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΒ πρὸς συναμφότερα τὰ ἀπὸ ΒΓ, ΓΗ, ȣ῞τω τὸ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ (Πορ. Γ΄.), τό, τε δὶς ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ δὶς ἀπὸ ΓΗ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΗΨ πρὸς τὸ δὶς ἀπὸ ΓΗ, ȣ῞τω τὸ δὶς ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὸ δὶς ἀπὸ ΓΗ. Τὸ ἄρα ἀπὸ ΗΨ, διπλάσιον τȣ͂ ἀπὸ ΓΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄.

Ε᾽ν τῇ ᾽Ελλείψει ϗ ταῖς ἀντικειμέναις τομαῖς οἱαδή τις ἄλλη εὐθεῖα ΜΓ διὰ Σχημ. 36. 37.

61) *Τȣ͂ σημείȣ Ρ ὄντος ἐπεὶ τὸ Η, ἡ εὐθεῖα ΑΛ μεθίϛαται εἰς τὴν ΗΨ, ϗ ἡ ΤΑ εἰς τὴν ΟΗ. Ο῞θεν τὸ ὑπὸ ΤΑΛ ἀποβαίνει ἴσον τῷ* $O H \times H\Psi = H\Psi^2$ *· ἔϛι δὲ* $TA\Lambda = 2\Gamma N^2$ *· ἄρα ϗ* $H\Psi = 2\Gamma N$.

τοῦ κέντρου διήκουσα, διάμετρός ἐστι καὶ αὐτὴ δίχα τέμνουσα τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως παρὰ τὴν ἐφαπτομένην ΘΜ καταγομένας εὐθείας ΝΦ, ΗΖ.

Διὰ μὲν τῆς κορυφῆς Ν τῆς πρώτης διαμέτρου ΝΞ ἤχθω τῆς τομῆς ἐφαπτομένη ἡ ΝΙ, ἥτις τεμεῖ τὴν μὲν ΜΓ κατὰ τὸ Ι, τὴν δὲ ἐφαπτομένην ΜΘ κατὰ τὸ Ε, καὶ τὰς ἐπὶ τὴν ΜΓ τεταγμένως καταχθείσας ΗΖ, ηζ κατὰ τὰ Ω, ω, τὴν μὲν πρώτην ἀνωτέρω τῆς διὰ τοῦ Ν τεταγμένως ἀχθείσης ΝΦ, τὴν δὲ δευτέραν κατωτέρω. Ἐπὶ δὲ τὴν πρώτην διάμετρον τετάχθωσαν αἱ ΜΚ, ΦΤ, ΗΛ, ΖΒ, ηλ, ζβ, συμπίπτουσαι τῇ μὲν ΜΓ κατὰ Υ, Ρ, Σ, σ· τῇ δὲ ἐφαπτομένῃ ΜΘ κατὰ Ψ, Ο, Α, α. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ἐκ τοῦ ΙΑ'. Πορίσματος τῆς Θ'· ἡ ΓΚ πρὸς ΓΝ, ὡς ἡ ΓΝ πρὸς ΓΘ, ἔσται δὴ τὸ ἀπὸ ΓΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΝ, τοῦτ' ἔστι τὸ τρίγωνον ΒΚΜ πρὸς τὸ αὐτῷ ὅμοιον ΓΝΙ (19 τοῦ ς'.) ὡς ἡ ΓΚ πρὸς ΓΘ (ὅρ. 11 τοῦ Ε'.)· ὡς δὲ ἡ ΓΚ πρὸς ΓΘ, οὕτω τὸ ΓΚΜ πρὸς τὸ αὐτῷ ἰσοϋψὲς ΓΘΜ (1 τοῦ ς'.). Τὸ ἄρα ΓΝΙ τρίγωνον, ἴσον τῷ τριγώνῳ ΓΘΜ (*). Ἀρθέντων δὲ ἐπὶ μὲν τῆς Υ-

---

*) Ἐπεὶ ἐστι $\div\!\!\div$ ΓΚ : ΓΝ : ΓΘ (Πορ. ΙΑ. τῆς Θ'.) ἔσται δὴ (ὅρ. 11. τοῦ Ε'.) $ΓΚ : ΓΘ = ΓΚ^2 : ΓΝ^2$. ἀλλὰ $ΓΚ^2 : ΓΝ^2 = ΓΚΜ : ΓΝΙ$· (19. τοῦ ς'.) καὶ $ΓΚ : ΓΘ = ΓΚΜ : ΓΘΜ$ (1. τοῦ ς'.)· ἄρα $ΓΚΜ : ΓΝΙ = ΓΚΜ : ΓΘΜ$· καὶ $ΓΝΙ = ΓΘΜ$.

περβολῆς τῶν δύω τούτων ἴσων τριγώνων ἐκ τοῦ ΓΚΜ, ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως τοῦ ΓΚΜ ἐκ τῶν ΓΝΙ, ΓΘΜ, ἀπολείπεται ἐν ἑκατέρᾳ τῇ πτώσει τὸ τραπέζιον ΝΚΜΙ, ἴσον τῷ τριγώνῳ ΘΚΜ. Ἔστι δὲ τὸ τρίγωνον ΘΚΜ πρὸς τὰ αὐτῷ ὅμοια ΝΤΦ, ΠΛΗ, ΠΒΖ, πλη, πβζ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΤΦ, ΛΗ, ΒΖ, λη, βζ τετράγωνα (19 τοῦ ς′.) ἢ ἐκ τῆς φύσεως τῆς Ἐλλείψεως καὶ Ὑπερβολῆς ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΞΚΝ πρὸς τὰ ἐκείνοις ἀντιστοιχοῦντα ΞΤΝ, ΞΛΝ, ΞΒΝ, ΞΛΝ, ΞβΝ, (Πρότ. Ε′. καὶ ς′.)· τοῦτ᾽ ἔστιν ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπὸ ΓΝ, ΓΚ (62) πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀπὸ ΓΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΤ, ΓΛ, ΓΒ, ΓΛ, Γβ· ἢ (διὰ τὸ ἀνάλογον εἶναι τὰ ὅμοια τρίγωνα τοῖς ἀπὸ τῶν κατ᾽ αὐτὰ ὁμολόγων πλευρῶν τετραγώνοις) ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῶν τριγώνων ΓΝΙ, ΓΚΜ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ τριγώνου ΓΝΙ πρὸς τὰ ΓΤΤ, ΓΛΡ, ΓΒΣ, ΓΛΡ, Γβσ (63)· τοῦτ᾽ ἔστιν ὡς τὸ

---

62) *Τὰ ὀρθογώνια ΞΤΝ, ΞΛΝ, ΞΒΝ, ΞΛΝ, ΞβΝ ἐστὶν ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου ΚΝ ἡ ὑπερέχει τῶν ἀπὸ ΓΤ, ΓΛ, ΓΒ, ΓΛ, Γβ (5. Β′. ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως, καὶ 6. τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς.)*

63) *Ἐπεὶ ἐστι* $ΓΝΙ : ΓΚΜ = ΓΝ^2 : ΓΚ^2$ · *διελόντι ἔσται* $ΓΝΙ - ΓΚΜ : ΓΚΜ = ΓΝ^2 - ΓΚ^2 : ΓΚ^2$, *καὶ ἐναλλὰξ* $ΓΝΙ - ΓΚΜ : ΓΝ^2 - ΓΚ^2 = ΓΚΜ : ΓΚ^2$. *Καὶ αὖθις ἐπεί ἐστι,* $ΓΝΙ : ΓΛΡ = ΓΝ^2 : ΓΛ^2$, *ἔσται* $ΓΝΙ - ΓΛΡ : ΓΛΡ = ΓΝ^2 - ΓΛ^2 : ΓΛ^2$ *καὶ* $ΓΝΙ - ΓΛΡ : ΓΝ^2 - ΓΛ^2$

τραπέζιον ΝΚΜΙ πρὸς τὰ ΝΤΤΙ, ΝΛΡΙ, ΝΒΣΙ, ΝΛΡΙ, Νβσι. Ὥσπερ ἄρα τὸ τρίγωνον ΘΚΜ ἐςὶν ἴσον τῷ τραπεζίῳ ΝΚΜΙ, ὕτω ϗ τὸ ΝΤΦ, ἴσον ἔςαι τῷ ΝΤΤΙ, τό,τε ΠΛΗ, τῷ ΝΛΡΙ, καὶ τὸ ΠΒΖ τῷ ΝΒΣΙ, ϗ τὰ λοιπὰ τρίγωνα τοῖς λοιποῖς τραπεζίοις. Ὅθεν ἐὰν ἀπὸ τῦ τριγώνυ ΝΤΦ ϗ τῦ αὐτῷ ἴσυ τραπεζίυ ΝΤΤΙ ἀφαιρεθῇ τὸ χωρίον ΝΤΤΧ, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον ΧΤΦ ἴσον τῷ ὁμοίῳ τριγώνῳ ΧΙΝ· ὧν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ΦΧ, ΧΝ εἰσὶν ἀλλήλαις ἴσαι (19 τῦ ϛ΄.). Ὡσαύτως ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν τριγώνων ΠΒΖ, ΠΛΗ, τῦτ' ἔςι τὸ τραπέζιον ΑΒΖΗ, ἐςὶν ἴσον τῷ τραπεζίῳ ΝΒΣΡ, ὅπερ ἐςὶν ὑπεροχὴ τῶν τραπεζίων ΝΒΣΙ, ΝΛΡΙ, ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν ἴσων τραπεζίων ΛΒΖΗ, ΛΒΣΡ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν χωρίον ΛΒΔΣΗ, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον ΣΔΖ ἴσον ϗ ὅμοιον τῷ ΔΗΡ. ἡ ἄρα ΔΖ ἴση τῇ ΔΗ (19 τῦ ϛ΄.). Ἔτι ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ϖηΛ, ἐςὶν ὅμοιον τῷ ΠΗΛ, ϗ ἡ ΗΛ ἴση τῇ Λη, ἔςιν ἄρα τὰ τρίγωνα ϗ ἴσα·

$= \Gamma\Lambda P : \Gamma\Lambda^2$ · ἀλλὰ $\Gamma\Lambda P : \Gamma\Lambda^2 = \Gamma K M : \Gamma K^2$ · ἄρα $\Gamma N I - \Gamma K M : \Gamma N^2 - \Gamma K^2 = \Gamma N I - \Gamma\Lambda P : \Gamma N^2 - \Gamma\Lambda^2$ · ἤτοι $\Gamma N I - \Gamma K M : \Gamma N I - \Gamma\Lambda P = \Gamma N^2 - \Gamma K^2 : \Gamma N^2 - \Gamma\Lambda^2$. Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον δειχθήσεται ὅτι ϗ $\Gamma N I - \Gamma\Lambda P : \Gamma N I - \Gamma B\Sigma = \Gamma N^2 - \Gamma\Lambda^2 : \Gamma N^2 - \Gamma B^2$ · ϗ $\Gamma N I - \Gamma B\Sigma : \Gamma N I - \Gamma T N = \Gamma N^2 - \Gamma B^2 : \Gamma N^2 - \Gamma T^2$ ϗ ὕτως ἐφεξῆς. Ἡ ὑπεροχὴ ἄρα τῶν ἀπὸ ΓΝ, ΓΚ. πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῦ ἀπὸ ΓΝ. πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΤ, ΓΛ, ΓΒ, ΓΛ. Γβ, ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῶν τριγώνων ΓΝΙ, ΓΚΜ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῦ τριγώνυ ΓΝΙ. πρὸς τὰ ΓΤΥ, ΓΛΡ, ΓΒΣ, ΓΛΡ, Γβσ.

ἴσον δὲ τὸ ΠΗΛ τῷ τραπεζίῳ ΝΛΡΙ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ϖηΛ τῷ αὐτῷ ΝΛΡΙ· κοινῇ δὲ προσκειμένου τοῦ Λβσρ, γίνεται τὸ χωρίον ηπβσρ ἴσον τῷ τραπεζίῳ Νβσι. Ἀλλὰ τὸ τραπέζιον Νβσι ἐστὶν ἴσον τῷ τριγώνῳ πβζ (σημ. 50)· τὸ τρίγωνον ἄρα πβζ ἴσον τῷ χωρίῳ ηπβσρ· κοινοῦ δὲ τοῦ χωρίου ϖβσδ ἀρθέντος, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον ηρδ ἴσον τῷ τριγώνῳ ζσδ· ἐστὶ δὲ τὰ τρίγωνα ταῦτα καὶ ὅμοια, ἄρα αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ηδ, δζ ἀλλήλαις ἴσαι. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΓΜ ἐστὶ καὶ αὕτη διάμετρος δίχα τέμνουσα πάσας τὰς παρὰ τὴν ἐφαπτομένην ΘΜ τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν καταχθείσας εὐθείας ΝΦ, ΗΖ, ηζ· ὃ ἔδει δεῖξαι.

Ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως συμβήσεται τοῦτ' αὐτὸ καὶ πιπτούσης τῆς ἐπὶ τὴν πρώτην διάμετρον ΝΞ τεταγμένης περαιτέρω τοῦ Γ κέντρου ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Ξ, ὡς ἔχει φέρε ἡ βζ (σχημ. 38). Ἐν γὰρ τῇ πτώσει ταύτῃ ἐὰν διὰ τῆς κορυφῆς Ξ ἀχθῇ ἑτέρα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ Ξι, ἔσεται τὸ τρίγωνον ϖβζ ἴσον τῷ τραπεζίῳ ΞβΣι (64). Ἔστι γὰρ τὸ ΞβΣι, πρὸς τὸ ΝΚΜΙ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΞβΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΚΝ, ἢ ὡς τὸ ἀπὸ βζ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΚ, ἢ τέως ὡς τὸ τρίγωνον ϖβζ πρὸς

---

64) Ἔστι γὰρ ὡς δείκνυσιν ὁ συγγραφεὺς $\Xi\beta\Sigma\iota : NKMI = \Gamma\Xi^2 - \Gamma\beta^2 : \Gamma N^2 - \Gamma K^2 = \Xi\beta N : \Xi KN$ (5. τοῦ Β'.) $= \beta\zeta^2 : MK^2$ (Προτ. ϛ'.) $= \pi\beta\zeta : \Theta MK$ (19. τοῦ ϛ'.)· ἄρα $\Xi\beta\Sigma\iota : NKMI = \pi\beta\zeta : \Theta MK$· καὶ ἐπεὶ $\Theta MK = NKMI$, ἄρα καὶ $\pi\beta\zeta = \Xi\beta\Sigma\iota$.

τὸ αὐτῷ ὅμοιον ΘΚΜ, ὅπερ δέδεικται ἴσον τῷ ΝΚΜΙ τραπεζίῳ. Ὅθεν ἐὰν προστεθῇ κοινῇ πβζ, ΞβΣι τὸ ΣβΓ, γίνεται τὸ χωρίον πΓΣζ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΞΓι· τούτῳ δὲ ἴσον καὶ τὸ ΓΝΙ (65)· ἄρα τὸ χωρίον πΓΣζ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΓΝΙ· κοινοῦ δὲ τοῦ Γδπ ἀρθέντος, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον δΣζ ἴσον τῷ ΝπδΙ χωρίῳ· ἀλλὰ τὸ ΝπδΙ ἐστὶν ἴσον τῷ τριγώνῳ δΡη. Ἔστι γὰρ τὸ τρίγωνον πΛη ἴσον τῷ ΝΛΡΙ τραπεζίῳ, καὶ προσκειμένου κοινῇ τοῦ χωρίου ΛπδΡ, γίνεται τὸ τρίγωνον δΡη ἴσον τῷ χωρίῳ ΝπδΙ. Ἄρα τὸ τρίγωνον δΣζ ἴσον καὶ ὅμοιον τῷ τριγώνῳ δΡη· καὶ ἡ πλευρὰ ηδ ἴση τῇ δζ. Ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως ἄρα κτ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΓΘΜ δέδεικται ἐν τῇ παρούσῃ ἴσον τῷ ΓΝΙ, ἀρθέντος κοινῇ ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς τοῦ τετραπλεύρου ΓΘΕΙ, ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως τοῦ ΓΜΕΝ, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον ΙΕΜ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΘΕΝ. Προσκειμένου δὲ τούτοις κοινῇ τοῦ τετραπλεύρου ΝΕΜΧ, γίνεται τὸ τρίγωνον

65) Ἐπεὶ αἱ Ξι, ΝΙ ἐφάπτονται κατὰ κορυφὴν τῆς τομῆς, εἰσὶν ἄρα οἱαδήτινι τεταγμένῃ παράλληλοι (Προτ. Θ΄.) ἄρα καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι (30. τοῦ Α΄.). τὰ τρίγωνα ἄρα ΓΝΙ, ΓΞι ὅμοια· καὶ $ΓΝΙ : ΓΞι = ΓΝ^2 : ΓΞ^2$ (19. τοῦ ς΄.)· καὶ ἐπεί, οὔσης τῆς ΓΝ τῇ ΓΞ ἴσης, $ΓΝ^2 = ΓΞ^2$, ἄρα καὶ $ΓΝΙ = ΓΞι$.