## ΠΟ´ΡΙΣΜΑ Δ΄.

Διελόντι δὲ ἔςαι ὡς ἡ ΚΤ πρὸς ΤΒ (ἴσην τῇ ἡμιπαραμέτρῳ), ὕτως ἡ ΚΝ πρὸς ΝΘ (42).

## ΠΟ´ΡΙΣΜΑ Ε΄.

Ε᾽ὰν δὲ ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΡ συμβάλλυσα τῇ διαμέτρῳ κατὰ τὸ Θ, ἡ ΚΘ ἔςαι ὑφαπτομένη (Πορ. Γ΄.). Ε῎ςαι γὰρ ἡ ΚΒ πρὸς ΝΡ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΝΘ (Πορ. 1 τῆς 4 τῦ ς΄.).

## ΠΟ´ΡΙΣΜΑ ς΄.

Ε᾽ν τῇ Παραβολῇ ἄρα ἡ ὑφαπτομένη ΚΘ ἐςὶν ἀεὶ διπλασία τῆς ἀποτεμνομένης ἀπὸ τῆς διαμέτρυ ὑπὸ τῆς τεταγμένης πρὸς τῇ κορυφῇ τῦτ᾽ ἐςι τῆς ΚΝ. Ω῎σπερ δὴ ϗ τῆς ΝΘ, τῆς μεταξὺ τῆς κορυφῆς ϗ τῦ σημείυ τῆς συμβολῆς τῆς τε διαμέτρου ϗ τῆς ἐφαπτομένης. Η῾ γὰρ ΚΒ ἀεὶ ἐςὶν ἴση τῇ παραμέτρῳ ΝΖ (36 τῦ Α΄.), ὕσης τῆς διευθετύσης ΖΒ παραλλήλυ τῇ ΝΚ· ὅθεν ἡ ΚΒ, ἀεὶ διπλασία τῆς ἡμιπαραμέτρυ ΝΡ, ἢ τῆς αὐτῇ ἴσης ΚΤ. Ε῎νθευτοι ἐπεὶ ἐςὶν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΝΡ, ὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΝΘ, ϗ ἡ ΚΒ διπλασία τῆς ΝΡ· καὶ ἡ ΚΘ ἄρα διπλασία τῆς ΝΘ ἢ τῆς ΝΚ. Σχημ. 26.

---

42) Ε᾽πεὶ γάρ ἐςι $KB : KT = K\Theta : KN$ (Πορ. Γ΄.). Ε῎ςαι δὴ ϗ $KB - KT : KT = K\Theta - KN : KN$ (17. τῦ Ε΄.), ϗ ἀνάπαλιν $KT : BK - KT = KN : K\Theta - KN$, τῦτ᾽ ἔςιν ἡ ΚΤ πρὸς ΤΒ, ὡς ἡ ΚΝ πρὸς ΝΘ.

## ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Ζ'.

Σχημ. 27. 28. Ε'ν δὲ τῇ Υ'περβολῇ ϗ Ε'λλείψει ἔσης τῆς ΓΤ παραλλήλȣ τῇ ΞΒ, ἐςὶ δὴ ἡ ΞΚ πρὸς ΓΚ, ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΤ· ἀλλ' ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΤ, ὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΚΝ (Πορ. Β'.), ὡς ἄρα ἡ ΞΚ πρὸς ΓΚ, ὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΚΝ. Ο''θεν ἐὰν γένηται ὡς ἡ ΚΓ ἀπόςασις τῆς τεταγμένης ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ τῆς τομῆς πρὸς τὴν ΚΞ ἀπόςασιν τῆς αὐτῆς ἀπὸ τȣ̃ πορρωτέρω τέρματος τῆς πλαγίας πλευρᾶς, ὕτως ἡ ΚΝ ἀπόςασις τῆς αὐτῆς ἀπὸ τȣ̃ ἐγγυτέρω τέρματος τῆς πλαγίας πρὸς ἑτέραν ζητȣμένην τὴν ΚΘ. Αὕτη δὴ πορισθεῖσα, ἔσεται Υ'φαπτομένη.

## ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Η'.

Τὸ ἄρα ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚΘ ἐςὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΞΚΝ (16 τȣ̃ ς'.). Ε'ςὶ γὰρ ὡς ἡ ΚΞ πρὸς ΓΚ, ὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΚΝ.

## ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Θ'.

Α'ναςρέψαντι δέ ἐςιν ἡ ΞΚ πρὸς ΞΓ ἢ πρὸς ΓΝ τὴν ἡμίσειαν τῆς πλαγίας, ὡς ἡ ΚΘ ὑφαπτομένη πρὸς ΘΝ τὴν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης ϗ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἀπολαμβανομένην. Ε'πὶ γάρ ἐςιν ἡ ΞΚ πρὸς ΚΓ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΚΝ (Πορ. προηγ.) ἔςαι δὴ (Πορ. 1 τῆς 19 τȣ̃ Ε'.) ἡ ΞΚ πρὸς ΞΚ—ΚΓ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΚΘ—ΚΝ· τȣ̃τ' ἔςιν ἡ ΞΚ πρὸς ΞΓ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΝ.

## ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Ι΄.

Ἐπεὶ δὲ διὰ τὸ εἶναι τὴν μὲν ΞΒ τῇ ΓΡ, τὴν δὲ ΚΒ τῇ ΝΡ παράλληλον, ἐστὶν ὡς μὲν ἡ ΞΘ πρὸς ΓΘ, ἡ ΒΘ πρὸς ΘΡ· ὡς δὲ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΡ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΘΝ, ἔσται δὴ ἡ ΞΘ πρὸς ΓΘ, ὡς ἡ ΞΚ πρὸς ΞΓ ἢ ΓΝ. Ἡ γὰρ ΞΚ πρὸς τὴν ΞΓ ἢ τὴν ΓΝ ἐστὶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῇ ΘΚ πρὸς ΘΝ (Πορ. Θ΄.).

## ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ ΙΑ΄.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ἡ ΞΘ πρὸς ΓΘ, ὡς ἡ ΞΚ πρὸς ΞΓ (Πορ. προηγ.) διελόντι μὲν, ἔσεται ἡ ΞΓ πρὸς ΓΘ, ὡς ἡ ΚΓ πρὸς ΓΞ· ἐναλλάξαντι δὲ, ἡ ΚΓ, πρὸς ΞΓ, ὡς ἡ ΞΓ πρὸς ΓΘ. Αἱ ἄρα ΚΓ, ΞΓ, ΘΓ, ἢ αἱ ΚΓ, ΝΓ, ΘΓ εἰσὶ συνεχῶς ἀνάλογον, καὶ τὸ ὑπὸ ΚΓΘ ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιπλαγίας πλευρᾶς ΞΓ ἢ ΓΝ τετραγώνῳ. Ἡ ἄρα ἐφαπτομένη ὁρισθήσεται καὶ ἐὰν ληφθῇ τῶν ΚΓ, ΓΝ τρίτη ἑξῆς ἀνάλογον ἡ ΓΘ. Ἀπὸ δὲ τοῦ Θ ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΜ.

## ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ ΙΒ΄.

Ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς μὲν ἡ ΞΚ πρὸς ΞΓ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΘΝ (Πορ. Θ΄.)· ὡς δὲ ἡ ΞΓ πρὸς ΞΘ, οὕτως ἡ ΚΝ πρὸς ΚΘ (ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων τούτων ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΒΡ πρὸς ΒΘ.)· ἔσται ἄρα διΐσου τεταραγμένη ἡ ΞΚ πρὸς ΞΘ, ὡς ἡ ΚΝ πρὸς

ΘΝ (23 τῦ Ε΄.)· (43). Ἡ διάμετρος ἄρα τῆς τε Ὑπερβολῆς καὶ τῆς Ἐλλείψεως τέτμηται ἁρμονικῶς ἀνάλογον κατά τε τὰ πέρατα τῆς πλαγίας πλευρᾶς, καὶ τὰς συμβολὰς τῆς ἐφαπτομένης καὶ τεταγμένης, καὶ αὐτῆς τῆς διαμέτρου (44). Δοριωθήσεται

---

43) Δειχθήσεται δὲ ὅτι ἡ ΞΚ πρὸς ΞΘ ἐςὶν ὡς ἡ ΚΝ : ΘΝ καὶ διὰ τῆς 23. ὑποσημειώσεως. Ἐπεὶ γάρ ἐςι

$$\Xi K : \Xi\Gamma = \Theta K : \Theta N$$

καὶ $\Xi\Gamma : \Xi\Theta = KN : K\Theta$ ἔςαι δὴ

$$K\Xi \times \Xi\Gamma : \Gamma\Xi \times \Xi\Theta = \Theta K \times KN : N\Theta \times \Theta K$$

ἀλλ' ἔςι $K\Xi \times \Xi\Gamma : \Gamma\Xi \times \Xi\Theta = \Xi K : \Xi\Theta$.

καὶ $\Theta K \times KN : N\Theta \times \Theta K = KN : N\Theta$,

ἄρα $\Xi K : \Xi\Theta = KN : \Theta N$.

44) Ἐν μὲν Ὑπερβολῇ (σχημ. 27.) ἐπεὶ ἐςὶν $\Xi K : KN = \Xi\Theta : \Theta N$· καὶ ἡ μὲν $\Xi\Theta = \Xi K - K\Theta$, ἡ δὲ $\Theta N = K\Theta - KN$, ἔςιν ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τῆς ΞΚ πρὸς τὴν ΚΘ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῆς ΚΘ πρὸς τὴν ΚΝ, ὡς ἡ ΞΚ πρὸς τὴν ΚΝ· ἁρμονικῶς ἀνάλογον ἄρα εἰσὶν αἱ ΞΚ, ΚΘ, ΚΝ· Ἔςι γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν, πρὸς τὴν διαφορὰν τῆς δευτέρας πρὸς τὴν τρίτην, ὅπερ ἀπαιτεῖ ἡ τοιαύτη ἀναλογία. Τέτμηται ἄρα ἡ διάμετρος ἁρμονικῶς ἀνάλογον κατὰ τὰ σημεῖα Ξ, Κ, Θ, Ν, τῦτ' ἔςι τὰ πέρατα τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τὰ σημεῖα, καθ' ἃ συμβάλλουσι τῇ διαμέτρῳ ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ τεταγμένη.

Ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει (σχημ. 28.) ἐπεὶ ἐςι $\Xi K : KN = \Theta\Xi : \Theta N$· καὶ ἐναλλάσσοντι μὲν $\Xi K : \Theta\Xi = KN : \Theta N$· ἀνάπαλιν δὲ $\Theta\Xi : \Xi K = \Theta N : KN$· καὶ ἐςὶν ἡ μὲν $\Theta N = \Theta\Xi - \Xi N$· ἡ δὲ $KN = \Xi N - \Xi K$ ἄρα ἡ $\Theta\Xi : \Xi K = \Theta\Xi - \Xi N$:

ἄρα ἡ ἐφαπτομένη τῶν τομῶν τέτων ϗ ἐὰν γένηται ἡ τοιαύτη ἁρμονικὴ τομὴ τῆς διαμέτρε, τεθέντος τῦ σημεῖε Θ, ἔνθα ἂν ἔχοι γενέσθαι ἡ ΞΚ πρὸς ΚΝ, ὡς ἡ ΞΘ πρὸς ΘΝ.

## ΠΟ´ΡΙΣΜΑ ΙΓ´.

Ε᾽ντεῦθεν δὲ ἐξαῤῥύεται γενική τις ἑτέρα κατασκευὴ τῆς ἐφαπτομένης οἱασδήποτε τῦ Κώνε τομῆς πρὸς τῷ πρὸς αὐτῇ δοθέντι σημείῳ Μ. Α᾽χθεισῶν γὰρ ἀπὸ μὲν τῦ δοθέντος σημείε τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς ΜΚ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς Ν παραλλήλως τῇ ΜΚ τῆς ΝΙ, ἥτις δὲ ϗ ἐφάψεται τῆς τομῆς πρὸς τῇ κορυφῇ. Ε᾽ὰν ἀχθῇ μὲν ἐπὶ τῆς Παραβολῆς (σχημ. 26) τῇ διαμέτρῳ παπαράλληλος ἡ ΜΙ· ἐπιζευχθῇ δ᾽ ἐπὶ τῆς Υ῾περβολῆς ϗ Ε᾽λλείψεως (σχημ. 27, 28) ἀπὸ τῦ ἑτέρου πέρατος τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἡ ΞΜ συμβάλλεσα τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένη ΝΙ κατὰ τὸ Ι, καὶ προσέτι τμηθῇ δίχα ἡ ΝΙ κατὰ τὸ Ε, ἡ ἀπὸ τῦ Ε ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἔςαι ἐφαπτομένη. Ε᾽πὶ μὲν γὰρ τῆς Παραβολῆς ἐὰν προαχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον ἡ ΜΕ ἕως τῦ Θ, δῆλον ὡς ἡ ΘΚ ἔςαι τῆς ΘΝ διπλασία (45)· ὥσπερ ἡ ΜΚ (ἥτις

---

ΞΝ—ΞΚ. Αἱ ἄρα ΞΘ, ΞΝ, ΞΚ ἁρμονικῶς ἀνάλογον. Ἔςι γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῆς δευτέρας πρὸς τὴν τρίτην, ὥσπερ κἀντῇ Υ῾περβολῇ.

45) Ε᾽πεὶ τὸ τρίγωνον ΘΕΝ ἐςὶν ὅμοιον τῷ ΙΕΜ

ἐϛὶν ἴση τῇ ΝΙ) ἐϛὶ διπλασία τῆς ΝΕ. Διὰ δὴ τοῦτο ἡ ΜΘ ἐφάψεται τῆς τομῆς (Πορ. ϛʹ.). Ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ϗ Ἐλλείψεως ἐὰν ἀχθῇ τῇ ΕΝ παράλληλος ἡ ΞΟ, ἥτις δὴ ϗ συμπεσεῖται τῇ ΘΜ προαχθείσῃ κατὰ τὸ Ο, ἔϛαι δὴ ὡς ἡ ΞΘ πρὸς ΝΘ, οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς ΝΕ, τοῦτ᾽ ἔϛι πρὸς ΙΕ (ἴση γὰρ ἐκ κατασκευῆς τῇ ΝΕ ἡ ΙΕ)· ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΞΟ πρὸς ΙΕ, οὕτως ἡ ΞΜ πρὸς ΜΙ, τοῦτ᾽ ἔϛιν ἡ ΞΚ πρὸς ΚΝ· ὡς ἄρα ἡ ΞΘ πρὸς ΘΝ, οὕτως ἡ ΞΚ πρὸς ΚΝ. Ἁρμονικῶς ἄρα τμηθήσεται ἡ διάμετρος κατάγε τὸ Θ ϗ τὸ τῆς συμβολῆς τῆς τεταγμένης σημεῖον· καὶ ἑπομένως (Πορ. ΙΒʹ.) ἡ ΜΘ ἐφάψεται τῆς τομῆς ϗ ποιήσει τὸ πρόβλημα.

## ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΔʹ.

Οἱαδήτις Ὑπερβολῆς ἐφαπτομένη ΜΘ προσεκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ ἀεὶ κατωτέρω μὲν τοῦ κέντρου Γ, ἀνωτέρω δὲ τῆς κορυφῆς Ν. Μείζων ϗ γὰρ ἡ ΞΚ τῆς ΞΝ· μείζων ἄρα ϗ ἡ ΞΘ τῆς ΘΝ, οὐσῶν τῶν εὐθειῶν τούτων ἀνάλογον. Εἰ μὲν οὖν τὸ σημεῖον Θ ὑποτεθῇ ἀνωτέρω τοῦ Γ ἡ ΞΘ ἔϛαι ἐλάσσων τῆς ΘΝ, εἰδ᾽ ἐπ᾽ αὐτὸ τὸ Γ, ἴση.

---

ἔϛιν ἄρα $ME:E\Theta = IE:EN$· ἴση δ᾽ ἐκ κατασκευῆς τῇ $EN$ ἡ $IE$, ἴση ἄρα ϗ ἡ $ME$ τῇ $E\Theta$, ἡ ἄρα $M\Theta$ διπλασία ἐϛὶ τῆς $E\Theta$. Ὡσαύτως ἐπεὶ ὅμοιά ἐϛι τὰ τρίγωνα $\Theta MK$, $\Theta EN$ ϗ διὰ ταῦτα $\Theta M:\Theta E = K\Theta:\Theta N$, ὡς ἄρα ἡ $\Theta M$ ἐϛὶ διπλασία τῆς $\Theta E$, οὕτω δὴ ϗ ἡ $K\Theta$ τῆς $\Theta N$ ἐϛὶ διπλασία.

ὧν ἑκάτερον ἐστὶν ἐναντίον τῇ ἀναλογίᾳ. Ἔσται ἄρα ἀεὶ κατωτέρω μὲν τοῦ Γ, ἀνωτέρω δὲ τοῦ Ν.

## ΠΟ'ΡΙΣΜΑ ΙΕ'.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ Γ κέντρου τῆς Ὑπερβολῆς καὶ Ἐλλείψεως ἀχθῇ εὐθεῖα ἡ ΓΧ παράλληλος μὲν τῇ πρὸς τῇ κορυφῇ ἐφαπτομένῃ ΝΕ, συμβάλλουσα δὲ τῇ ΞΜ κατὰ τὸ Χ, δῆλον ὅτι αὕτη ἔσεται ὑποδιπλασία τῆς ΝΙ, ὥσπερ δὴ ἡ ΞΓ τῆς ΞΝ, διὰ δὴ τοῦτο ἴση τῇ ΝΕ ἢ τῇ ΕΙ. Ἀχθεισῶν ἄρα τῶν ΓΕ, ΧΕ, ἀναφυήσεται παραλληλόγραμμα τὰ ΓΧΕΝ, ΓΧΙΕ, ΓΕΧΞ. Εἰς τὸ ἀγαγεῖν ἄρα ἐφαπτομένων τῶν τοιούτων τομῶν πρὸς τῷ δοθέντι ἐν αὐταῖς σημείῳ Μ, ἀπόχρη μόνον ἐπιζευχθῆναι ἀπὸ τοῦ ποῤῥοτέρω πέρατος Ξ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον τὴν εὐθεῖαν ΞΜ, καὶ ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ τῆς εὐθείας ΓΧ παραλλήλου ταῖς τεταγμέναις, ἀναγεγράφθαι ἕν δή τι τῶν εἰρημένων παραλληλογράμμων, ἀπὸ δὲ τῆς γωνίας Ε ἐπιζευχθῆναι ἐπὶ τὸ Μ τὴν εὐθεῖαν ΕΜ, ἢ ἀχθείσης τῆς ΧΕ παραλλήλου τε καὶ ἴσης τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΝ ἐπιζευχθῆναι ἀπὸ τοῦ Ε τὴν ΕΜ· δῆλον γὰρ ὅτι ἔσεται ἐφαπτομένη.

## ΠΟ'ΡΙΣΜΑ ΙϚ'.

Τελευταῖον δὲ ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου, ἣν δέον Σχημ. 29.
ἔσω εἶναι καὶ ἄξονα, οἱασοῦν κωνικῆς Τομῆς ληφθῇ 30. 31.

ἐπὶ τἀντίθετα τῆς Ὑπεφαπτομένης τῇ ΚΤ ἴση ἢ ΚΣ, ἡ ἀπὸ τοῦ Σ ἐπὶ τὸ τῆς ἁφῆς σημεῖον Μ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ΣΜ ἔσεται τῇ καμπάλῃ κάθετος. Ποιήσει γὰρ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ΘΜ ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΣΜΘ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΚΤ τουτ' ἔστιν ἡ ΣΚ πρὸς ΚΜ, οὕτως ἡ αὐτὴ ΚΜ πρὸς ΚΘ. Ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν ΣΚΘ ὀρθογωνίῳ ἴσον· διὰ δὴ τοῦτο οὔσης τῆς ΚΜ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι ΣΘ. Τὸ τρίγωνον ΘΜΣ ἔσεται πρὸς τῷ Μ ὀρθογώνιον (46), ἐν ᾧ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ΜΚ μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων ΣΚ, ΚΘ (8 τοῦ ς΄.). Ἡ δέ γε τοιαύτη εὐθεῖα ΚΣ κα-

---

46) Τὸ τρίγωνον ΘΜΣ ἔσεται ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γάρ ἐστι $\Sigma K : KM = KM : K\Theta$, καὶ αἱ περὶ τὸ Κ γωνίαι ὀρθαὶ εἴτ' οὖν ἴσαι, ἔστι δὴ τὸ τρίγωνον ΣΜΚ ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΘΜΚ (6. τοῦ ς΄.). Ὅθεν αἱ ταῖς ἀνάλογοις πλευραῖς ἀντικείμεναι γωνίαι ΣΜΚ, ΚΘΜ ἀλλήλαις ἴσαι· κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ΘΜΚ, ἔσται ἡ $\Sigma MK + \Theta MK = \Theta M + \Theta MK$· ἀλλ' αἱ δύο ἔσχαται ὁμοῦ ληφθεῖσαι ἐξισοῦνται μιᾷ γε ὀρθῇ (32. τοῦ Α.), ἄρα καὶ αἱ δύο πρότεραι τοῦτ' ἔστιν ὅλαι ἡ ΘΜΣ ἴση μιᾷ γε ὀρθῇ· καὶ τὸ τρίγωνον ΘΜΣ ὀρθογώνιον.

Ἄλλως. Ἐπεὶ αἱ ΣΚ, ΚΜ, ΚΘ συνεχῶς ἀνάλογον, ἔσεται ἄρα $KM^2 = \Sigma K\Theta$· καὶ $2KM^2 = 2\Sigma K\Theta$· καὶ $2KM^2 + \Sigma K^2 + K\Theta^2 = 2\Sigma K\Theta + \Sigma K^2 + K\Theta^2$· ἀλλὰ $2KM^2 + \Sigma K^2 + K\Theta^2 = M\Sigma^2 + M\Theta^2$ (47. τοῦ Α.), καὶ $2\Sigma K\Theta + \Sigma K^2 + K\Theta^2 = \Sigma\Theta^2$ (1. τοῦ Β.), ἄρα $M\Sigma^2 + M\Theta^2 = \Sigma\Theta^2$ ἄρα (48. τοῦ Α.) ἡ πρὸς τὸ Μ γωνία, ὀρθή.

λεῖται μὲν ὙΠΟΚΑΘΕΤΟΣ· ἔστι δὲ ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ (σχημ. 29) ἀεὶ ἴση τῇ ἡμιπαραμέτρῳ ΝΡ, ᾗτινι ἴση ἡ ΚΤ· ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ καὶ Ἐλλείψει (σχημ. 30 31) πρὸς τὴν ἡμιπαράμετρον ὡς ἡ ΚΓ διάστασις τῆς τεταγμένης ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὸν πλάγιον ἡμιάξονα ΓΝ. Ὁμοίων γὰρ ὄντων τῶν τριγώνων ΓΚΤ, ΓΝΡ, ἔσεται ὡς ἡ ΚΤ πρὸς ΝΡ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς ΓΝ. Ἔστι δὲ ἐκ κατασκευῆς ἡ ΚΤ ἴση τῇ ΣΚ, ἡ Ὑποκάθετος ἄρα ΣΚ πρὸς ΝΡ, ὡς ἡ ΓΚ πρὸς ΓΝ. ἢ ἡ Ὑποκάθετος πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τεταγμένης διάστασιν ΓΚ, ὡς ἡ ὀρθία πλευρὰ ΝΖ πρὸς τὴν πλαγίαν ΝΞ. Ὄντων γὰρ τῶν τριγώνων ΤΚΓ, ΞΝΖ ὁμοίων, ἐστὶν ὡς ἡ ΚΤ, τουτ᾽ ἔστιν ἡ ΣΚ πρὸς τὴν ΓΚ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΝΞ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

Ἐν τῇ Παραβολῇ οἱαδήτις εὐθεῖα ΔΜ Σχημ. 32.
παρὰ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον ΝΚ ἠγμένη, ἔσεται δὴ καὶ αὕτη διάμετρος δίχα τέμνουσα τὰς τεταγμένως μὲν ἐπ᾽ αὐτήν, παραλλήλως δὲ τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΘ κατηγμένας εὐθείας ΗΖ, ΝΦ. Καὶ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ΗΔ, ΝΧ, τετράγωνα ἔσται ὡς αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ᾽ αὐ-

τῶν ἀπὸ τῆς δοθείσης διαμέτρȣ πρὸς τῇ κορυφῇ, Μ, ΜΔ, ΜΧ.

Διὰ τῆς κορυφῆς Ν τῆς διαμέτρȣ ΝΚ, ἐξ ἧς ἀπογεγέννηται ἡ Παραβολὴ, ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΝΕ, ἥτις ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ΜΔ προαχθείσῃ κατὰ Ι· παρὰ δὲ τὴν ἐφαπτομένην ΜΘ ἤχθω εὐθεῖα ἡ ΝΧΦ, ἥτις συμβαλεῖ τῇ μὲν ΜΔ κατὰ τὸ Χ, τῇ δὲ καμπύλῃ κατὰ τὸ Φ. Καὶ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΝΚ τετάχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΚΜ, ΦΤ, ὧν ἡ δευτέρα τεμεῖ τὴν διάμετρον ΜΔ κατὰ τὸ Υ.

Τȣ́των δὴ κατασκευαθέντων, ἔϛαι ἐκ τῆς φύσεως τῆς Παραβολῆς (Προτασ. Δ΄.) τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΤΦ, ὡς ἡ ΚΝ πρὸς ΤΝ, ἢ ὡς τὸ παραλληλόγραμμον ΝΚΜΙ πρὸς τὸ αὐτῷ ἰσοϋψὲς ΝΤΙΥ (1 τȣ̃ ϛ΄.). Ἔϛι δὲ ϗ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΘΚΜ, ΝΤΦ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΜΚ, ΦΤ τετράγωνα (19 τȣ̃ ϛ΄.). Ἆρα τὰ τρίγωνα ταῦτα ἐϛὶν ὡς τὰ εἰρημένα παραλληλόγραμμα (ἤτοι ΘΚΜ : ΝΤΦ = ΝΚΜΙ : ΝΤΥΙ.). Ἀλλὰ τὸ τὸ ΘΚΜ τρίγωνόν ἐϛιν ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΚΜΙ. Ἔχει γὰρ ἑκάτερον ὕψος μὲν ταὐτὸν, ἡ δὲ ΘΚ βάσις τȣ̃ τριγώνȣ ἐϛὶ διπλασία τῆς ΝΚ βάσεως τȣ̃ παραλληλογράμμου (Προ. ϛ΄ τῆς Θ΄.)· ἄρα ϗ τὸ τρίγωνον ΝΤΦ ἴσον ἐϛὶ τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΤΥΙ. Κοινȣ̃ δὲ ἀρθέντος τȣ̃ ΝΧΥΤ, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον ΧΦΥ ἴσον ϗ ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΧΝΙ, ἄρα ϗ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ΝΧ, ΧΦ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις (47). Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΔΜ δίχα ἔτεμε κατὰ τὸ Χ τὴν ΝΦ παράλληλον τῇ ἐφαπτομένῃ ΘΜ.

Ὡσαύτως ἐὰν ἀχθῇ ἀνωτέρω τῆς ΝΦ ἑτέρα τις εὐθεῖα παράλληλος ἡ ΗΖ τέμνȣσα τὴν ΝΚ προαχθεῖσαν κατὰ τὸ Π, ϗ τὴν ΝΙ κατὰ τὸ Ω. Ἐπὶ δὲ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον ΝΚ τεταγμένως καταχθῶσιν αἱ ΗΛ, ΖΗ συμβάλλȣσαι τῇ ΔΜ προσεκβληθείσῃ κατὰ Ρ, Σ, συμφανές ἐϛιν ὅτι ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΠΛΗ ἐϛι πρὸς τὸ αὐτῷ ὅμοιον ΘΜΚ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΛΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ (19 τȣ͂ ϛ'.), ἢ ὡς ἡ ΝΛ πρὸς ΝΚ (Προτασ. Δ'.), ἢ ὡς τὸ παραλληλόγραμμον ΛΝΡΙ πρὸς ΝΚΜΙ. Τὸ τρίγωνον ΠΛΗ ἔϛαι ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΛΝΡΙ, ὥσπερ τὸ ΘΜΚ δέδεικται ἴσον τῷ ΝΚΜΙ. Ἀλλὰ ϗ τὸ ἕτερον ὅμοιον τρίγωνον ΠΖΒ ἔϛαι τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΒΣΙ ἴσον. Ἔϛι γὰρ ϗ τȣ͂το πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΜΚ, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΚ, ἢ ἡ ΝΒ πρὸς ΝΚ, ἢ τὸ ΝΒΣΙ πρὸς ΝΚΜΙ. Ἴσον δὲ τὸ ΘΜΚ τῷ ΝΚΜΙ, ἴσον ἄρα ϗ τὸ ΠΖΒ τῷ ΝΒΣΙ. Καὶ ἡ ἄρα τῶν τριγώνων ΠΖΒ, ΠΛΗ, τȣ͂τ' ἔϛι τὸ τετράπλευρον ΛΗΒΖ ἐξισȣ͂ται τῇ ὑπεροχῇ τῶν τοῖς τριγώνοις τȣ́τοις ἴ-

(47) Τὰ τρίγωνα ΧΦΥ, ΧΝΙ, ὅμοια· ἄρα $ΧΦΥ : ΧΝΙ = ΧΦ^2 : ΧΝ^2$ (19. τȣ͂ ϛ'.)· ἔϛι δὲ $ΧΦΥ = ΧΝΙ$, ἄρα ϗ $ΧΦ^2 = ΧΝ^2$· ϗ $ΧΦ = ΧΝ$.

σων παραλληλογράμμων ΝΒΣΙ, ΝΛΡΙ, ἤτοι τῷ παραλληλογράμμῳ ΛΒΣΡ (48). Κοινοῦ δὲ τοῦ ΛΒΣΔΗ ἀφαιρεθέντος, ἀπολειφθήσεται τὸ τρίγωνον ΔΣΖ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΔΗΡ· εἰσὶ δὲ ϗ ὅμοια. Ἄρα αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ΗΔ, ΔΖ ἀλλήλαις ἴσαι· καὶ ἡ ΗΖ τέτμηται δίχα ὑπὸ τῆς ΔΜ κατὰ τὸ Δ.

Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ϗ κατωτέρω τῆς ΝΦ τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἡ ηζ τέμνουσα τὴν μὲν ΝΚ κατὰ τὸ π, τὴν δὲ ΝΙ κατὰ τὸ ω, ϗ ταχθῶσιν ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον ΝΚ αἱ ηλ, ζβ τέμνουσαι τὴν ΔΜ προσεκβληθεῖσαν κατὰ τὰ Ρ, σ, δειχθήσεται ὡσαύτως (49) τὸ τρίγωνον ηπλ, ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΛΡΙ. Κοινῇ δὲ προσκειμένου τοῦ ΛβσΙ, γεννήσεται τὸ χωρίον ηπβσΡ ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΝβσΙ, ὅπερ ἔσται τῷ τριγώνῳ πβζ ἴσον (50), διὰ τὸν ὁμοίοις στοιχείοις ἀνωτέρω

---

48) Τὸ τρίγωνον *ΠΛΗ*$=$*ΛΝΡΙ*, καὶ τὸ ΠΒΖ$=$*ΝΒΣΙ*· ἄρα *ΠΒΖ*$-$*ΠΛΗ*$=$*ΝΒΣΙ*$-$*ΛΝΡΙ* ἤτοι *ΛΗΒΖ* $=$*ΛΒΣΡ*.

49) Ἐπειδὴ ἐστιν ἡ πη, *ΠΗ* παράλληλος, τὰ τρίγωνα ἄρα πλη, *ΠΛΗ* ὅμοιά ἐστιν· ἐπεὶ δὲ ϗ ἡ λη ἐστι τεταγμένη ἐπὶ τὴν διάμετρον *ΝΚ*, ϗ τῇ *ΗΛ* ἐπ' εὐθείας κειμένη ἄρα ἡ λη τῇ *ΛΗ* ἴση· καὶ τὰ τρίγωνα πλη, *ΠΛΗ* πρὸς τῷ ὅμοια ἐστὶν ἀλλήλοις ϗ ἴσα· δέδεικται τὸ *ΠΛΗ* ἴσον τῷ *ΝΛΡΙ*, ἄρα ϗ πλη$=$*ΛΝΡΙ*.

50) Ἐπεὶ ἡ βζ ἐστι τῇ *ΚΜ* παράλληλος, τὰ τρίγωνα ἄρα πβζ, *ΘΚΜ* ὅμοια· διὰ δὴ τοῦτο (19. ς'.) τὸ πβζ : *ΘΗΜ*$=$$βζ^2 : KM^2$$=$Νβ : *ΝΚ*$=$*ΝβσΙ* : *ΝΚΜΙ* (1.

ἐκτεθέντα λόγον. Καὶ τὸ χωρίον ηπβσΡ ἔσαι ἴσον τῷ τριγώνῳ πβζ. Κοινοῦ δὲ τοῦ πϐσδ ἀρθέντος ἀπολειφθήσεται τὸ τρίγωνον ηδΡ ἴσον καὶ ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ζδσ· καὶ ἔσαι δὴ ἡ ηδ τῇ δζ ἴση. Ἡ ΜΔ ἄρα δίχα τέμνει οἱανδήποτε εὐθεῖαν ἠγμένην παρὰ τὴν ΘΜ ἐφαπτομένην, καὶ πρὸς τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένας ἔσι δὴ καὶ αὕτη διάμετρος.

Τέλος δὲ ἐπεὶ ἡ ΘΝ ἐσὶν ἴση τῇ ΝΚ, ἤτε ΝΚ τῇ ΙΜ, τὰ ὅμοια τρίγωνα ΘΕΝ, ΙΕΜ ἐσὶν ἄρα καὶ ἴσα (σημείωσ. 47). Προσκειμένου δὲ κοινῇ τοῦ ΝΕΜΧ, γίνεται τὸ ΘΝΧΜ τῷ τριγώνῳ ΧΙΝ ἴσον. Δέδεικται δὲ ἀνωτέρω τὸ ΧΙΝ ἴσον τῷ ΧΥΦ, ἄρα τὸ ΘΝΧΜ, ἴσον τῷ τριγώνῳ ΧΥΦ. Προσκειμένου δὲ πάλιν τοῖς αὐτοῖς τριγώνοις ΘΕΝ, ΙΕΜ τοῦ ΝΕΜΣΒ, γίνεται τὸ τετράπλευρον ΘΜΣΒ τῷ παραλληλογράμμῳ ΙΝΒΣ ἴσον· ἐδείχθη δὲ ἀνωτέρω τὸ ΙΝΒΣ ἴσον, τῷ τριγώνῳ ΠΖΒ, ἄρα τὸ ΘΜΣΒ ἐσὶ τῷ ΠΖΒ ἴσον. Κοινοῦ δὲ ἀφαιρεθέντος τοῦ τραπεζίου ΠΔΣΒ, λοιπὸν τὸ ΔΣΖ τρίγωνον λοιπῷ τῷ ΘΠΔΜ παραλληλογράμμῳ ἐσὶν ἴσον. Ἐνθεντοι τὸ τρίγωνον ΧΥΦ (= τῷ ΧΙΝ) πρὸς τὸ ΔΣΖ ἐσὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΧΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ (19 τοῦ ϛ'.), ἢ ὡς τὸ ἀπὸ ΧΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΗ. Δέδεικται δὲ τὸ μὲν ΧΥΦ ἴσον τῷ ΘΝΧΜ, τὸ δὲ ΔΣΖ ἴσον τῷ ΘΠΔΜ, ὡς ἄρα τὸ ΘΝΧΜ πρὸς τὸ ΘΠΔΜ,

---

τοῦ ϛ'.)· ἔσι δὲ τὸ *ΘΚΜ* ἴσον τῷ *ΝΚΜΙ*, ἄρα καὶ τὸ *πβζ* ἴσον τῷ *Νβσ Ι*.

ὕτω τὸ ἀπὸ ΧΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΗ. Ὡς δὲ τὸ ΘΝΧΜ πρὸς τὸ ΘΠΔΜ, ὕτως ἡ ΧΜ πρὸς ΔΜ (1 τῦ ς΄.). Ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΧΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΗ, ὕτως ἡ ΧΜ πρὸς ΔΜ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



## ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Ὅσα ἄρα προδέδεικται περὶ τὴν Παραβολὴν συμβαίνοντα συμπαραλαμβανομένων τῆς τε ἀρχικῆς διαμέτρυ ΝΚ καὶ τῶν ἐπ᾽ αὐτὴν τεταγμένων, καὶ δὴ καὶ τῆς εἰς ταύτην ἀνηκέσης ἐφαπτομένης ΘΜ, τὰ αὐτὰ πάντα δεχθήσεται συμβαίνοντα, συμπαραλαμβανομένων καὶ ἄλλης οἱασῦν διαμέτρου ΜΔ, τῶν τε ἐπ᾽ αὐτὴν τεταγμένων καὶ τῆς εἰς ταύτην ἀνηκέσης ἐφαπτομένης ΗΙ, καὶ δὴ καὶ τῆς Παραμέτρου ἤτοι ὀρθίας πλευρᾶς. Αὕτη τε γὰρ ἐκ τῆς διαμέτρυ ΜΔ ὁριζομένη ἔςαι ἀεὶ τρίτη ἀνάλογος οἱασδήποτε ἀποτεμνομένης ΔΜ, καὶ τῆς ἐπ᾽ αὐτὴν τεταγμένης ΖΔ. Ἥ τε Ὑφαπτομένη ΙΧ διπλασία ἔςαι κἀνταῦθα τῆς ἀποτεμνομένης ΔΜ, καὶ δὴ καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑκάςης τῶν τεταγμένων ἐπ᾽ αὐτὴν τετράγωνον ἴσον ἔςαι τῷ ὑπό τε τῆς ἀποτεμνομένης ΔΜ, καὶ τῆς εἰς ταύτην ἀνηκέσης ὀρθίας πλευρᾶς περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ (51).

---

51) Ἐπεὶ προδέδεικται ταῦτα πάντα ὑποθεμένης τῆς ἐκ τῆς γεννήσεως διαμέτρυ *ΝΚ* ἐν τῇ *Δ΄*: Προτάσει κἀν τῷ *Α΄* αὐτῆς πορίσματι ἀνάγκη ἄρα συμβαίνειν ὑποθεμένης καὶ ἄλλης οἱασῦν διαμέτρυ. Ἔςι γὰρ κἀν ταῦθα

## ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Δῆλον ἄρα ὡς οἱαδήποτε τρίγωνα ἐπὶ τῶν τεταγμένων συνιστάμενα καὶ ἐπὶ τῆς εἰς ταύτας ἀνηκούσης διαμέτρου ἐφεξῆς ἀλλήλων κείμενα, ὧν τε αἱ βάσεις τῇ τῆς διαμέτρου ταύτης ἐφαπτομένῃ παράλληλοι, οἷα τὰ ΠΛΗ, ΠΒΖ, ΝΤΦ κλ. ἐξισοῦται τοῖς ἀντιστοιχοῦσιν αὐτοῖς παραλληλογράμμοις ΝΛΡΙ, ΝΒΣΙ, ΝΤΥΙ, κλ. Ὥσπερ δὲ καὶ τὸ ΔΗΡ (ὅπερ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔΖΣ) τῷ ΜΔΠΘ, τό,τε δσζ τῷ ΜδπΘ (52). Καὶ τῶν λοιπῶν τριγώνων ἕκαστον ἑκάστῳ ἀντιστοιχοῦντι παραλληλογράμμῳ.

## ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Δῆλον ὡσαύτως ὅτι τὸ τρίγωνον ΘΕΝ δέδεικται ἴσον τῷ τριγώνῳ ΙΕΜ. Καὶ ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΔΗΡ, ὅπερ ἐξισοῦται τῷ ΔΣΖ, ἐστὶν ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΘΠΔΜ, κοινοῦ τοῦ ΜΔΗΟ ἀρθέντος, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον ΡΜΟ ἴσον τῷ τραπεζίῳ ΟΗΠΘ, προκειμένου δὲ κοινῇ τοῦ τριγώ-

---

ὥσπερ ἐκεῖσε τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα ὡς αἱ ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνόμεναι πρὸς τῇ κορυφῇ.

52) Τὸ *ΘΝΕ=ΜΙΕ*· κοινῇ ἄρα προσκειμένου τοῦ *ΝΕΜ* σβ, γενήσεται τὸ *ΘΜ* σβ=*ΝΙ* σβ. Ἔστι δὲ τὸ *ΝΙ* σβ ἴσον τῷ τριγώνῳ πβζ (σημ. 50.), ἄρα πβζ *ΘΜ* σβ· κοινοῦ δὲ τοῦ βπδσ ἀρθέντος, ἀπολείπεται τὸ *Μ* δπ Θ=δπζ.

νȣ ΠΛΗ, ἔςαι τὸ τρίγωνον ΡΜΟ μετὰ τȣ͂ αὐτῷ ὁμοίȣ ΠΛΗ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΘΛΟ. Καὶ ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΠΛΗ ἐςὶν ἴσον τῷ τριγώνῳ πλη ὕσης τῆς ΛΗ ἴσης τῇ Λη (σημ. 49), τὸ τρίγωνον ἄρα ΡΜΟ μετὰ ϗ τȣ͂ τριγώνȣ πλη ἐςὶν ἴσον τῷ ΘΛΟ. Ὅθεν ϗ τὸ ἀπὸ ΡΟ μετὰ τȣ͂ ἀπὸ ΗΛ ἢ τȣ͂ ἀπὸ ηΛ ἐςὶν ἴσον τῷ ἀπὸ ΛΟ. Καὶ ληφθεισῶν ἑτέρων πλευρῶν ὁμολόγων, ἔςαι τὸ ἀπὸ ΜΡ, τȣτ᾽ ἔςι τὸ ΚΛ μετὰ τȣ͂ ἀπὸ ΠΛ ἢ τȣ͂ ἀπὸ πΛ ἴσον τῷ ἀπὸ ΘΛ· τό,τε ἀπὸ ΜΟ μετὰ τȣ͂ ἀπὸ ΠΗ, ἢ τȣ͂ ἀπὸ πη τῷ ἀπὸ ΘΟ.

## ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

Προαχθείσης δὲ τῆς ἐφαπτομένης ΘΜ ἄχρις ὅτȣ συμπέσῃ ταῖς τεταγμέναις ΒΖ, ΤΦ προσεκβληθείσαις κατὰ τὰ Α, Ψ. Ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΧΤΦ, (ὅπερ ἐξισȣ͂ται τῷ ΧΙΝ) ἐςὶν ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΘΝΧΜ, κοινȣ͂ τȣ͂ ΜΧΦΨ, γενήσεται τὸ τρίγωνον ΜΤΨ ἴσον τῷ τραπεζίῳ

---

53) Ἐπεὶ ἐςὶν ὅμοια τὰ τρίγωνα $OPM$, $\Pi H\Lambda$, ἔςαι δὴ $OPM : \Pi H\Lambda = PO^2 : \Lambda H^2$ (19. τȣ͂ ς΄.) ϗ συνθέντι μὲν $OPM + \Pi H\Lambda : \Pi H\Lambda = PO^2 + \Lambda H^2 : \Lambda H^2$· ἐναλλάξαντι δὲ $OPM + \Pi H\Lambda : PO^2 + \Lambda H^2 = \Pi H\Lambda : \Lambda H^2$· ἀλλὰ $\Pi H\Lambda : \Lambda H^2 = \Theta\Lambda O : \Lambda O^2$ (διὰ τὴν αὐτήν)· ἄρα $OPM + \Pi H\Lambda : PO^2 + \Lambda H^2 = \Theta\Lambda O : \Lambda O^2$· ϗ ἀναλλάξαντι $OPM + \Pi H\Lambda : \Theta\Lambda O = PO^2 + \Lambda H^2 : \Lambda O^2$. Ἔςι δὲ $OPM + \Pi H\Lambda = \Theta\Lambda O$, ἄρα ϗ $PO^2 + \Lambda H^2 = \Lambda O^2$·

ΨΝΘΨ· Ὡσαύτως ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΔΣΖ (=ΔΗΡ) ἐστιν ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΜΔΠΘ, προσκειμένου κοινῇ τοῦ ΜΔΖΑ, γενήσεται τὸ τρίγωνον ΜΣΑ ἴσον τῷ τραπεζίῳ ΖΠΘΑ. Ἔτι ἐπεὶ τὸ τρίγωνον δσζ ἰσῦται τῷ παραλληλογράμμῳ Μδπθ, προσκειμένυ κοινῇ τῦ Μδζα, γενήσεται τὸ τρίγωνον Μσα ἴσον τῷ ζπθα τραπεζίῳ.



## ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄.

Ὅθεν ὄντος τῦ τριγώνου ΜΥΨ τῷ τραπεζίῳ ΦΝΘΨ ἴσου, ἐὰν προστεθῇ ἑκατέρῳ τὸ τῷ ΜΥΨ ὅμοιον τρίγωνον ΝΥΦ, ἔσαι τὰ τρίγωνα ΜΥΨ, ΝΥΦ ἅμα ληφθέντα ἴσα τῷ αὐτοῖς ὁμοίῳ τριγώνῳ ΘΥΨ. Καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΥΨ, ΥΦ τετράγωνα ἅμα ληφθέντα, ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΥΨ (54). Καὶ ἔτι ὄντος τῦ τριγώνυ ΜΣΑ τῷ τραπεζίῳ ΖΠΘΑ ἴσου, ἐὰν προστεθῇ κοινῇ τὸ τῷ ΜΣΑ ὅμοιον τρίγωνον ΠΒΖ, ἔσεται τὰ δύω ὅμοια τρίγωνα ΜΣΑ, ΠΒΖ ὁμῦ ληφθέντα τῷ αὐτοῖς ὁμοίῳ τριγώνῳ ΘΒΑ ἴσα, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΣΑ ὁμῦ ληφθέντα, ἴσα

---

54) $M\Upsilon\Psi : N\Upsilon\Phi = \Upsilon\Psi^2 : \Upsilon\Phi^2$ (19. τῦ ϛ΄.) ὅθεν ϗ $M\Upsilon\Psi + N\Upsilon\Phi : N\Upsilon\Phi = \Upsilon\Psi^2 + \Upsilon\Phi^2 : \Upsilon\Phi^2$, καὶ ἐναλλὰξ $M\Upsilon\Psi + N\Upsilon\Phi : \Upsilon\Psi^2 + \Upsilon\Phi^2 = N\Upsilon\Phi : \Upsilon\Phi^2 = \Theta\Upsilon\Psi^2 : \Upsilon\Psi^2$ ἢ $M\Upsilon\Psi + N\Upsilon\Phi : \Upsilon\Psi^2 + \Upsilon\Phi^2 = \Theta\Upsilon\Psi : \Upsilon\Psi^2$ · καὶ ἐναλλὰξ $M\Upsilon\Psi + N\Upsilon\Phi : \Theta\Upsilon\Psi = \Upsilon\Psi^2 + \Upsilon\Phi^2 : \Upsilon\Psi^2$ · ἔςι δὲ $M\Upsilon\Psi + N\Upsilon\Phi = \Theta\Upsilon\Psi$ · ἄρα καὶ $\Upsilon\Psi^2 + \Upsilon\Phi^2 = \Upsilon\Psi^2$.

τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ. Καὶ ἑτέρων οἱωνδήποτε ὁμολόγων πλευρῶν ληφθεισῶν, τῶν ΜΥ (ἢ ΚΥ), ΝΥ, ΘΥ, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς ΜΥ, ἢ τῆς ΚΥ μετὰ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ΝΥ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΘΥ· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.



## ΠΟ'ΡΙΣΜΑ ϛ'.

Ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΠΛΗ ἐςὶν ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΛΡΙ ἀρθέντος τȣ̃ κοινȣ̃ ΝΛΗΩ, ἀπολείπεται τὸ τρίγωνον ΠΝΩ ἴσον τῷ τραπεζίῳ ΩΗΡΙ· κοινῆ δὲ προσκειμένȣ τȣ́τοις τȣ̃ ὁμοίȣ τριγώνȣ ΗΡΔ, γίνεται τὸ τρίγωνον ΠΝΩ μετὰ τȣ̃ ΗΡΔ ἴσον τῷ αὐτοῖς ὁμοίῳ τριγώνῳ ΩΔΙ. Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΝ μετὰ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ΗΡ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΩΙ. Καὶ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς ΠΩ μετὰ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ΗΔ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΩΔ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΔ ἐςὶν ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΩΗ μετὰ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ΗΔ (6 τȣ̃ Β'.)· ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΠΩ μετὰ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ΗΔ, ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΩΗ μετὰ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ΗΔ. Κοινοῦ δὲ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἀρθέντος ἔςαι τῷ ἀπὸ τῆς ΠΩ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΩΗ. Ὡσαύτως ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ηπΛ ἐςὶν ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΛΡΙ, κοινῆ προσκειμένȣ τȣ̃ τραπεζίȣ ΝΛηω γενήσεται τὸ τρίγωνον πΝω ἴσον τῷ τραπεζίῳ ΙΡηω, καὶ προςεθέντος ἑκατέρῳ τȣ̃ τριγώνȣ ηΡδ, ἔςαι τὰ δύω τρίγωνα πΝω, ηΡδ ἅμα ληφθέντα, ἴσα τῷ αὐτοῖς ὁμοίῳ τριγώνῳ ωΙδ. Καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν δὴ, πω τετράγωνα ἅμα ληφθέντα ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς δω τετραγώνῳ ἢ τῷ ὑπὸ τῶν ζωη ὀρθογωνίῳ μετὰ τῦ ἀπὸ τῆς δη τετραγώνυ (6 τῦ Β'.). Κοινῦ δὲ τῦ ἀπὸ τῆς δη ἀφαιρεθέντος, ἔσαι τὸ ἀπὸ τῆς πω, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ζωη. Ἡ ἄρα πω μέση ἀνάλογος ἐν ταῖς ζω, ωη ὥσπερ δὲ ϗ ἡ ΠΩ ἐν ταῖς ΖΩ, ΩΗ.



## ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ'.

Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΟΡ, ΗΛ ὁμῦ ληφθέντα, ἐσιν ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΛΟ (Πορ. Γ'.) τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΛΟ, ἴσον τῷ ὑπὸ ηΟΗ μετὰ τῦ ἀπὸ ΗΛ (6 τῦ Β'.) τὸ ἄρα ἀπὸ ΟΡ ἴσον τῷ ὑπὸ ηΟΗ, ϗ ἡ ΟΡ μέση ἀνάλογος ἐν ταῖς ηΟ, ΟΗ. Προεκβληθείσης δὲ τῆς τεταγμένης ΒΖ ἐπὶ θάτερα τῆς καμπύλης κατὰ τὸ Φ, ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΣΑ, ΒΖ τετράγωνα ὁμῦ ληφθέντα ἐξισῦται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετραγώνῳ (Πορ. Ε'.) τῦτ' ἔσι τῷ ὑπὸ ὑπὸ ΦΑΖ μετὰ τῦ ἀπὸ ΒΖ (6 τῦ Β'.), ἄρα τὸ ἀπὸ ΣΑ, ἴσον τῷ ὑπὸ ΦΑΖ, ϗ ἡ ΣΑ μέση ἀνάλογος ἐν ταῖς ΑΦ, ΑΖ.

## ΠΟΡΙΣΜΑ Η'.

Ἐὰν ἄρα δύω εὐθεῖαι ΝΕ, ΜΕ ἐφαπτόμεναι τῆς Παραβολῆς συμπίπτωσιν ἀλλήλαις καθ' ἕν τι σημεῖον τὸ Ε, καί τις εὐθεῖα τῇ μιᾷ τούτων παράλληλος ἡ ΦΑ τέμνῃ τὴν ἑτέραν ἐκβληθεῖσαν κατὰ τὸ Α, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον