ΞΚ πρὸς ΞΙ, καὶ τῆς ΚΝ πρὸς ΝΙ σύγκειται καὶ ὁ τοῦ ΞΚΝ πρὸς τὸ ΞΙΝ (23 τοῦ ϛ΄. καὶ σημ. 24). ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΙΥ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΞΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΙΝ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΙΥ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΞΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΞΙΝ (26). Τὸ αὐτὸ δὴ δειχθήσεται καὶ περὶ τῶν ἐν τῇ τομῇ ΛΞη τεταγμένων (27)· δῆλον ἄρα τὸ προτεθέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Ἐὰν γένηται ὡς ἡ ΚΝ πρὸς ΚΜ, οὕτως ἡ ΚΜ πρὸς ζητουμένην τὴν ΚΧ, καὶ εὑρεθεῖσα ἡ ΚΧ, συναφθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΚΝ πρὸς τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ Κ, ἐπιζευχθείσης τε τῆς ΞΧ, ἀχθῶσιν ἐπ'

---

26) *Δειχθείη ἂν καὶ οὕτως ἡ Πρότασις.*

Ἐπεί ἐστιν $BK : \Pi I = K\Xi : \Xi I$

καὶ $K\Delta : I\Upsilon = KN : NI$, ἔσται δὴ (σημ. 23.) καὶ $BK \times K\Delta : \Pi I \times I\Upsilon = \Xi K \times KN : \Xi I \times IN$· ἀλλὰ $BK \times K\Delta : \Pi I \times I\Upsilon = MK^2 : HI^2$, ἄρα $MK^2 : HI^2 = \Xi K \times KN : \Xi I \times IN$.

27) Ἐν ταῖς ἀντικειμέναις τομαῖς *ΜΝΘ*, λ Ξ η ἔσται $HI^2 : \eta \iota^2 = \Xi IN : \Xi \iota N$. Ἀχθείσης γὰρ διὰ τοῦ σημείου ι, τῆς εὐθείας π ι υ παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ τῆς τοῦ Κώνου *ΑΒΔΘ* βάσεως, καὶ διὰ τῶν π υ, η λ παραλλήλων τοῖς *ΒΔ*, *ΜΚ* διαχθὲν ἐπίπεδον τὸ π η υ, ἔσται παράλληλον τῇ βάσει τοῦ Κώνου *ΑΒΔΘ* (15. τοῦ ΙΑ΄.) Κύκλος ἄρα ἡ τομὴ π η υ (14. σημ.) Ὅθεν $HI^2 : \Pi I\Upsilon = \eta\iota^2 : \pi\iota\upsilon$ (Πορ. Α. τῆς Α΄.). Ἔτι ἐπεὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι ιυ π, ΥΠ, τὰ τρίγωνα ἄρα ιΝυ, ΙΝΥ ὅμοια· ὅμοια δὲ καὶ τὰ ΙΠΞ, ιπΞ· ἄρα

αὐτὴν αἱ ΝΖ, ΙΣ τῇ ΝΚ παράλληλοι, ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Ν ἀχθεῖσα ΝΖ ἔσεται πλευρὰ ὀρθία ἤτοι παράμετρος Ὑπερβολῆς, ἧς ἴδιον τὸ ὥσπερ τὸ ὑπὸ τῆς ΚΜ μέσης ἀναλόγου τῶν ΝΚ, ΚΧ, τετράγωνον ἐξισοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ ΝΚΧ, παρακειμένῳ μὲν παρὰ τὴν παράμετρον ΝΖ ὑπερβάλλοντι δὲ τῷ ὑπὸ ΖΦΧ εἴδει ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ ΞΝΖ, περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΞΝ, καὶ τῆς ὀρθίας ΝΖ. οὕτω δὲ καὶ τὸ ἀφ' οἱασοῦν ἄλλης τεταγμένης ΗΙ τετράγωνον ἐξισοῦσθαι τῷ ὀρθογωνίῳ ΝΙΣ παρακειμένῳ μὲν παρὰ τὴν αὐτὴν παράμετρον ΝΖ, ἀλλὰ (ἀχθείσης τῆς ΖΡΦ, παραλλήλου τῇ ΝΚ, καὶ τεμνούσης τὰς ΙΣ, ΚΧ κατὰ τὰ Ρ, Φ.) ὑπερβάλλοντι εἴδει τῷ ΖΡΣ ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ αὐτῷ ὑπὸ ΞΝΖ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΚΧ πρὸς ΙΣ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΞ πρὸς ΞΙ, προσκειμένου κοινοῦ τοῦ λόγου ΚΝ πρὸς ΝΙ, ἔσεται τὸ ὑπὸ ΝΚΧ πρὸς τὸ ΝΙΣ, ὡς τὸ ὑπὸ ΞΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΙΝ (28), ἢ ὡς το

$ΥΙ : υι = ΙΝ : ιΝ$

καὶ $ΙΠ : ιπ = ΙΞ : ιΞ$· συνθέσει ἄρα (σημ. 23.)

$ΠΙΥ : πιυ = ΞΙΝ : ΞιΝ$.

Ἔστι δὲ $ΠΙΥ : πιυ = ΗΙ^2 : ηι^2$

ἄρα $ΗΙ^2 : ηι^2 = ΞΙΝ : ΞιΝ$ ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον μέρος τῆς Προτάσεως. Ἐὰν ἄρα Κῶνος οἱοσοῦν κ. τ.

28) Ἐπεὶ γάρ ἐστι $ΧΚ : ΣΙ = ΞΚ : ΞΙ$

καὶ $ΚΝ : ΙΝ = ΚΝ : ΙΝ$

ἔστι δὴ καὶ (σημ. 23.) $ΧΚ \times ΚΝ : ΣΙ \times ΙΝ = ΞΚ \times ΚΝ : ΞΙ \times ΙΝ$

ἤτοι $ΝΚΧ : ΝΙΣ = ΞΚΝ : ΞΙΝ$·

ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ (διὰ τὴν παρῦσαν Πρότασιν). Ἔςι δὲ (ἐκ κατασκευῆς) τὸ ἀπὸ ΜΚ ἴσον τὸ ὑπὸ ΝΚΧ, ἄρα ϗ τὸ ἀπὸ ΗΙ ἴσον τῷ ὑπὸ ΝΙΣ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β΄.

Ὡσαύτως ἐὰν γένηται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΒ, ὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ζητυμένην τὴν ΚΧ, συναφθείσης τῆς ΚΧ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΝΚ ὡς ἀνωτέρω ϗ ἐπιζευχθείσης τῆς ΞΧ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ν ἐπὶ τὴν ΞΧ ἀχθεῖσα ΝΖ παράλληλος τῇ ΚΧ, ἔσεται τῆς Ὑπερβολῆς πλευρὰ ὀρθία ἤτοι παράμετρος. Τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν ΝΚ, ΚΧ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔςαι τῷ ὑπὸ τῶν ΒΚΔ. ἴσον ἄρα ϗ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΚ τετραγώνῳ (Πορ. ποηγ.). ὅθεν ϗ τὸ ὑπὸ ΝΙΣ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΗΙ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ΄.

Καὶ ἔτι ἀχθείσης διὰ τῆς κορυφῆς Ν τῆς εὐθείας ΝΕ παρὰ τὴν ΒΔ, ἐὰν γένηται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΔ, ὕτως ἡ ΕΝ πρὸς τετάρτην ἀνάλογον τὴν ΝΖ, ἡ τετάρτη δὴ ἄυτη ἔσεται τῆς Ὑπερβολῆς Παράμετρος. Ἀχθείσης γὰρ τῆς εὐθείας ΞΖ καὶ

ἀλλὰ $ΞΚΝ : ΞΙΝ = ΜΚ^2 : ΙΗ^2$· ἄρα

$ΜΚ^2 : ΗΙ^2 = ΝΚΧ : ΝΙΣ$ (Προτ. παρυσ.)·

ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ *ΜΚ* τῷ ὑπὸ *ΝΚΧ*, ἴσον ἄρα ϗ τὸ ἀπὸ *ΗΙ* τῷ ὑπὸ *ΝΙΣ*.

προσεκβληθείσης ἕως ὅτε συμπέσῃ ταῖς τῇ ΝΖ παραλλήλοις ΙΣ, ΚΧ κατὰ τὰ Σ, Χ, ἔσεται (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΞΚ, ΚΞΧ, ΝΞΕ) ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΕΝ, ϗ ἡ ΚΧ πρὸς ΝΖ, ὕτως ἡ ΚΞ πρὸς ΞΝ. ὅθεν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΧ ἔςαι ὡς ἡ ΕΝ πρὸς ΝΖ (11 τῦ Ε΄.), ἢ ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΔ (ἐξ ὑποθέσεως). ϗ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΔ, ὅπερ ἐςὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΚ, ἐξισωθήσεται τῷ ὑπὸ τῶν ΝΚ, ΚΧ ὡς ἀνωτέρω. Ἡ ἄρα τῇ ΚΧ παράλληλος ΝΖ ἔσεται Παράμετρος (Πορ. Α΄.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

Ἀχθείσης ἀπὸ τῆς τῦ Κώνυ κορυφῆς Α ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῦ διὰ τῦ ἄξονος τριγώνυ τῆς εὐθείας ΔΟ παραλλήλυ τῇ ΝΚ, ἐπεί ἐςι διὰ τὰ δειχθέντα ἐν τῷ προηγυμένῳ Πορίσματι ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΕ, ὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΝΚ, ἤτοι ἡ ΔΟ πρὸς ΟΑ (διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΔΚΝ, ΔΟΑ ὁμοιότητα). ἡ δὲ ΝΕ πρὸς ΝΞ, ὡς ἡ ΒΟ πρὸς ΟΑ (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΝΞΕ, ΟΑΒ τριγώνων). Ἡ ἄρα ΝΖ πρὸς ΝΞ λόγον ἕξει τὸν συγκείμενον ἐκ τῦ τῆς ΔΟ πρὸς ΟΑ ϗ τῦ τῆς ΒΟ πρὸς ΟΑ, ὅς ἐςιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ΔΟΒ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΟΑ τετράγωνον (29). Ὅθεν ἐὰν ποιηθῇ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς

---

29) Ἐπεί ἐςι $ZN : NE = \Delta O : OA$
καὶ $NE : N\Xi = OB : OA$.

ΟΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΟΒ ὀρθογώνιον, ὕτως ἡ πλαγία πλευρὰ ΝΞ πρὸς ζητυμένην τὴν ΝΖ. ἡ ΝΖ ὕτως εὑρεθεῖσα, ἔσεται πλευρὰ ὀρθία ἤτοι Παράμετρος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'.

Ἀχθείσης ὡσαύτως ἀπὸ τῆς τῦ Κώνυ κορυφῆς Α, τῆς εὐθείας ΑΤ παραλλήλυ μὲν τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ΒΔ, συμβαλλέσης δὲ τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ κατὰ τὸ Τ, ἔσεται τὸ ὑπὸ ΞΤΝ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ τετράγωνον, ὡς ἡ

ἔσεται δὴ καὶ $ZN \times NE : \Xi N \times NE = \Delta O \times OB : OA \times OA$ (σημ. 23.) καὶ τῆς NE κοινῦ ὕψυς λαμβανομένης, τὸ ὑπὸ ZNE πρὸς τὸ ὑπὸ ΞNE ἐςιν ὡς ἡ ZN πρὸς $N\Xi$ (1. τῦ ς'.) καὶ ἡ ZN πρὸς $N\Xi$ ὡς τὸ ὑπὸ ΔOB πρὸς τὸ ἀπὸ OA. ἡ ZN ἄρα πρὸς τὸν $N\Xi$ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν $\begin{cases} \Delta O : OA \\ OB : OA \end{cases}$

30 Ἄλλως. Ὁ ἐκ τῶν $ZN : NE$ καὶ $NE : N\Xi$ συγκείμενος λόγος, ἐςὶν ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον $ZN \times NE$ πρὸς τὸ $\Xi N \times NE$· ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ZNE πρὸς τὸ ὑπὸ ΞNE ἐςιν ὡς ἡ ZN πρὸς ΞN (1. τῦ ς'.) ἄρα ἡ ZN πρὸς ΞN λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῦ τῆς $ZN : NE$, καὶ τῦ τῆς $NE : N\Xi$. Ἐπεὶ δὲ ἐςι $ZN : NE = \Delta O : OA$, καὶ $NE : N\Xi = OB : OA$, ἄρα ἡ $ZN : N\Xi$, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῦ τῆς $\Delta O : OA$, καὶ τῦ τῆς $OB : OA$· ἀλλὰ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν αὐτῶν λόγων ἔχει καὶ τὸ ὑπὸ ΔOB πρὸς τὸ ἀπὸ OA (σημ. 24.)· ἄρα $ZN : N\Xi = \Delta OB : OA^2$.

πλαγία πλευρὰ ΝΞ πρὸς τὴν ὀρθίαν ΝΖ. Ἐπεὶ γὰρ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΤΝ, ΝΚΔ τριγώνων, ἡ ΝΤ πρὸς ΑΤ ἐςὶν ὡς ΝΚ πρὸς ΚΔ, ἤτοι ἡ ΑΟ πρὸς ΟΔ, ϰ̀ ἡ ΞΤ πρὸς ΑΤ, ὡς ἡ ΑΟ πρὸς ΟΒ (διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΞΤΑ, ΑΟΒ ὁμοιότητα). Συντιθέντι ἄρα ἔσεται τὸ ὑπὸ ΞΝΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΟΒ (31). ὅθεν ϰ̀ ὡς ἡ ΝΞ πρὸς ΝΖ (Πορ. προηγ.).

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ ς'.

Τελευταῖον δὲ τὸ ἀφ' οἱασδήποτε τεταγμένης ΜΚ τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν τῆς διαμέτρȣ τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΞΚΝ, τότε ἀφ' ἑτέρας οἱασȣ̃ν τεταγμένης ΗΙ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ἀντιςοιχέντων αὐτῇ τμημάτων τῆς διαμέτρȣ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΞΙΝ, ἔσεται ἀεὶ ὡς ἡ ὀρθία πλευρὰ ΝΖ πρὸς τὴν πλαγίαν ΝΞ. Ἔςι γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ ΝΚΧ (ὅπερ ἐξ ὑποθέσεώς ἐςιν ἴσον τῷ ἀπὸ ΜΚ) πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΚΞ, ὡς ἡ ΚΧ πρὸς ΚΞ (1 τȣ̃ ς'.). Τὸ δὲ ὑπὸ ΣΙΝ, ὅπερ ἐςὶν ἴσον τῷ ἀπὸ ΗΙ (Πορ. Α'. τῆς παρȣ́σης) πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΙΝ, ὡς ἡ ΣΙ πρὸς ΙΞ (διὰ τὴν αὐτήν). Ἀλλ'

---

31) Ἐπεὶ γάρ ἐςι $NT : TA = AO : O\Delta$,
καὶ $\Xi T : TA = AO : OB$,
ἔςαι ἄρα ϰ̀ $\Xi TN : TA^2 = AO^2 : \Delta OB$. ἀλλὰ $AO^2 : \Delta OB = \Xi N : NZ$ (Πορ. προηγ.), ἄρα $\Xi TN : TA^2 = \Xi N : NZ$.

ὁ λόγος τῆς ΚΧ πρὸς ΚΞ, ὅ,τε τῆς ΣΙ πρὸς ΙΞ, ἐςὶν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΖ πρὸς τὴν πλαγίαν ΝΞ (ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα ΞΚΧ, ΞΙΣ, ΞΙΝ.). Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν τεταγμένων ΜΚ, ΗΙ τετράγωνα πρὸς τὰ ὑπὸ τῶν αὐταῖς ἀντιςοιχέντων τμημάτων τῆς διαμέτρου περιεχόμενα ὀρθογώνια ΞΚΝ, ΞΙΝ, ἐςὶν ὡς ἡ παράμετρος ἤτοι ὀρθία πλευρὰ ΝΖ πρὸς τὴν πλαγίαν ΝΞ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν Κῶνος οἱοσῦν ΑΒΜΔ ἐπιπέδῳ τετμημένος διὰ τῦ ἄξονος, τμηθῇ αὖθις ἑτέρῳ ἐπιπέδω, διηγμένῳ μὲν δι' εὐθείας τῆς ΜΚΘ πρὸς ὀρθὰς ὕσης τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τῦ Κώνυ ἢ καὶ ἑτέρας ΗΙ πρὸς ὀρθὰς ὕσης τῇ διαμέτρῳ τῦ τῇ βάσει παραλλήλυ κύκλυ, συμπίπτοντι δὲ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν τῦ διὰ τῦ ἄξονος τριγώνυ κατωτέρω τῆς τῦ Κώνυ κορυφῆς Α κατὰ τὰ σημεῖα Ν, Ξ. Τὰ ἀπὸ τῶν ἐν τῇ τοιᾶδε τομῇ τεταγμένων ΜΚ, ΗΙ τετράγωνα ἔσεται ὡς τὰ ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τῆς διαμέτρυ τμημάτων τῶν μεταξὺ αὐτῶν τε τῶν τεταγμένων καὶ ἑκατέρυ τῶν ση- Σχημ. 19.

μείων Ξ, Ν· ἤτοι ὡς τὰ ὑπὸ τῶν ΞΚΝ, ΞΙΝ. Ἡ δὲ τοιαύτη τομὴ ἐὰν μήτε παράλληλος ᾗ τῇ βάσει τοῦ Κώνου, μήτε ὑπεναντίως ταύτῃ κειμένη, καὶ ἑπομένως μήτε κύκλος, καλείσθω εἰδικῷ ὀνόματι *ΕΛΛΕΙΨΙΣ*, ἧς πλαγία πλευρά ἐστιν ἡ ΝΞ.

Ἀχθείσης διὰ τοῦ Ι, καθ' ὃ τεταγμένη τις ἡ ΗΙ συμβάλλει τῇ διαμέτρῳ ΝΞ, τῆς εὐθείας ΠΙΥ παραλλήλως τῇ ΒΔ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ Κώνου, τὸ διὰ τῶν εὐθειῶν ΠΥ, ΗΛ, ἐπίπεδον ὡς τῇ βάσει τοῦ Κώνου παράλληλον (15 τοῦ ΙΑ΄.), ποιήσει τομὴν τὸν ΠΗΥ κύκλον (Προτ. Α΄.). Ὅθεν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΙ, ἔσεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΔ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΙΥ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΙΥ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς ΒΚ πρὸς ΠΙ. καὶ τοῦ τῆς ΚΔ πρὸς ΙΥ, καὶ ὁ μὲν τῆς ΒΚ πρὸς ΠΙ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΚΞ πρὸς ΞΙ (εἴγε τὰ τρίγωνα ΒΞΚ, ΠΞΙ, ὅμοια)· ὁ δὲ τῆς ΚΔ πρὸς ΙΥ ταὐτὸς τῷ τῆς ΚΝ πρὸς ΝΙ (ὅμοια γὰρ καὶ τὰ τρίγωνα ΚΝΔ, ΙΝΥ.), τὸν δὲ ἐκ τῶν τῆς ΚΞ πρὸς ΞΙ καὶ τῆς ΚΝ πρὸς ΝΙ συγκείμενον ἔχει καὶ τὸ ὑπὸ ΞΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΙΝ· ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπο ΠΙΥ ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΞΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΙΝ. Ἀλλ' (εἴρηται ἀνωτέρω) ὡς τὸ ὑπὸ ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΙΥ, ὕτω τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ, ὕτω τὸ ὑπὸ ΞΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΙΝ. Ἡ δεῖξις τῆς παρύσης Προτάσεως ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ τῆς προηγυμένης.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Ἐὰν γένηται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΜ ὕτως ἡ ΚΜ πρὸς ζητυμένην τὴν ΚΧ, καὶ ὁρισθεῖσα μὲν ἡ ΚΧ συντεθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΝΞ πρὸς τῷ σημείῳ Κ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἡ ΞΧ τέμνῃ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς παραλλήλως τῇ ΚΧ ἀχθεῖσαν ΝΖ κατὰ τὸ Ζ, ἀχθῇ δὲ προσέτι καὶ ἡ ΙΣ τῇ μὲν ΚΧ παράλληλος, οἱαδήτινι δὲ ἑτέρᾳ τε ταγμένῃ ΗΙ συνςοιχῦσα, ἡ ΝΖ ἔσεται πλευρὰ ὀρθία ἤτοι Παράμετρος τῆς τοιαύτης τομῆς. Ἐν ᾗ τὰ ἀφ᾽ οἱωνδήποτε τεταγμένων ΜΚ, ΗΙ τετράγωνα ἐξισωθήσεται τοῖς συςοιχῦσιν ὀρθογωνίοις ΧΚΝ, ΣΙΝ παρακειμένοις μὲν παρὰ τὴν ὀρθίαν πλευρὰν ΝΖ, ἀλλ᾽ (ἀχθείσης παρὰ τὴν ΝΞ τῆς εὐθείας ΖΡΦ, καὶ τεμύσης τὰς ΙΣ, ΚΧ προσαχθείσας κατὰ τὰ Ρ, Φ) ἐλλείπυσι τοῖς ὑπὸ ΧΦΖ, ΣΡΖ, ὁμοίοις καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ὑπό τε τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς ὀρθίας περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ΞΝΖ (32). Δείκνυ-

---

32) Τὸ ὑπὸ $XKN + \Phi X \times KN$ ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ ΦKN· (1. τῦ Β.) Ἐςὶ δὲ $\Phi X \times KN = X\Phi Z$ (εἴγε ἡ $X\Phi =$ τῇ KN) ἄρα $XKN + X\Phi Z = \Phi KN$, ὅθεν $XKN = \Phi KN -$ $X\Phi Z$· ἤτοι τὸ ὀρθογώνιον XKN ἐλλείπει τῦ ΦKN ἢ

ται ταῦτα ὁμοίως τοῖς ἐν τῷ Α΄. Πορίσματι τῆς προηγουμένης Προτάσεως. Διαφέρει δὲ ταῦτα ἐκείνων, ὅτι ἐκεῖ μὲν τὰ παρὰ τὴν ὀρθίαν πλευρὰν παρακείμενα ὀρθογώνια, οἷς ἐξισοῦται τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα, ὑπερβάλλει, ἐνταῦθα δὲ ἐλλείπει εἴδεσιν ὁμοίοις καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ὑπὸ τῆς ὀρθίας καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. παρ' ὃ δὴ καὶ ἤκουσεν ἐκείνη μὲν ἡ τομὴ, Ὑπερβολή· αὕτη δὲ Ἔλλειψις.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Β΄.

Ὡσαύτως ἐὰν γένηται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς τετάρτην ζητουμένην τὴν ΚΧ, ἐπιζευχθεῖσα, κατὰ τὰ ἐν τῷ Β΄. Πορίσματι τῆς προηγουμένης, ἡ ΞΧ, διορίσει τὴν Παράμετρον ΝΖ, ἠγμένην παρὰ τὴν ΚΧ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Γ΄.

Ὁμοίως ἐὰν γένηται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως ἡ ΝΕ τῇ ΒΔ παράλληλος πρὸς ζητουμένην τὴν ΝΖ,

---

τοῦ *ΚΝΖ* τῷ ὑπὸ ΧΦΖ, οὗ ἡ διάμετρος ΧΖ ἐστὶ μέρος τῆς ΞΖ, διαμέτρου τοῦ ὀρθογωνίου ΞΝΖ· ὅθεν τὸ ὀρθογώνιον ΧΦΖ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΞΝΖ ὀρθογωνίῳ (26. τοῦ ς΄.) Ὁμοίᾳ ἐφόδῳ δειχθήσεται ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ *ΣΙΝ* ἐλλείπει τοῦ *ΡΙΝ*, ἢ τοῦ *ΙΝΖ* τῷ *ΣΡΖ* ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΞΝΖ.

πορισθήσεται καὶ οὕτως ἡ Παράμετρος κατὰ τὰ ἐν τῷ Γ΄. Πορίσματι τῆς προηγουμένης.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Δ΄.

Α'χθείσης δὲ ἀπὸ τῆς τοῦ Κώνου κορυφῆς Α παρὰ τὴν ΝΚ τῆς ΑΟ, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΟΒ, ὡς ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΝΖ, τοῦτ' ἔστιν ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς ἐν τῷ Δ΄. Πορίσματι τῆς προηγουμένης.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Ε΄.

Ω'σαύτως ἀχθείσης ἀπὸ τῆς κορυφῆς παρὰ τὴν ΒΔ τῆς εὐθείας ΑΤ καὶ συμπεσούσης τῇ ΞΝ κατὰ τὸ Τ, ἔσεται τὸ ὑπὸ ΞΤΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ, ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΝΞ πρὸς τὴν ὀρθίαν ΝΖ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ ς΄.

Τέλος δὲ τὸ ἀφ' οἱασδήποτε τεταγμένης τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἔσεται ὡς ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν (ἤτοι $KM^2 : \Xi KN$ ἢ $HI^2 : \Sigma IN$, ὡς $NZ : N\Xi$), ὥσπερ ἐν τῷ ς΄. Πορίσματι τῆς προηγουμένης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Ε'ὰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Κώνου ΑΒΔ δύω ἢ καὶ πλείους Παραβολαὶ, ἢ Υ'περβολαὶ ἢ Σχημ. 20. 21. 22.

Ἐλλείψεις ὑπὸ ἀλλήλοις παραλλήλων ἐπιπέδων ἀποτμηθῶσιν, αἱ κατ᾽ αὐτὰς Παράμετροι ἤτοι ὀρθίαι πλευραὶ ΝΖ, ΥΤ ἀνάλογον ἔσεται ταῖς αὐτῶν ἀπὸ τῆς τοῦ Κώνου ἄχρι τῶν κατὰ τὰς τομὰς κορυφῶν Ν, Υ διαςάσεσιν, ἤτοι ὡς ἡ ΝΑ πρὸς τὴν ΥΑ.

Ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὸ Β΄. Πόρισμα τῆς Δ΄. καὶ τὰ Πορίσματα τῆς Ε΄. καὶ τῆς ς΄., ἐςὶν ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως ἡ ΝΕ πρὸς τὴν Παράμετρον ΝΖ (33), ἔσεται δὴ ὡσαύτως καὶ ὡς ἡ ΥΟ πρὸς ΟΔ, οὕτως ἡ ΠΥ πρὸς ΥΤ Παράμετρον τῆς ἑτέρας τομῆς παραλλήλου τῇ προτέρᾳ. Καὶ ἐπεὶ δὴ ὁ λόγος τῆς ΝΚ πρὸς ΚΔ ἐςὶν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΥΟ πρὸς ΟΔ (παράλληλος ἡ ΝΚ τῇ ΥΟ)· ἔςαι ἄρα ὁ λόγος

---

33) Ὅτι μὲν ἐν τῇ Παραβολῇ καὶ Ὑπερβολῇ ἡ *ΝΚ : ΚΔ* ἐςὶν ὡς *ΝΕ : ΝΖ* δῆλον ἐκ τῶν ἀνακληθέντων Πορισμάτων. ὅτι δὲ τὸ αὐτὸ ξυμβαίνει κἀν τῷ 22 σχήματι τοῦτ᾽ ἐςὶν ἐν τῇ *Ἐλλείψει*, δείκνυται οὕτω: Ληφθέντος ἐπὶ τῆς *ΝΞ* διαμέτρου τῆς *Ἐλλείψεως ΜΝΘ* τοῦ σημείου κ, ἤχθω δι᾽ αὐτοῦ τῇ *ΒΔ* διαμέτρῳ τῆς βάσεως παράλληλος εὐθεῖα ἡ βκδ· διὰ δ᾽ αὐτῆς καὶ τῆς *ΜΚ* τεταγμένης ἐπὶ τὴν *ΝΞ* διάμετρον διήχθω ἐπίπεδον τὸ βμδθ, καὶ ἡ τομὴ ἔσεται κύκλος· ὅθεν *Νκ : κδ = ΕΝ : ΝΖ* (Πορισ. Γ΄. τῆς ς΄.). Ἔςι δὲ καὶ *ΝΚ : ΚΔ = Νκ : κδ* ἴσων τῶν *ΒΔ*, βδ παραλλήλων· ἄρα *ΝΚ : ΚΔ = ΝΕ : ΝΖ*.

τῆς ΕΝ πρὸς ΝΖ ταὐτὸς τῷ τῆς ΠΥ πρὸς ΥΤ (11 τῦ Ε΄.)· ϗ ἐναλλάσσοντι ἔςαι ὡς ἡ ΝΖ πρὸς ΥΤ ὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΠΥ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΕΝ πρὸς ΠΥ, ὕτως ἡ ΝΑ πρὸς ΥΑ (Πορ. 1 τῆς 4 τοῦ ς΄.). ὡς ἄρα ἡ ΝΖ πρὸς ΥΤ, ὕτως ἡ ΝΑ πρὸς ΥΑ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ε'πεὶ ἐπίτε τῆς Υ'περβολῆς καὶ Ε'λλείψεως ϗ αἱ πλάγιαι πλευραὶ ΞΝ, ΥΛ εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῷ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῦ Κώνυ ἕως τῶν Ν, Υ διαςάσεων ΑΝ, ΑΥ, ὑσῶν τῶν ΝΞ, ΛΥ παραλλήλων, ἔσονται ἄρα αἱ ὀρθίαι πλευραὶ ΝΖ, ΥΤ, ταῖς πλαγίαις ΝΞ, ΛΥ ἀνάλογον. Δι᾽ ὃ δὴ αἱ παραλλήλοις ἐπιπέδοις ἀπὸ τῦ αὐτῦ Κώνυ ἀποτεμνόμεναι ὑπερβολικαὶ ἢ ἐλλειπτικαὶ τομαὶ, ἑκάςη πρὸς τὸ ἑαυτῆς εἶδος παραβαλλόμεναι, λέγονται ὅμοιαι. Παραβολαὶ δὲ ὁποιαιδήποτε ἀεὶ εἰσὶν ὅμοιαι. Οὔσης γὰρ τῆς διαμέτρυ μιᾷ τῶν πλευρῶν τῦ διὰ τῦ ἄξονος τριγώνου παραλλήλυ, ἐπιπέδοις ἀεὶ παραλλήλοις ἀπογεννῶνται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Ἐὰν οἱασδήποτε κωνικῆς τομῆς ἡ ὀρθία πλευρὰ ΝΖ πρὸς ὀρθὰς ἔσα τῇ διαμέτρῳ, δίχα τμηθῇ κατὰ τὸ Ρ, ἀπὸ δὲ τῦ Σχημ. 23. 24. 25.

Ρ, ἀχθῇ ἡ ΡΤ, ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ (σχημ. 23.) τῇ διαμέτρῳ παράλληλος, ἐν δὲ ταῖς λοιπαῖς τομαῖς (σχημ. 24. 25.) οὕτως ὥστε τὴν διάμετρον δίχα κατὰ τὸ Γ τεμεῖν, τὸ ἀφ' οἱασδήποτε τεταγμένης ΜΚ τετράγωνον, διπλάσιον ἔσται τοῦ ἀντιστοιχοῦντος αὐτῷ τετραπλεύρου ΚΤΡΝ, ὅπερ ὑπὸ τῆς ΚΤ καὶ τῶν μικρῷ ὕστερον ὀνομασθησομένων πλευρῶν περιέχεται.

Ἀχθεῖσα γὰρ ἡ ΖΒ ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ τῇ διαμέτρῳ παράλληλος, ἐν δὲ ταῖς λοιπαῖς τομαῖς οὕτως, ὥστε τὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς πέρας Ξ, καὶ τὸ τῆς ὀρθίας Ζ ἐπιζευγνύειν, ἔσται ἐν πάσαις ταῖς τομαῖς παράλληλος τῇ ΡΤ, ἥτις ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ ἐστὶν ἐκ κατασκευῆς τῇ διαμέτρῳ παράλληλος, ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ καὶ Ἐλλείψει δίχα τέμνει, τὴν μὲν ΝΞ κατὰ τὸ Γ, τὴν δὲ ΝΖ κατὰ τὸ Ρ (34). Ἐπιζευχθεῖσα δὲ καὶ ἡ ΝΒ, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΡΤ κατὰ τὸ Σ, ὥσπερ ἡ

34) Ἔστι γὰρ ἡ ΝΓ=τῇ ΓΞ, ἥτε ΝΡ=τῇ ΡΖ· ὅθεν ΝΓ : ΓΞ=ΝΡ : ΡΖ· ἡ ἄρα ΞΖ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΡ (2. τοῦ ϛ΄.). Προῆκται δὲ ἡ μὲν ΒΖ ἐπ' εὐθείας τῇ ΖΞ, ἡ δὲ ΡΤ ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΡ· ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῇ ΡΤ, παράλληλος.

ΝΖ κατὰ τὸ Ρ (35). Τὰ τρίγωνα ἄρα ΝΡΣ, ΣΒΤ ὡς ἔχοντα τὰς κατὰ κορυφὴν πρὸς τῷ Σ γωνίας, καὶ τὰς ἐντὸς τῶν παραλλήλων ἐναλλὰξ ΝΡΣ, ΒΤΣ καὶ ΡΝΣ, ΤΒΣ ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ΝΣ μιᾷ πλευρᾷ τῇ ΣΒ ἴσην, ἔστιν ἀλλήλοις ἴσα (29 τοῦ Α΄.). Κοινοῦ δὲ προκειμένου τοῦ χωρίου ΝΣΤΚ, γίνεται τὸ ΒΝΚ τρίγωνον τῷ ΝΡΤΚ τετραπλεύρῳ ἴσον. Ἔστι δὲ ἐκ τῆς γενέσεως τῶν τομῶν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν ΝΚΒ ὀρθογωνίῳ ἴσον (36). Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΝΚ, ΚΒ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΒΝΚ τριγώνου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΚ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΚΤΡΝ τετραπλεύρου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Καλείσθω τὸ μὲν σημεῖον Γ (ὅπερ ἐν τῇ Ὑπερβολῇ καὶ Ἐλλείψει ἐστὶ σημεῖον τῆς διχοτομίας τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΝΞ) *ΚΕΝΤΡΟΝ* τῶν τομῶν τούτων· ἡ δὲ εὐθεῖα ΞΖ, ἢ ΖΒ, *ΔΙΕΥΘΕΤΟΥΣΑ*· ἡ δὲ ΓΡ ἢ ΡΤ καλοῖτ' ἂν καὶ ἐπὶ τῆς Παραβολῆς *ΥΠΟΔΙΕΥΘΕΤΟΥΣΑ*.

---

35) Ἐπεὶ ἐστιν ἡ ΡΣ τῇ ΒΖ παράλληλος, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΝΡ πρὸς ΡΖ, οὕτως ἡ ΝΣ πρὸς ΣΒ· ἴση δὲ ἡ ΝΡ τῇ ΡΖ (ἐκ κατασκευῆς) ἴση ἄρα καὶ ΝΣ τῇ ΣΒ· ἡ ἄρα ΝΒ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΡΤ κατὰ τὸ Σ.

36) Ἐν τῇ Παραβολῇ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΚΝΖ (Πορ. Α΄. τῆς Δ΄.) καὶ ἐπεὶ ΝΖ ἐστιν ἴση τῇ ΚΒ, ἴσον ἄρα καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΝΚΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ. Τὸ αὐτὸ ἔσεται κἀν τῇ Ὑπερβολῇ ὡς δῆλον ἐκ τοῦ Α΄. Πορίσματος τῆς Ε΄. καὶ ἐν τῇ Ἐλλείψει ὡς δῆλον ἐκ τοῦ Α΄. Πορίσματος τῆς ς΄.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἡ ὑπεροχὴ, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀφ' οἱασδήποτε τεταγμένης ΠΥ τετράγωνον τοῦ ἀφ' ἑτέρας τεταγμένης ΜΚ τετραγώνου, ἐστὶ διπλασία τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀντιστοιχοῦν τῷ πρώτῳ τετραγώνῳ τετράπλευρον ΝΡΧΥ, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τῷ δευτέρῳ τετραγώνῳ τετραπλεύρου ΝΡΥΚ, τοῦτ' ἔστι διπλασία τοῦ τετραπλεύρου ΚΥΧΥ. Ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὕτη, ᾗ ἕτερον ἑτέρου τὰ τετράγωνα ὑπερέχει, ἀχθείσης τῆς ΜΘ παρὰ τὴν διάμετρον, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ΠΘΔ ὀρθογώνιον (5 τοῦ Β'.), ὅπερ ἔσται τοῦ ΚΥΧΥ διπλάσιον (37).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Κώνου τομῆς δοθείσης ἀπὸ τοῦ ἐπὶ τῆς κατ' αὐτὴν περιμέτρου δοθέντος σημείου, ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

---

37) $MK^2 = 2NPYK$ · καὶ $\Pi Y^2 = 2NPKY$ · ἄρα $\Pi Y^2 - MK^2 = 2NPXY - 2NPYK = 2KYXY$ · ἀλλὰ $\Pi Y^2 - MK^2 = \Pi\Theta\Delta$ (5. τοῦ Β'.). ἄρα $\Pi\Theta\Delta = 2KYXY$.

38) Πόρισμα. Ὅθεν ἕπεται ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμένης ΗΓΟ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΖ καὶ τῆς πλαγίας ΝΞ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ΞΝΖ. Γενομένου γὰρ τοῦ σημείου Υ κατὰ τὸ Γ, τὸ τετράπλευρον ΝΥΧΡ ἀποχωρήσει εἰς τὸ τρίγωνον ΝΓΡ. Ὅθεν $H\Gamma^2 = 2N\Gamma P = \Gamma N \times NP$ · καὶ $4H\Gamma^2 = 4\Gamma N \times NP = 2\Xi N \times NP =$

Εἰ μὲν τὸ δοθὲν σημεῖον πρὸς τῇ κορυφῇ ἐστι τῆς τομῆς τοῦτ' ἔστι πρὸς τῷ Ν, ἀχθεῖσα ἀπ' αὐτοῦ ταῖς τεταγμέναις παράλληλος ἡ ΝΕ, ἐφάψεται τῆς τομῆς. Εἰ μὴ γὰρ, πεσεῖται ἄρα ἐντὸς, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ν ἐπὶ θάτερα τῆς διαμέτρου καταστήσεται χορδή. Ἡ διάμετρος ἄρα οὐ τέμνει δίχα πάσας τὰς ἐν τῇ τομῇ παραλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἐναντίον τῷ πρώτῳ τῶν δευτέρων ὅρων. Οὐ πίπτει ἄρα ἐντός· ἐφάπτεται ἄρα, καὶ δῆλον ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα. Σχημ. 26. 27. 28.

Εἰ δὲ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐστὶν ἐκτὸς τῆς κορυφῆς κατὰ τὸ Μ φέρε, ἀχθείσης τῆς ὑποδιευθετούσης ΡΤ, τετάχθων ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς, ἥτε ΜΚ καὶ ἡ ΚΤ τῇ ἡμιπαραμέτρῳ παράλληλος, ἥτις δὴ προεκβληθεῖσα, συμπιπτέτω τῇ διευθετούσῃ κατὰ τὸ Τ· καὶ εὑρεθεῖσα τρίτη συνεχῶς ἀνάλογον τῶν ΚΤ, ΚΜ ἡ ΚΘ, κείσθω ἐπ' εὐθείας ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τῆς διαμέτρου. Τούτων δ' οὕτω κατασκευασθέντων, ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΜ, ἐφάψεται τῆς τομῆς κατὰ τὸ Μ.

Ἀχθείσης γὰρ τῆς ΘΤ, τετάχθω ἐπὶ τὴν διάμετρον ἑτέρα τις ἡ ΗΛ συμβάλλουσα τῇ ΘΜ προεκβληθείσῃ κατὰ τὸ Π· καὶ τῇ ΚΤ παράλληλος ἀχθεῖσα ἡ ΛΥ συμπιπτέτω τῇ ὑποδιευ-

---

$ΞΝ \times ΝΖ$. Ἡ γὰρ ΝΖ τῆς ΝΡ ἐστὶ διπλασία, ἥ τε ΞΝ τῆς ΝΓ· ἔστι δὲ $4ΓΗ^2 = ΗΟ^2$. ἡ γὰρ ΗΟ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Γ· ἄρα $ΗΟ^2 = ΖΝ \times ΝΞ$.

θετȣ́σῃ κατὰ τὸ Υ, ϗ τῇ ΘΤ προσεκβληθείσῃ κατὰ τὸ Δ. Καὶ ἐπεὶ ἐκ κατασκευῆς αἱ ΚΤ, ΚΜ, ΚΘ συνεχῶς ἀνάλογον, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ΘΚΤ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ τετραγώνῳ (16 τȣ̃ ϛ΄.). Διπλάσιον ἄρα τοῦ τετραπλεύρου ΝΡΤΚ (Προτ. Η΄.). Ἔςι δὲ τὸ αὐτὸ διπλάσιον ϗ τȣ̃ τριγώνȣ ΤΚΘ, τὸ τρίγωνον ἄρα τȣ̃το ἴσον ἐςὶ τῷ τετραπλεύρῳ ΝΡΤΚ. Καὶ ἐπεί ἐςιν ὡς μὲν ἡ ΤΚ πρὸς ΚΘ, ȣ̔́τως ἡ ΔΛ πρὸς ΛΘ· ὡς δὲ ἡ ΚΘ πρὸς ΚΜ, ȣ̔́τως ἡ ΛΘ πρὸς ΛΠ, ἔσονται δὴ ϗ αἱ ΔΛ, ΛΠ, ΛΘ συνεχῶς ἀνάλογον, ὥσπερ αἱ ΚΤ, ΚΜ, ΚΘ (39). Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΠ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΛΘ (16 τȣ̃ ϛ΄.) τȣ̃τ᾽ ἔςι διπλάσιον τȣ̃ τριγώνȣ ΘΛΔ, ὥσπερ δὲ ϗ τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΗΛ διπλάσιον τȣ̃ τετραπλεύρȣ ΝΛΥΡ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΘΛΔ ἐςὶν ἀεὶ μεῖζον τȣ̃ τετραπλεύρȣ ΝΛΥΡ. Εἴγε εἰ μὲν ἡ τεταγμένη ἐςὶ κατωτέρω τῆς ΜΚ ὡς ἔχει ἡ ΗΛ τηνικαῦτα τῷ τριγώνῳ ΘΚΤ προςίθεται τὸ τραπέζιον ΚΛΔΤ μεῖζον ὂν τȣ̃ τραπεζίȣ ΚΛΥΤ, ὅπερ προςίθεται τῷ τετραπλεύρῳ ΝΚΤΡ ἴσῳ τῷ τριγώνῳ ΘΚΤ (40). Εἰδὲ ἀνωτέρω ὡς ἡ ηλ, τότε δὲ τȣ̃

39) ΔΛ : ΤΚ = ΛΘ : ΘΚ· ϗ ΛΠ : ΜΚ = ΛΘ : ΘΚ· ἄρα ΔΛ : ΤΚ = ΛΠ : ΜΚ· ἐναλλάσσοντι δὲ ΔΛ : ΛΠ = ΤΚ : ΚΜ· ἀλλὰ ΤΚ : ΚΜ = ΚΜ : ΚΘ = ΛΠ : ΛΘ, ἄρα ΔΛ : ΛΠ = ΛΠ : ΛΘ· ἄρα αἱ ΔΛ, ΛΠ, ΛΘ συνεχῶς ἀνάλογον.

40) Τὸ τρίγωνον ΘΚΤ = ΝΡΤΚ· τὸ δὲ ΚΛΔΤ,

τριγώνȣ ΘΚΤ ἀφαιρεῖται τὸ τραπέζιον λΚΤδ ἔλασσον ὂν τȣ̃ τετραπλεύρȣ λΚΤυ, ὅπερ ἀφαιρεῖται τȣ̃ αὐτȣ̃ τετραπλεύρȣ ΝΚΤΡ. Μεῖζον ἄρα ἀεὶ τὸ τρίγωνον ΔΛΘ τȣ̃ τετραπλεύρȣ ΝΛΤΡ· ἢ τὸ δλΘ τȣ̃ ΝλυΡ (41). Διὰ δὴ ταῦτα τὸ ἀπὸ τῆς ΠΛ τετράγωνον ὅπερ ἐςὶ τȣ̃ τριγώνȣ ΔΛΘ διπλάσιον, ἐςὶ μεῖζον τȣ̃ ἀπὸ τῆς ΗΛ, ὅπερ ἐςὶ τȣ̃ τετραπλεύρȣ ΝΛΤΡ διπλάσιον. Τό,τε ἀπὸ τῆς πλ, ὅπερ ἐςὶ τȣ̃ τριγώνȣ δλΘ διπλάσιον μεῖζον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς ηλ, ὅπερ ἐςὶ τȣ̃ τετραπλεύρου ΝλυΡ διπλάσιον. Οἱονδήποτε ἄρα σημεῖον Π, π παρὰ τὸ Μ, ἐκτὸς ἔςαι τῆς τομῆς, μόνον δὲ τὸ Μ ἐπὶ τῆς τομῆς, ὅθεν ἡ ΘΜ ἐφάπτεται αὐτῆς.

Τὸ τῆς διαμέτρȣ μέρος ΚΘ τὸ μεταξὺ τῆς τεταγμένης ϗ τȣ̃ σημείȣ τῆς συμβολῆς τῆς ἐφαπτομένης ϗ αὐτῆς τῆς διαμέτρȣ, καλείσθω *ὙΦΑΠΤΟΜΕΝΗ.*

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α΄.

Δῆλον ἄρα, ὅτι αἱ τῶν τομῶν τȣ́των ἐφαπτόμεναι καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον ταῖς αὐτῶν καμπύλαις συμπίπτȣσι.

μεῖζον τȣ̃ *ΚΛΥΤ*· ἄρα *ΘΚΤ*+*ΚΛΔΤ* μεῖζον, ἢ *ΝΡΤΚ*+*ΚΛΥΤ*· τȣ̃τ᾽ ἔςι τὸ τρίγωνον *ΘΛΔ* μεῖζον τȣ̃ τετραπλεύρȣ *ΝΛΥΡ*; τὸ τρίγωνον ἄρα *ΘΛΔ* μεῖζον ἀεὶ τȣ̃ τετραπλεύρȣ *ΝΛΥΡ*.

41) Τὸ τρίγωνον *ΘΚΤ*=*ΝΡΤΚ*, τὸ δὲ λ*ΚΤ*δ ἔλασσον τȣ̃ λ*ΚΤ*υ· ἄρα *ΘΚΤ*—λ*ΚΤ*δ μεῖζον ἢ *ΝΡΤΚ*—λ*ΚΤ*υ· τȣ̃τ᾽ ἔςι τὸ τρίγωνον δλΘ τȣ̃ τετραπλεύρȣ *Ν*λυ*Ρ*.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β'.

Προεκβληθείσης δὲ τῆς ΚΤ ἄχρις ὗ τῇ διευθετέσῃ ΖΒ κατὰ τὸ Β συμπέσῃ, ἐπεὶ ἐκ τῆς φύσεως τῶν τομῶν (Πόρισμ. Α', τῆς Δ'. Ε' ϗ ϛ'.) τὸ ὀρθογώνιον ΝΚΒ ἐςὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΜΚ τετραγώνῳ. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΚ, ἴσον τῷ ὑπὸ ΘΚΤ (κατὰ τὴν παρῦσαν). Ε'ςι δὴ τὸ ὑπὸ ΝΚΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΘΚΤ. Καὶ ὡς ἡ ΘΚ πρὸς ΝΚ, ὕτως ἡ ΚΒ πρὸς ΚΤ (16 τῦ ϛά). Τῦτ' ἔςιν ὡς ἡ ὑφαπτομένη πρὸς τὴν ἀποτετμημένην ἀπὸ τῆς διαμέτρυ πρὸς τῇ κορυφῇ, ὕτως ἡ ΚΒ πρὸς ΚΤ· καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΚΤ πρὸς ΚΒ ὕτως ἡ ΝΚ πρὸς ΘΚ. Τοιγαρῦν ἡ ἐφαπτομένη ἀπό τινος σημείυ δοθέντος τῦ Μ διορίζεται, ϗ ἐὰν ποιηθῇ ὡς ἡ ΚΤ πρὸς ΚΒ, ὕτως ἡ ΚΝ πρὸς ἑτέραν ζητυμένην τὴν ΚΘ, ἧς εὑρεθείσης ϗ τῇ διαμέτρῳ ἀπὸ τῦ Κ ἐφαρμοσθείσης ἡ ἀπὸ τῦ Θ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθεῖσα ΘΜ, ἔσεται τῆς τομῆς ἐφαπτομένη.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ'.

Ε'πεὶ ἐςὶν ἡ ΚΤ πρὸς ΚΒ, ὡς ἡ ΚΝ πρὸς ΚΘ (Πορ. προηγ.), ἔςι δὴ ἀνάπαλιν μὲν ἡ ΚΒ πρὸς ΚΤ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΚΝ· ἀναςρέψαντι δὲ ἡ ΚΒ πρὸς ΚΒ πλὴν ΚΤ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΚΘ πλὴν ΚΝ, τῦτ' ἔςιν ἡ ΚΒ πρὸς ΒΤ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΝ (Πορ. 1 τῆς 19 τῦ Ε'.)· ἤτοι ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ἡμιπαράμετρον (ἴση γὰρ ἡ ΒΤ τῇ ΖΡ ἢ τῇ ΝΡ), ὡς ἡ ὑφαπτομένη πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης ϗ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἀπολαμβανομένην.